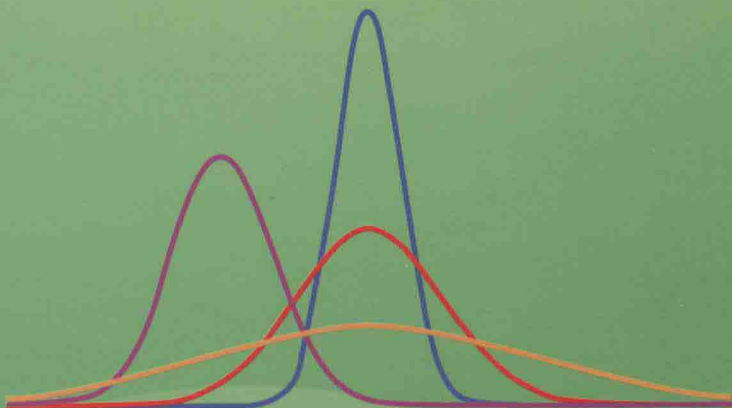
普通高等教育“十三五”规划教材
安徽省“十三五”规划教材
大学数学系列教学丛书

概率论与数理统计

（经管类）

范益政　郑婷婷　陈华友　主　编



科　学　出　版　社

普通高等教育“十三五”规划教材

安徽省“十三五”规划教材

大学数学系列教学丛书

概率论与数理统计

（经管类）

主编　范益政　郑婷婷　陈华友

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为经济管理类本科人才培养而编写的教材. 全书共八章，第1章至第5章是概率论部分，内容包括：随机事件与概率，随机变量与分布函数，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理；第6章至第8章是数理统计部分，内容包括：数理统计的基本概念，参数估计，假设检验. 本书简明易懂，概念引入自然. 为了便于读者理解和掌握书中的内容，书中例题和习题题型丰富，包括大量的应用题，注重与经管类专业交叉融合.

本书可作为高等学校经管类各专业的概率论与数理统计课程的教材和研究生入学考试的参考书，也可供管理技术人员和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计：经管类/范益政，郑婷婷，陈华友主编. —北京：科学出版社，2018.9

(大学数学系列教学丛书)

普通高等教育“十三五”规划教材 · 安徽省“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-057498-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①范… ②郑… ③陈… Ⅲ.①概率论–高等学校–教材 ②数理统计–高等学校–教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 107902 号

责任编辑：张中兴 蒋 芳 梁 清 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 9 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 9 月第一次印刷 印张：14
字数：277 000

定价：39.00 元

“大学数学系列教学丛书”
经管类编委会名单

FOREWORD / 丛书序言

数学是各门学科的基础, 不仅在自然科学和技术科学中发挥重要作用, 因为"高技术本质上是一种数学技术", 而且在数量化趋势日益明显的大数据背景下, 在经济管理和人文社科等领域也发挥着不可替代的作用. 大学本科是数学知识学习、实践应用和创新能力培养的基础阶段. 如何提高数学素养和培养创新能力是当前大学数学教育所关心的核心问题.

教材建设是大学数学教育改革的重要内容. 基于此, 我们编写此套大学数学系列教学丛书. 该丛书根据使用对象的不同、教材内容的覆盖面和难易度, 分为两类: 一类是主要针对理工类学生使用的《高等数学 (上册)》、《高等数学 (下册)》、《线性代数》、《概率论与数理统计》, 另一类是针对经管类学生使用的《高等数学 (经管类)》、《线性代数 (经管类)》和《概率论与数理统计 (经管类)》.

上述丛书所覆盖的内容早在三百多年前就已创立. 例如, 牛顿和莱布尼茨在 1670 年创立了微积分, 这是高等数学的主要内容. 凯莱在 1857 年引入矩阵概念, 佩亚诺在 1888 年定义了向量空间和线性映射, 这些都是线性代数中最基本的概念. 惠更斯在 1657 年就发表了关于概率论的论文, 塑造了概率论的雏形, 而统计理论的产生则是依赖于 18 世纪概率论所取得的进展. 当然, 经过后来的数学家的努力, 这些理论已形成严谨完善的体系, 成为现代数学的基石.

