交通与运输类系列教材

JIAOTONG YU YUNSHU LEI XILIE JIAOCAI

# 运筹学

王晓原　孙　亮　刘丽萍◎编著

YUNCHOUXUE

西南交通大学出版社

交通与运输类系列教材

# 运 筹 学

王晓原　孙亮　刘丽萍　编著

西南交通大学出版社
·成都·

**内容简介**

本书重点介绍运筹学的基本概念、基本理论和求解方法，包括线性规划与单纯形法、线性规划的对偶理论与灵敏度分析、运输问题、整数规划、目标规划、非线性规划、多目标规划、动态规划、决策论、对策论、变分法、交通网络平衡配流理论、空间价格平衡分配问题等具体内容，最后附有详细的习题解答，是专门针对交通类专业学生制定的教材。

本书可作为高等院校交通运输与交通工程专业及相关专业的研究生和本科生教材，也可作为各类专业人员的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学 / 王晓原，孙亮，刘丽萍编著. —成都：西南交通大学出版社，2018.1

交通与运输类系列教材

ISBN 978-7-5643-5971-3

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①王… ②孙… ③刘… Ⅲ. ①运筹学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 317349 号

交通与运输类系列教材

**运筹学**

王晓原　孙亮　刘丽萍　**编著**

责任编辑　孟秀芝
封面设计　何东琳设计工作室

出版发行　西南交通大学出版社
（四川省成都市二环路北一段 111 号
西南交通大学创新大厦 21 楼）
邮政编码　610031
发行部电话　028-87600564
官网　http://www.xnjdcbs.com
印刷　成都中铁二局永经堂印务有限责任公司

成品尺寸　185 mm × 260 mm
印张　17.5
字数　437 千
版次　2018 年 1 月第 1 版
印次　2018 年 1 月第 1 次
定价（含光盘）　49.80 元
书号　ISBN 978-7-5643-5971-3

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

# 前言 _ PREFACE

运筹学是研究各种广义资源的运用、筹划以及相关决策、对策等问题的一门近代新兴科学。针对交通类专业学生开设的运筹学是为交通运输管理决策提供定量依据的应用科学，其目的是根据问题的需求，通过数学的分析和运算，做出综合性的、合理的优化安排，以便更有效地发展有限资源的效益。其特点是将交通管理中出现的实际问题归纳为抽象的数学模型，综合运用数学方法或计算机工具对模型进行求解，得到解决问题的最优方案。

“运筹学”课程是交通工程和交通运输专业的主要基础课之一。通过学习，可以培养学生运用系统优化和定量分析的能力，为分析和解决交通运输系统中的实际问题，更好地学习“交通规划”“交通控制”等后续课程，打好必要的基础。

全书共三篇，主体内容分为十三章。绪论主要介绍了运筹学的背景、基本概念与包含内容等问题；第 1 篇（第 1 章 ~ 第 8 章）规划论，主要介绍了运筹学中的规划问题；第 2 篇（第 9 章 ~ 第 10 章）决策与对策论，主要介绍了决策论与对策论；第 3 篇（第 11 章 ~ 第 13 章）变分法及其应用，主要介绍了变分法及其应用。本书前两篇主要为本科生所学课程；第 3 篇主要为研究生所学课程，也可作为本科到研究生阶段的过渡学习内容，为研究生阶段的学习打下基础，各校可根据教学计划中的学时数和具体情况进行安排。此外，由于图论与排队论等教学内容在交通类其他课程中多有涉及，本书不再论述。

本书由王晓原、孙亮、刘丽萍编著，刘亚奇、苑慧芳、汪海波、田伟、刘振雪、于翠翠、王云云、王方、孔栋、刘菲菲、陈晨、阚馨童、孙懿飞、赵新越、冯凯、张露露也参与了大量工作。

本书引用了《运筹学》（吉林大学出版社）的内容，同时借鉴了《运筹学》（清华大学出版社）、《现代物流与交通运输系统——模型与方法》（人民交通出版社）、《最优控制——理论、方法与应用》（高等教育出版社）等教材和著作的内容，在此对上述资料的作者们表示最衷心的感谢!

