中南大学开放式精品示范课堂建设计划教材

注册 导学 练习 答疑

线上线下立体化教材

线性代数

◎主编 刘碧玉

◎编者 杨文胜 刘 诚 张 齐

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

中南大学开放式精品示范课堂建设计划教材

注册 导学 练习 答疑

线上线下立体化教材

线性代数

◎主编 刘碧玉

◎编者 杨文胜 刘诚 张齐

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目（C I P）数据

线性代数 / 刘碧玉主编. --长沙：中南大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-5487-3153-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 025317 号

线性代数

XIANXING DAISHU

刘碧玉　主编

□责任编辑　谢贵良
□责任印制　易红卫
□出版发行　中南大学出版社
　　　　　　社址：长沙市麓山南路　　　　邮编：410083
　　　　　　发行科电话：0731-88876770　传真：0731-88710482
□印　　装　长沙市宏发印刷有限公司

□开　　本　787×1092　1/16　□印张 12.75　□字数 320 千字
□版　　次　2018 年 1 月第 1 版　□2018 年 1 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-5487-3153-5
□定　　价　35.00 元

前言

《线性代数》是讨论有限维空间的线性理论的课程，由于线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域，且某些非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题来处理，因此线性代数知识应用非常广泛。本教材是在中南大学数学与统计学院组织编写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《线性代数》(第三版)的基础上，针对近几年来开展的“开放式精品示范课堂建设计划”的教学改革与实践，在保持原有教材的内容体系和编写风格的基础上，以线性代数作为独立内容重新编写而成的，并对线性代数的传统内容进行了重新处理。本教材的主要特点是适当引入了一些实际案例分析，意在培养学生运用线性代数知识去分析问题与解决问题的能力，体现线性代数的实际应用价值。另外，还引入了一些 Matlab 实验，以培养学生运用现代技术解决经典数学问题的能力。

本书主要内容包括矩阵及其运算、行列式及其计算、矩阵的逆、Gramer 法则、矩阵运算的实际案例分析、矩阵运算的 Matlab 实验，矩阵的初等变换与初等矩阵、向量的线性相关性、向量空间、向量的线性相关性的实际案例分析、向量的线性相关性的 Matlab 实验，线性方程组的相容性、齐次线性方程组、非齐次线性方程组、线性方程组实际案例分析、求解线性方程组的 Matlab 实验、方阵的特征值与特征向量、矩阵的相似对角化、实对称矩阵的正交相似对角化、二次型及其标准型、正定矩阵与正定二次型、相似对角化与二次型标准化的实际应用案例分析、相似对角化的 Matlab 实验，线性空间的基本理论等。本教材理论叙述详细，例题丰富，便于读者学习与阅读，每章末提供了足够的习题可供读者参考练习。

第 1 章及其每章的实际应用案例与 Matlab 实验由刘碧玉编写，第 2 章由张齐编写，第 3 章由刘诚编写，第 4 章由杨文胜编写，第 5 章由甘四清编写。全书的统稿与定稿由主编刘碧玉教授负责，刘伟俊教授负责本书的主审。本书的讨论与编写还得到了中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心的教师张鸿雁、任叶庆、秦宣云、唐美兰、肖莉、张力、裘亚峥、陈雪生、李小爱、刘旺梅、李军

英、李英、张美媛、李飞宇、刘建华、彭丽华、杨淑平、张佃中、张阳春等大力支持与参入，衷心地感谢各位老师。感谢中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心的老师的大力支持与建议，感谢中南大学开放式精品示范课堂建设计划以及本科生院的资助。

我们在封四上附有注册码，学生在老师的指导下在大学数学导学与练习网络平台上注册，填写姓名、学号、专业班级、任课老师等信息。在该平台上有供学生预习的导学练习题，以及师生交流互动社区。学生可在此平台上提交作业、与老师交流，做到线上线下互动。在平台上不定期上传一些练习答案、数学文化知识以及数学模型实例，拓展学生数学知识及其应用技能。

由于编者水平有限，教材中难免存在不妥之处，恳请专家、同行及读者批评指正。

编　者

2017 年 12 月

目　录

第 1 章 矩阵与行列式

线性代数的主要内容就是研究多元的一次方程组与一次函数组. 一次方程组也称为线性方程组，常数项为 0 的多元一次函数 $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ 称为线性函数，m 个 n 元线性函数组成的函数组

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称为线性变换. 线性代数的两大主题就是多元线性方程组与线性变换. 线性方程组与线性变换可以由方程组或函数组中的系数排成矩阵来表示. 通过本章的矩阵运算可以方便地解决方程组的求解问题和相关的应用问题. 矩阵运算中最重要最基本的是矩阵的初等变换和矩阵的乘法这两个算法. 用这两个算法为两大主题服务，是线性代数课程的基本任务.