尽管如此, 能够很好领会这些理论的思想本质并不是一件容易的事! 例如, 微积分中关于极限的 ε-δ 语言、线性代数中的向量空间、概率论中的随机变量等. 这些都需要经过反复练习和不断揣摩, 方能提升数学思维, 理解其中精髓.

国内外关于大学数学方面的教材数不胜数. 针对于不同高校、不同专业的学生, 这些教材各有千秋. 既然如此, 我们为什么还要继续编写这样一套系列教材呢?

我们最初的设想是要编写一套适合安徽大学理工类、经管类等学生使用的大学数学系列教材. 我校目前使用的教材由于编写时间较早、版次更新不及时, 部分例题和习题已显陈旧. 另一方面, 由于新的高考改革方案即将在全国实施, 未来

高中文理不分科将直接影响到大学数学教学. 因此, 我们有必要在内容体系上进行调整.

在教材的编写以及与科学出版社的沟通过程中, 我们发现, 真正适合安徽大学等地方综合性大学及普通本科学校的规划教材并不多见. 安徽大学作为安徽省属唯一的双一流学科建设高校, 本科专业涉及理学、工学、文学、历史学、哲学、经济学、法学、管理学、教育学、艺术学等 10 个门类, 数学学科在全省发挥带头示范作用, 所以我们有责任编写一套大学数学系列教学丛书, 尝试在全省范围内推动大学数学教学和改革工作.

本套系列教材涵盖了教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会规定的关于高等数学、线性代数、概率论与数理统计的基本内容, 吸收了国内外优秀教材的优点, 并结合安徽大学的大学数学教学的实际情况和基本要求, 总结了诸位老师多年的教学经验, 为地方综合性大学及普通本科学校的理工类和经管类等专业学生所编写.

本套系列教材力求简洁易懂、脉络清晰. 在这套教材中, 我们把重点放在基本概念和基本定理上, 而不会去面面俱到、不厌其烦地对概念和定理进行注解、对例题充满技巧地进行演示, 使教材成为一个无所不能、大而全的产物. 我们之所以这样做是为了让学生避免因为细枝末节而未能窥见这门课程的主干和全貌, 误解了课程的本质内涵, 从而未能真正了解课程的精髓. 例如, 在线性代数中, 以矩阵这一具体对象作为全书首章内容, 并贯穿全书始末, 建立抽象内容与具体对象的联系, 让学生逐渐了解这门课程的思维方式.

另一方面, 本套系列教材突出与高中数学教学和大学各专业间的密切联系. 例如, 在高等数学中, 实现了与中学数学的衔接, 增加了反三角函数、复数等现行中学数学中弱化的知识点, 对高中学生已熟知的导数公式、导数应用等内容进行简洁处理, 以极限为出发点引入微积分, 并过渡到抽象环节和严格定义. 在每章最后一节增加应用微积分解决理工或经管领域实际问题的案例, 突出了数学建模思想, 以培养学生应用数学能力.

以上就是我们编写这套系列教材的动机和思路. 这仅是以管窥豹, 一隅之见, 或失偏颇, 还请各位专家和读者提出宝贵建议和意见, 以便在教材再版中修订和完善.

PREFACE / 前言

社会经济系统是由社会、经济、教育、科学技术及生态环境等诸多子系统构成的复杂巨系统. 每个子系统均受到若干不确定性因素的影响. 概率论与数理统计作为不确定系统的一种重要的分析工具, 不仅在工程与技术领域具有广泛的应用, 而且在经济、社会及管理等领域具有显著的应用效果. 例如, 传染病随机模型, 随机库存模型, 线性回归模型和市场占有率的马尔可夫预测模型等.