由于作者水平有限，书中肯定会存在一些不妥或需要改进的地方，欢迎广大读者及同行专家批评指正。

编者

2017 年 6 月

# 目录 _ CONTENTS

## 第2篇　决策与对策论



## 第3篇　变分法及其应用

及工商业、政府和国防方面资金的大系统中所发生的各种问题。其独特的方法是发展一个科学的系统模式，列入随机和风险等各种因素的尺度，并运用这个模式预测和比较各种决策、战略并控制方案所产生的后果。其目的是帮助主管人员科学地决定方针和政策。”

美国运筹学会认为，“运筹学所研究的问题，通常是在要求分配有限资源的条件下，科学地决定如何最好地设计和运营人机系统。”

其他对运筹学的提法还有“应用的科学”“定量化的常识”“决策的科学方法”“管理的数学方法”等。负责英国运筹小组的布莱克特教授则称他的工作是“作业的科学分析”。我国对运筹学也有很多不同的提法，有的学者把运筹学看作是“运用系统的科学方法，经由模型的建立与测试以便得到最优的决策”，有的把运筹学看作是系统工程的前身，有的则认为运筹学是许多定量管理方法的总称。

我国最近出版的管理百科全书中有关运筹学这个名词的词意是这样写的：“运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。”同时指出，它是一门应用科学。但是除了经济管理领域之外，在其他领域中运筹学也是适用的。

## 0.3 运筹学所包含的内容

运筹学是一门新兴的学科，从 20 世纪 40 年代出现至今，在内容上有很大的发展。以《运筹学国际文摘》收集编写的各国运筹学论文的内容为例，按技术分类就有 50 多种，主要有决策论、对策论、图论、信息论、马氏过程、网络、各种规划论（凸规划、分数规划、几何规划、目标规划、整数规划、线性规划、非线性规划、参数规划、二次规划、运输规划等）、排队论、动态规划、模拟、统计回归、随机过程、时间序列分析等。还有人工智能、模糊数集、成本效益分析、数值分析、优化理论、控制过程、有限元分析等。可见，运筹学所包括的内容是极为丰富的。

## 0.4 运筹学的应用——建模

应用运筹学解决问题的过程，实际上就是一个决策的过程。运筹学的核心问题是建立模型。

运筹学模型具有两个重要特点：一是要尽可能简单；二是要能完整地描述所研究的系统。建立模型时，一定要以科学的态度弄清楚问题中涉及的各种因素，并且用科学的语言即模型表达出来。这就要求对表示各种因素的变量，假设出一个关系式来，或者说建立一个数学模型。模型要能代替现实供我们分析研究。模型不仅要将有关的各种因素按它们的相互影响关系加以描述，还要对可能采取的行动的结果进行评价。建立模型时，有时需要对许多因素做深入的描述和评价，有时可以只对其中一部分做一般的探讨。这在开始建立模型时往往是不易判断的。一般说来建立的模型要尽量简单，只要适合所要研究的问题就行。有时过于详细的模型可能给分析计算带来很多困难，反过来有时过于简单的模型所得到的结果又并非现实可行。所以，选择什么样的模型和确定建立模型的范围并不是很容易的，往往需要丰富的经验和熟练的技巧。运筹学是以运用科学的方法来解决大系统管理中出现的复杂问题为目的，

要把问题真正解决好，往往需要先把复杂的问题中最关键的因素抽象成简单的问题，通过对简单问题的求解，再把问题深化。这样才能从简单到复杂、系统而科学地解决管理中面临的各种问题。

运筹学模型一般由两个部分组成：都有一个明确的目标，这个目标就是从众多的可行方案中挑选出一个最优方案，所以有人给运筹学下了这样一个定义："运筹学是为决策者提供最优决策的一种数学方法"。这种说法是有一定道理的。用来表达目标的变量（称为决策变量）都要受一组条件的约束（称为约束条件），它反映了问题本身所受到的客观条件的限制。

## 0.5 运筹学的特点

运筹学作为一门应用科学，有以下特点：

（1）多种专家的协作。运筹学从一开始就是由许多知识专长不同的集体努力而取得成果的。这是由于运筹学推广应用的领域非常广泛，而具备了运筹学知识的人又不可能对各个知识领域都很精通，这就需要各方面专家集集体智慧协作努力。当然配合运筹学专家的各方面专业人才也应具备一定的运筹学基本知识。