本章主要介绍矩阵的概念、性质及运算，行列式的概念、性质及计算问题，为线性代数后续的内容提供必要的基础.

1.1 矩阵及其运算

1.1.1 多元线性方程组与线性变换

中学里同学们学习过二元一次方程组的解法，但在科学研究和实际问题中经常需要解更多未知数的一次方程组. 一般地，n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的如下形式的方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

称之为 n 元一次方程，也称之为 n 元线性方程，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ 是已知的常数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一次项系数，b 是常数项. 具有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的若干个一次方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

称之为 n 元一次方程组，也称之为 n 元线性方程组，其中 a_{ij} 是第 i 个方程的第 j 个未知数的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项，$i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$, 当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为 0 时，线性方程组(1.1) 称为 n 元非齐次线性方程组，当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为 0 时，式(1.1) 成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

称为 n 元齐次线性方程组.

n 元线性方程组往往简称为线性方程组或方程组.

注 在线性方程组中，并不要求方程的个数 m 等于未知数的个数 n，$m>n$，$m=n$，$m<n$ 等三种情况都允许. $m=1$ 的情形也允许. 也就是说，一个线性方程也可以组成线性方程组.

在许多实际问题中，常常还会遇到一个变量用另一些变量线性地表示，例如，变量 y 可用变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 线性表示为：$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. 实际上就是常数项为0的多元一次函数，也称为线性函数. m 个 n 元线性函数组成的函数组

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.3}$$

称为线性变换，其中 a_{ij} 为常数($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$).

线性方程组(1.1) 中未知数的 $m\times n$ 个系数 a_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$) 和右边的常数项 b_i，$i=1,2,\cdots,m$ 所组成的 m 行 $n+1$ 列的矩形数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$

这里，横排称为行，竖排称为列；类似齐次线性方程组(1.2) 的未知数的 $m\times n$ 个系数 a_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$) 也可构成 m 行 n 列的矩形数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

线性方程组的求解问题实际上完全取决于上述矩形数表.

线性变换(1.3) 式中的系数也可以排成一个类似于上面的 m 行 n 列的矩形数表，这种形式的矩形数表称为矩阵，且通过引进矩阵的运算之后，线性方程组与线性变换可以用矩阵的形式非常简单地表示. 由此便引入了矩阵的概念.

1.1.2 矩阵的定义

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$) 排成的 m 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵．为表示它是一个整体，总是加一个括弧，并用大写黑体字母表示它，记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这 $m \times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素．以数 a_{ij} 为元素的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，这里，下标 i 指行序号，下标 j 指列序号．矩阵通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示，$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵，除特别说明外，本书涉及的矩阵均指实矩阵.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$ 称为行矩阵，又称行向量．为避免元素之间的混淆，行矩阵也记作 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$．只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为列矩阵，又称列向量.

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵．n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{n \times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_n$.

例如：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 是 3 阶方阵，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是列向量，$(-1, 2, -4, 0)$ 是行向量.

对于方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

而言，元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 组成主对角线，而元素 a_{n1}，$a_{(n-1)2}$，$\cdots$，a_{1n} 组成次对角线．除了主对角线元素以外，其他元素全为 0 的方阵，即形如

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

的方阵称为对角矩阵，简称对角阵. 对角阵也记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 如果 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，那么矩阵就称为纯量矩阵，当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时的纯量矩阵称为单位矩阵，简称单位阵. 记作

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} \text{或} \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

单位阵的特点是主对角线的元素全是1，其他元素全是0，即单位阵的元素

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

的方阵，分别称为上三角形矩阵与下三角形矩阵，简称上三角阵与下三角阵.

矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

称为阶梯形矩阵，其中数 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{rr}$ 中还有可能为0，确切地说，阶梯形矩阵的每行形成一级"阶梯"，满足下列两个条件：

(1) $\boldsymbol{A}$ 中若有零行(元素全为 0 的行)，那么该行以下的行(如果有的话)就全是零行；

(2) 非零行中首非 0 元(即非零行中左起第一个不为 0 的元素)的位置在上一行(如果有的话)的首非 0 元的右边，即非零行中首非 0 元的位置按行从上到下往右移动. 例如：

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 5 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵，而

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

均不是阶梯形矩阵.

在阶梯形矩阵中，若进一步满足 ① 非零行的首非零元均为1；② 首非零元1所在的列的其他元素均为0，这种阶梯形称为行最简阶梯形或最简阶梯形.