本教材是依据教育部颁发的教学大纲, 参考大量国内外相关教材, 并结合安徽大学多年来在概率论与数理统计的教学实践经验编写而成. 在教材的编写过程中, 我们注重经管类学科的特点, 精选素材. 教材内容安排紧凑, 深入浅出. 全书共分为八章, 第 1 章到第 5 章为概率论部分, 内容包括概率论的基本概念, 一维和多维随机变量及其概率分布, 随机变量的数字特征, 大数定律和中心极限定理等; 第 6 章到第 8 章为数理统计部分, 内容包括数理统计的基本概念、参数估计和假设检验等. 本书体现了编者在以下几个方面的努力:

1. 在引入基本概念时注意揭示概念的直观背景和实际意义, 在叙述概念和基本方法时注意阐明其概率意义或统计意义.

2. 采用规范的概率统计术语, 书中的定理和结论大都给出直观且严格的证明, 注重培养学生运用概率统计的理论方法去解决实际问题的能力.

3. 书中例题和习题的题型丰富, 包括大量的应用题, 注重与经管类专业的交叉融合, 有助于提升学生统计建模和应用能力.

在本书的编写过程中, 我们参阅了国内外许多教材, 谨表诚挚谢意. 限于编者水平, 书中难免有疏漏或不妥之处, 敬请读者批评指正.

编　者

2018 年 4 月

CONTENTS / 目录

Chapter 1

第1章 随机事件与概率

概率论是研究随机现象规律性的数学学科. 自 17 世纪中叶, 概率论作为一门数学分支诞生以来, 至今已经取得了巨大的成就, 并被广泛应用于工程技术、社会经济管理和国民生产的各个领域.

本章首先重点介绍概率论的两个最基本的概念——事件与概率, 接着讨论古典概型、几何概型及其概率计算, 然后介绍条件概率, 乘法公式, 全概率公式与贝叶斯公式, 最后讨论事件的独立性.

1.1 随机事件

一、 随机现象与统计规律性

在自然界和人类社会生活中存在着两种现象. 一类是在一定条件下必然出现的现象, 例如, 太阳从东方升起. 这类现象称为**确定性现象**. 另一类则是事先无法准确预知其结果的现象, 称为**随机现象.** 例如, 在相同条件下抛同一枚硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么. 这类现象在试验或观察之前不能预知确切的结果.

随机现象又分为个别随机现象和大量性随机现象. 个别随机现象原则上不能在不变的条件下重复出现, 例如历史事件. 而大量性随机现象可以在完全相同的条件下重复出现, 例如抛硬币. 本书中的随机现象一般都是指大量性随机现象.

随机现象在大量重复试验或观察中所表现出来的固有规律性称为**统计规律性**, 它是随机现象本身蕴含的内在的规律性, 概率论就是要研究和揭示这种统计规律性, 并指导社会实践.

二、随机试验

事实上, 对随机现象的观察称为**试验**, 它包括各种各样的科学实验. 对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 下面举一些试验的例子.

E_1: 抛一枚硬币, 观察正面 (H), 反面 (T) 出现的情况.

E_2: 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 (H), 反面 (T) 出现的情况.

E_3: 抛一颗骰子, 观察出现的点数.

E_4: 记录某网站一小时内的点击次数.

E_5: 在一批手机中任意抽取一只, 测试它的寿命.

E_6: 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

以上试验的共同特点是

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果在试验前可以明确知道;

(3) 试验之前不能确定将会出现哪一个结果.

在概率论中, 将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**, 简称**试验**. 一般用 E 来表示.

三、样本空间与随机事件

随机试验 E 的一个可能结果称为 E 的一个**基本事件**, 记为 ω, e 等.

随机试验 E 的基本事件全体构成的集合, 称为 E 的**样本空间**, 记为 S 或 Ω, 也就是随机试验的所有可能的结果放在一起所构成的集合. 对于随机试验, 尽管在每次试验之前不能预知试验的结果, 但试验所有可能结果组成的集合是已知的, 即 $\Omega=\{\omega|\omega$ 为 E 的基本事件$\}$, 样本空间的每一个元素也称为**样本点**.