（2）从系统的观点来解决问题。在一个系统中，任何一部分的活动总会对其他部分的活动产生影响。因此，当问题之间互相紧密制约时，不能简单孤立地分别考虑其解决方法，而必须全面考虑它们之间的相互作用，单个问题的最优解对于整个系统而言未必是最优的。

（3）采用科学方法并使用模型。运筹学是用来解决管理中面临的问题的，运筹学总是从实际情况出发建立一个合适的模型来分析研究实际问题。

（4）需要电子计算机。运筹学模型并不是都要用很复杂的数学方法，往往较多地用简单的数学方法进行大量类似的重复计算，因此它是离不开计算机的。计算机的发展推动了运筹学的发展，反过来，运筹学的发展也扩大了计算机的应用。

# 第 1 篇　规划论

## 1　线性规划与单纯形法

线性规划（Linear Programming）是运筹学最重要的分支之一。自 1947 年美国人丹捷格（G. B. Dantzig）提出求解线性规划的单纯形法以来，它在理论上趋向成熟，实际上的应用日益广泛与深入，现在几乎各行各业都可以建立线性规划模型。比如制订企业最佳经营计划、确定产品最优配料比、寻找材料的最优下料方案、研究各种资源的最优分配方案等。由于线性规划模型具有应用的广泛性，计算技术比较简单，更主要由于它易于在计算机上实现它的算法，所以线性规划已成为现代管理科学的重要基础和手段之一。

### 1.1　线性规划问题

#### 1.1.1　线性规划问题的数学模型

线性规划是研究在一组线性不等式及等式约束下，使得某一线性目标函数取得最大（或最小）的极值问题。下面我们通过几个例子来介绍线性规划问题的数学模型。

1）两个例子

**例 1**　某工厂生产Ⅰ、Ⅱ两种型号交通设备，为了生产一台Ⅰ型和Ⅱ型交通设备，所需要原料分别为 2 和 3 个单位，需要的工时分别为 4 和 2 个单位。在计划期内可以使用的原料为 100 个单位，工时为 120 个单位。已知生产每台Ⅰ、Ⅱ型交通设备可获利润分别为 6 和 4 个单位，试确定获利最大的生产方案。

**解**　这是一个非常简化的实际问题。为了解决这个问题，我们先来建立该问题的数学模型。

设 $x_1$，$x_2$ 分别表示计划期内设备Ⅰ、Ⅱ的产量。因为计划期内生产用的原料和工时都是有限的，所以在确定设备Ⅰ、Ⅱ的产量时要满足如下约束条件：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 100 \\ 4x_1+2x_2\leqslant 120 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

一般满足上述约束方程组的解不是唯一的，根据题意我们需要的是既满足约束条件又使得所获利润最大的生产方案。若以 $Z$ 表示总利润，我们的目标是：$\max Z=6x_1+4x_2$。

综上所述，该问题可用数学模型表示为：

目标函数

$$\max Z=6x_1+4x_2$$

约束条件

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 100\\4x_1+2x_2\leqslant 120\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

**例 2**　某昼夜服务的公交线路每天各时间区段内所需司机和乘务人员数如表 1.1 所示。

**表** 1.1

| 班次 | 时间 | 所需人数 |
|---|---|---|
| 1 | 6:00—10:00 | 60 |
| 2 | 10:00—14:00 | 70 |
| 3 | 14:00—18:00 | 60 |
| 4 | 18:00—22:00 | 20 |
| 5 | 22:00—2:00 | 20 |
| 6 | 2:00—6:00 | 30 |

设司乘人员在各时间段一开始时上班，并连续工作 8 小时，问该公交线路至少应配备多少司乘人员？列出该问题数学模型。

**解**　设 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 为各班新上班人数，考虑到在每个时间段工作的人数既包括该时间段新上班的人又包括上一时间段上班的人，按所需人员最少的要求可列出本例的数学模型。

目标函数

$$\min Z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

约束条件

$$\begin{cases}x_1+x_6\geqslant 60\\x_1+x_2\geqslant 70\\x_2+x_3\geqslant 60\\x_3+x_4\geqslant 20\\x_4+x_5\geqslant 20\\x_5+x_6\geqslant 30\\x_1,x_2,\cdots,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

2）总结

上面两例都是一类优化问题，它们具有下述特征：

（1）每个问题都用一组未知变量 $x_1,\cdots,x_n$ 表示所求方案，通常这些变量都是非负的。

（2）存在一组约束条件，这些约束条件都可以用一组线性等式或不等式表示。

（3）都有一个目标要求，并且这个目标可表示为一组未知量的线性函数，称为目标函数。目标函数可以求最大也可以求最小。

具有上述特征的问题称为线性规划问题。线性规划问题的数学模型形式如下：

目标函数：

$$\max(\min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant \begin{pmatrix} \geqslant \\ = \end{pmatrix} b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant \begin{pmatrix} \geqslant \\ = \end{pmatrix} b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant \begin{pmatrix} \geqslant \\ = \end{pmatrix} b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

### 1.1.2 图解法

1）图解法

如何求解线性规划模型是本章讨论的中心问题，为对求解线性规划的解法有个直观的启迪，首先介绍只有两个变量的线性规划的图解法。

例 1 的模型中仅包含两个变量，所以能在平面直角坐标中将满足约束条件的点表示出来。约束条件 $2x_1+3x_2 \leqslant 100$ 、$4x_1+2x_2 \leqslant 120$ 都代表包括一条直线的半个平面，考虑到 $x_1,x_2 \geqslant 0$，所以满足所有约束条件的点应在坐标系第一象限两个半平面交成的公共区域 $OQ_1Q_2Q_3$ 内，称该区域为可行域。

满足约束条件的点称为可行解。例 1 的可行解就在凸多边形 $OQ_1Q_2Q_3$ 的边界及其内部上（见图 1.1），显然该可行域包含无数多个可行解，为了在这无穷多个可行解中找到最优解，我们在坐标系中画出目标函数表示的一族平行线。

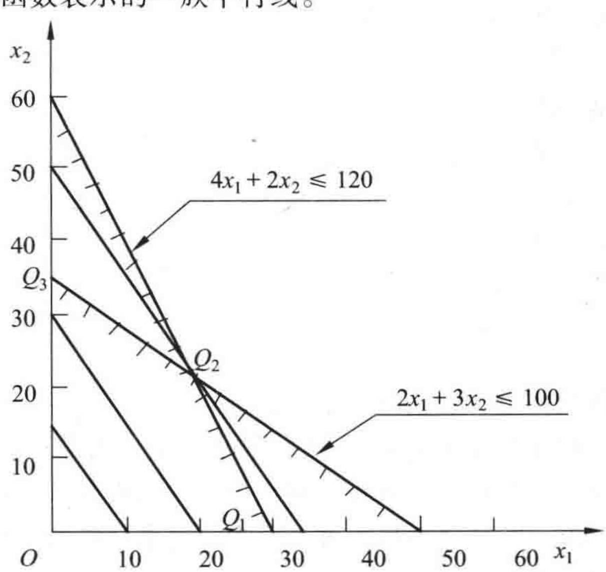


**图** 1.1

观察这族平行线移动时对应的 $Z$ 值变化可以看出，这族平行线愈向右上方移动，对应 $Z$ 值愈大。由于平行线族在 $Q_2$ 点脱离可行域，所以例 1 在 $Q_2$ 点取得最优解。$Q_2$ 是 $2x_1+3x_2=100$ 和 $4x_1+2x_2=120$ 的交点，解方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=100\\4x_1+2x_2=120\end{cases}$$

得 $x_1=20$，$x_2=20$

因此例 1 的解是：生产Ⅰ型、Ⅱ型交通设备分别为 20 台，能得到最大利润为 200 单位。

2）总结

1. 从图解法可以看出，在一般情况下，有

（1）具有两个变量的线性规划问题的可行域是凸多边形。

（2）若线性规划存在最优解，它一定在可行域的某个顶点取得。

2. 上例中得到问题的最优解是唯一的，但是线性规划问题的解还可能出现以下几种情况：

（1）无穷多个最优解。若例 1 的目标函数变为 $\max Z=4x_1+2x_2$，则当目标函数对应的一族平行线向右上方移动时，$Z$ 值不断增大，最终脱离可行域时将与边界 $Q_1Q_2$ 重合，所以线段 $Q_1Q_2$ 上所有点都使目标函数取得最大值，这时问题具有无数多个最优解（见图 1.2）。