例 1.1.1　写出上述试验中的样本空间.

E_1: $\Omega=\{\mathrm{H,T}\}$;

E_2: $\Omega=\{\mathrm{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT}\}$;

E_3: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;

E_4: $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

E_5: $\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$;

E_6: $\Omega=\{(x,y)|T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$, 其中 x 表示最低温度 (单位: ℃), y 表示最高温度 (单位: ℃), 并设这一地区的温度不会小于 T_0, 也不会大于 T_1. □

一般地, 称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**, 简称**事件**. 在每次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时, 称这一事件发生. 事件用大写字母 A,B,C 等表示.

考虑两个特殊的随机事件: Ω 和 $\varnothing$. 由于 $\Omega\subset\Omega$, 所以样本空间 Ω 也是随机事件, 但每做一次随机试验, 样本空间 Ω 必然发生, 因此称样本空间 Ω 为必然事

件. 由于 $\varnothing \subset \Omega$, 所以空集 $\varnothing$ 也是随机事件, 称空集 $\varnothing$ 为不可能事件.

四、 事件的关系和运算

事件是一个集合, 因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法, 并根据 "事件发生" 的含义, 给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω, 而 $A, B, A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) **包含关系** 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含 A, 记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

(2) **相等关系** 若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

(3) **事件的并 (和)** 称 A 与 B 中至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和, 记为 $A \bigcup B$. 类似地, 称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和; 称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和.

(4) **事件的交 (积)** 称 A 发生且 B 也发生的事件为事件 A 与事件 B 的积, 记为 AB 或 $A \bigcap B$. 类似地, 称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积; 称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积.

(5) **事件的差** 称 A 发生而 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A-B$.

(6) **互不相容 (互斥) 事件** 如果事件 A 和事件 B 不可能同时发生, 即 $A \bigcap B = \varnothing$, 则这两个事件称为互不相容事件 (或互斥事件). 若 $A \bigcap B=\varnothing$, 此时 $A \bigcup B$ 可记为 $A+B$. 类似地, 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥, 记 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\sum\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(7) **对立 (逆) 事件** 如果事件 A, B 满足 $A \bigcap B=\varnothing$, 且 $A+B=\Omega$, 则称事件 A, B 互为对立事件 (逆事件). 通常用 $\overline{A}$ 表示事件 A 的对立事件, 即如果 A 发生, 则 $\overline{A}$ 不发生. 显然 A 与 $\overline{A}$ 是互斥事件, 且 A 与 $\overline{A}$ 之和是必然事件.

图 1.1.1 直观地表现了以上 (1)~(7) 事件的运算与关系.

在进行事件运算时, 经常要用到下述定律. 设 A, B, C 为事件, 则有

交换律 $A \bigcup B=B \bigcup A ; A \bigcap B=B \bigcap A$.

结合律 $A \bigcup(B \bigcup C)=(A \bigcup B) \bigcup C$;

$A \bigcap(B \bigcap C)=(A \bigcap B) \bigcap C$.

分配律　$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

　　　　$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

德 · 摩根 (De Morgan) 律　$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}; \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