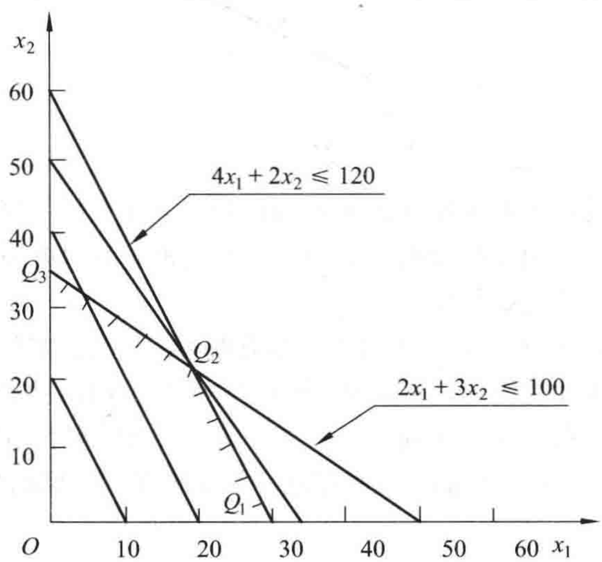


图 1.2

（2）无可行解。如果约束中存在相互矛盾的约束条件，则导致可行域是空集，此时问题无可行解（见图 1.3）。

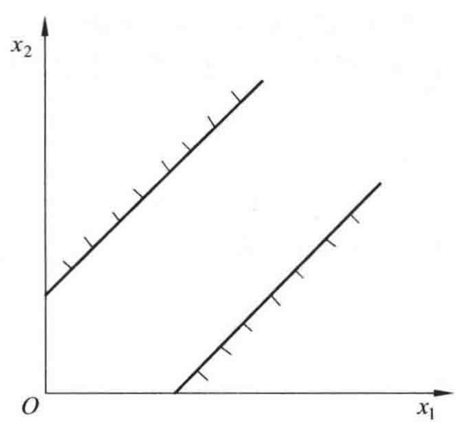


图 1.3

（3）无有限最优解。对下述线性规划问题

$$\max Z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解结果如图 1.4 所示，从图中可以看出可行域无界，而且在可行域中找不到最大值点，目标函数值可以增大到无穷大，称这种情况为无有限最优解或无界解。

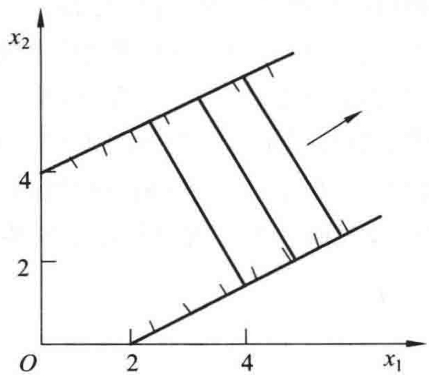


图 1.4

从以上图解法可知线性规划的解可能有 4 种情况，其中有唯一最优解和多个最优解是常见的情况。无可行解往往是由于模型的约束中存在相互矛盾的约束条件造成的，而无有限最优解往往是由于缺少必要的约束条件。

用图解法只能求解含有 2 个变量的问题，作为算法，它没有实际价值。但是利用图解法我们可以直观地了解到线性规划的几种情况，更重要的是在一般情况下，可行域是凸多边形，最优解可以在凸多边形有限个顶点中间取得。这一结论将搜索最优解的范围从可行域中的无穷多个点缩小到有限的几个点。我们后面将把这一结论推广到一般的多维线性规划上。

## 1.2　线性规划问题的标准型与解的概念

### 1.2.1　线性规划标准型

线性规划的数学模型中，目标函数既可以是求最大值，又可以是求最小值，约束条件既可以是不等式，又可以是等式，这种多样性给讨论线性规划的解法带来诸多不便。为此我们规定线性规划标准型如下：

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1a}x_a = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2a}x_a = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ma}x_a = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_a \geq 0 \end{cases}$$

通常我们称 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为价值系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为资源系数，$a_{ij}$ 为技术系数或约

束系数，在模型中它们是常数。

注：1. 若记

$$x=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}},\ c=(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)$$

$$b=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_m)^{\mathrm{T}},\ A=(P_1\ P_2\ \cdots\ P_n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则标准型亦可记作

$$\max Z=cx$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax=b \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

或

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}p_j x_j=b \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

2. 任何形式的线性规划都可以变为与其等价的标准形式。

（1）如果目标函数为 $\min Z=cx$，则可令 $\overline{Z}=-Z$，将目标函数变为 $\max\overline{Z}=-cx$。

（2）如果某约束为不等式形式，例如

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

则在约束的左端加一个非负变量 $x_{n+i}$，即可将约束变为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i$$

其中，这个非负变量 $x_{n+i}$ 称为松弛变量。

同理，如果约束为"$\geqslant b_i$"形式，则可在约束的左端减一个非负变量 $x_{n+i}$，而将约束变为等式。称 $x_{n+i}$ 为剩余变量。

（3）如果 $x_j$ 没有非负限制，则可令 $x_j=x_j'-x_j''$，其中 $x_j',x_j''\geqslant 0$，代入目标及约束中。

3）例子

**例 3**　将下面线性规划化为标准型

$$\max Z=3x_1-x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 1 \\ x_1-x_2\geqslant -1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\text{无约束} \end{cases}$$

**解**　令　$\overline{Z}=-Z,\ x_2=x_2'-x_2''$

则其标准型如下：

$$\max Z=-3x_1+x_2'-x_2''$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2'-x_2''+x_3=1\\x_1-(x_2'-x_2'')-x_4=-1\\x_1,x_2',x_2'',x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

### 1.2.2 线性规划解的概念

为了帮助我们分析线性规划求解过程，先介绍线性规划解的概念。

$$\max Z=cx \tag{1.1}$$
$$(L)\begin{cases}Ax=b & (1.2)\\x\geqslant 0 & (1.3)\end{cases}$$

对于问题（$L$）我们有如下概念：

**可行解**：满足（1.2）（1.3）的解。

**可行域**：可行解的集合，一般记作 $D=\{X\,|\,Ax=b,\ x\geqslant 0\}$。

**最优解**：满足（1.1）的可行解。

**基**：设 $A$ 是 $m\times n$ 阶系数矩阵 $(m\leqslant n)$，秩（$A$）$=m$。

$A=(P_1\quad P_2\quad\cdots\quad P_n)$，则 $A$ 中一定存在 $m$ 个线性无关的列向量，称由 $m$ 个线性无关的列向量构成的可逆矩阵 $(P_{j1}\quad P_{j2}\quad\cdots\quad P_{jm})=B$ 为问题（$L$）的一个基，称与 $B$ 中的列向量对应的变量 $x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jm}$ 为基变量，其余变量称为非基变量。

**基本解**：记基变量为 $x_B=(x_{j1}\quad x_{j2}\quad\cdots\quad x_{jm})^{\mathrm T}$，称满足方程组 $Bx_B=b$ 的解：$x_B=B^{-1}b$，其余 $x_i$ 为（$L$）的一个基本解。

**基可行解**：若 $B$ 对应的基本解 $x_B=B^{-1}b\geqslant 0$，则称该解为基可行解，称 $B$ 为可行基。容易验证基可行解一定是可行解，我们后面将指出基可行解是可行域中特殊的解。

**例 4** 求出下面线性规划的所有基本解，并指出哪些是基可行解。

$$\max Z=2x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2\leqslant 15\\6x_1+2x_2\leqslant 24\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

**解** 线性规划标准化，得

$$\max Z=2x_1+x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3=15\\6x_1+2x_2+x_4=24\\x_1,\cdots,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&5&1&0\\6&2&0&1\end{pmatrix}$，秩（$A$）=2。