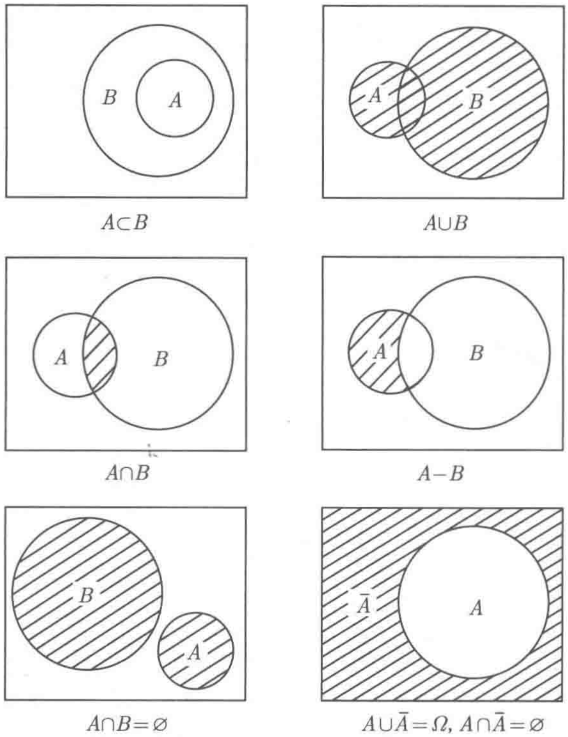


图 1.1.1　事件的运算与关系

习　题　1.1

1. 写出下列各试验的样本空间及指定事件所含的样本点.

(1) 将一枚硬币抛掷三次,

$$A=\{\text{第一次掷出正面}\},\quad B=\{\text{三次掷出同一面}\},\quad C=\{\text{有正面掷出}\};$$

(2) 将一颗骰子掷两次,

$$A=\{\text{点数相同}\},\quad B=\{\text{其中一次点数是另一次的两倍}\},\quad C=\{\text{点数之和是 }6\}.$$

2. 从某图书馆里任取一本书, 事件 A 表示 "取到数学类图书", 事件 B 表示 "取到中文版图书", 事件 C 表示 "取到精装图书".

(1) 试述 $AB\overline{C}$ 的含义; (2) 什么情况下, $C\subset B$? (3) 什么情况下, $\overline{A}=B$?

3. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 为某一试验中的四个事件, 试用事件的运算表达如下事件:

(1) "四个事件中至少有一个发生"; (2) "恰好发生两个"; (3) "至少发生三个"; (4) "至多发生一个".

4. 试述下列事件的对立事件: (1)$A =$ "射击三次皆命中目标"; (2)$B =$"甲产品畅销、乙产品滞销"; (3)$C =$"加工四个零件至少有一个是合格品".

5. 在区间 $[0,1]$ 中任取一点 x, 记 $A = \{x\,|0 \leqslant x \leqslant 2/3\}, B = \{x\,|1/4 < x \leqslant 3/4\}, C = \{x\,|2/3 \leqslant x < 1\}$, 试表示如下诸事件:

(1) $A\overline{B}$; (2) $\overline{AB}$; (3) $(A \bigcup B)\,\overline{A \bigcup C}$.

6. 试证明以下事件的运算公式: (1)$A = AB \bigcup A\overline{B}$; (2)$A \bigcup B = A \bigcup \overline{A}B$.

1.2 频率与概率

概率是什么? 人们对概率这个数学术语不一定清楚, 却往往有意或无意地使用它. 对于问题 "明天是否会下雨", 有人会说 "我有 80%的把握断定明天不会下雨"; 对于购买福利彩票的人来说, 关心投入一定资金后获得头奖的可能性有多大? 这些问题都涉及随机事件的概率.

对于一个随机事件 (除必然事件和不可能事件外) 来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 但它们发生的可能性大小是客观存在的, 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟是多大. 为此, 首先引入频率, 它描述了事件发生的频繁程度, 进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的度量——概率.

一、频率

定义 1.2.1 (频率) 在相同的条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**(frequency), 并记为 $f_n(A)$.

由定义, 易见频率具有下述基本性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比, 其大小表示事件 A 发生的频繁程度, 且频率越大, 事件 A 发生就越频繁, 即事件 A 在一次试验中发生的可能性就大. 反之亦然. 因而, 直观的想法是能否用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 请看 "抛硬币" 这个试验.

例 1.2.1　将一枚硬币抛掷 5 次, 50 次, 500 次, 各做 10 遍, 得到数据如表 1.2.1 所示 (其中 n_{H} 表示 H 发生的频数, $f_n(\mathrm{H})$ 表示 H 发生的频率).

表 1.2.1　抛硬币试验

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上有人做过, 得到如表 1.2.2 所示的数据.

表 1.2.2　几类著名的抛硬币试验

试验者	n	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$
德・摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K.Pearson	12000	6019	0.5016
K.Pearson	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出: 抛硬币次数 n 较小时, 频率 $f_n(\mathrm{H})$ 在 0 与 1 之间随机波动, 其幅度较大, 但随着 n 增大, 频率 f_n (H) 呈现出稳定性, $f_n(\mathrm{H})$ 总是在 0.5 附近摆动, 而且逐渐趋近于 0.5.

实践证明, 当试验次数 n 很大时, 事件 A 的频率几乎稳定地趋近于一个常数 p. 频率的这种性质称为频率的稳定性, 它是事件本身所固有的. 我们从频率的稳定性出发, 给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义.

二、 概率的定义

定义 1.2.2 (概率的频率统计性定义)　在一组不变的条件下, 重复做 n 次试验, 记 m 是 n 次试验中事件 A 发生的次数. 当试验次数 n 很大时, 如果频率 m/n 稳定地在某数值 p 附近摆动, 而且一般地说, 随着试验次数的增加, 这种摆动的幅度趋近于 0, 则称数值 p 为事件 A 在这一组不变的条件下发生的**概率**(probability), 记作 $P(A)=p$.

上述概率反映随机现象的统计规律性, 也给出了在实际问题中估算概率的近似方法, 当试验次数足够大时, 可将频率作为概率的估计值.

在实际中, 我们不可能对每一个事件都做大量的试验, 然后求得事件的频率. 但是随机事件频率的稳定性使人们确信概率的存在, 概率是对随机事件发生的可能性大小的客观度量. 为了理论研究的需要, 我们从频率的三个性质得到启发, 给出如下概率的公理化定义.

定义 1.2.3 (概率的公理化定义) 设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的**概率**, 如果集合度量函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) **非负性** 对于每一个事件 A, $P(A) \geqslant 0$;

(2) **规范性** 对于必然事件 Ω, $P(\Omega) = 1$;

(3) **可列可加性** 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

由概率的公理化定义, 可以推得概率的一些重要性质.

性质 1.2.1 $P(\varnothing) = 0$.

证明 $A_n = \varnothing\,(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, $A_iA_j = \varnothing$, $i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$.

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

由概率的非负性知, $P(\varnothing) \geqslant 0$, 故由上式知 $P(\varnothing) = 0$. □

性质 1.2.2 (有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则

$$P\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \cdots + P\left(A_n\right).$$

证明 设 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing, A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$, 则

$$\begin{aligned} P\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) + 0 = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \cdots + P\left(A_n\right). \end{aligned}$$

□

性质 1.2.3 设 A, B 是两个事件, 则 $P(B - A) = P(B) - P(BA)$. 若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geqslant P(A)$.

证明请读者自己完成.

性质 1.2.4　对于任一事件 A, $P(A) \leqslant 1$.

性质 1.2.5　对于任一事件 A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 1.2.6 (加法公式)　对于任意两事件 A, B,

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明　因为 $A \bigcup B = A \bigcup (B - AB)$, 且 $A(B - AB) = \varnothing$, $AB \subset B$, 故

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad \square$$

上式还能推广到多个事件的情况.　例如, 设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件, 则

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

一般地, 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 可以用归纳法证明下式成立

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n). \end{aligned}$$

例 1.2.2　已知 $P(\overline{A}) = 0.5, P(\overline{A}B) = 0.2, P(B) = 0.4$, 求

(1) $P(AB)$; (2) $P(A - B)$; (3) $P(A \bigcup B)$; (4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解　(1) 因为 $B = AB + \overline{A}B$, 所以 $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, 从而

$$P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B) = 0.4 - 0.2 = 0.2.$$

(2) 因为 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.5 = 0.5$, 所以有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.2 = 0.3.$$

(3) $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$.

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P\left(\overline{A \bigcup B}\right) = 1 - P(A \bigcup B) = 1 - 0.7 = 0.3$.

也可以由减法公式来计算

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}B) = 0.5 - 0.2 = 0.3. \qquad \square$$