例如：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是行最简阶梯形，而$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$不是最简阶梯形.

若两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称它们是同型矩阵.

如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

元素都是0的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 注意不同型的零矩阵是不同的.

矩阵是一个具有广泛应用的概念，例如，对于非齐次方程组(1.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

有如下几个有用的矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为系数矩阵，$\boldsymbol{B}$ 称为增广矩阵，$\boldsymbol{x}$ 称为未知数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 称为常数项矩阵. 通过定义矩阵的运算之后，利用以上几个矩阵可以简单地将方程组(1.1) 用矩阵形式表示出来.

线性变换(1.3) 的系数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 也构成矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

给定线性变换(1.3)，它的系数所构成的矩阵(称为系数矩阵) 也就确定了. 反之，如果给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定. 在这个意义上，线性变换和矩阵之间存在着一一对应的关系. 由于矩阵和线性变换之间存在这种一一对应的关系，因此可以

利用矩阵来研究线性变换，也可以利用线性变换来解释矩阵的含义. 例如：线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

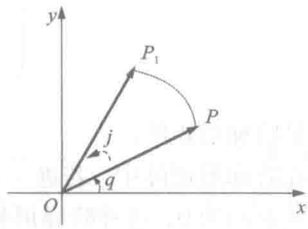

图 1.1

对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

把 xOy 平面的向量 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 变换为向量 $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，如图 1.1 所示，设 $\overrightarrow{OP}$ 的长度为 r，辐角为 θ，即设 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，那么

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta + \varphi)$$

$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta + \varphi)$$

表明 $\overrightarrow{OP_1}$ 的长度为 r，而辐角为 $\theta + \varphi$. 因此，这是把向量 $\overrightarrow{OP}$ 依逆时针方向旋转 φ 角(即把点 P 以原点为中心逆时针旋转 φ 角）的旋转变换.

许多实际问题可以用矩阵来描述，下面来看一些例子.

例 1.1 某厂向三个商店(编号 1，2，3）发送四种产品(编号 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）的数量可列成矩阵

$$\begin{array}{c} \text{产品} \\ \begin{array}{cc} \text{商店} & \begin{array}{cccc} \text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ} \end{array} \end{array} \\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

其中 a_{ij} 为工厂向第 i 家商店发放第 j 种产品的数量. 这四种产品的单价及单件质量也可列成矩阵

$$\begin{array}{c} \text{产品 \quad 单价 \quad 单件质量} \\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \\ \text{Ⅳ} \end{array} \end{array}$$

其中 b_{i1} 为第 i 种产品的单价，b_{i2} 为第 i 种产品的单件质量.

例 1.2 四个城市间的单向航线如图 1.2 所示：

若令 $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线} \\ 0, \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有意向航线} \end{cases}$

则图 1.2 可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

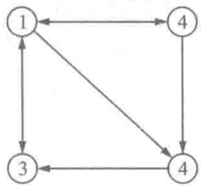

图 1.2

一般地，若干个点之间的单向通道都可用这样的矩阵表示.

1.1.3　矩阵的运算

1. 矩阵的加减法

定义 1.2　设有两个同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 $m \times n$ 零矩阵，则矩阵加法满足下列运算规律：

(ⅰ) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$；

(ⅱ) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$；

(ⅲ) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，记 $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})_{m\times n}$，则 $-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

(ⅳ) $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$.

由此，矩阵的减法定义为 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$.

2. 矩阵的数量乘法(数与矩阵的乘法)

定义 1.3　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定

$$\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda = (\lambda a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵，λ，μ 为数，则矩阵的数量乘法满足以下运算规律：

(ⅰ) $1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$，$(-1)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$，$0 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$；

(ⅱ) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(ⅲ) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$；

(ⅳ) $\lambda(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵加法与数乘矩阵统称为矩阵的线性运算.

例 1.3　设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2\times 2 - 1 & 2\times(-3) - 2 & 2\times 0 - 4 \\ 2\times 1 - 0 & 2\times 4 - 5 & 2\times 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. 矩阵乘法

矩阵乘法的规定来自于实际需要，先通过线性变换的一个例子来了解矩阵乘法是怎么引

入的. 设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

与

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

若要求出从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换, 可将式(1.5) 代入式(1.4), 经整理得

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

线性变换(1.6) 可看成是先作线性变换(1.5) 再作线性变换(1.4) 的结果. 在此把线性变换(1.6) 叫做线性变换(1.4) 与(1.5) 的乘积, 相应地把式(1.6) 对应的矩阵定义为式(1.4) 与式(1.5) 所对应的矩阵的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

一般地, 可定义两个矩阵的乘法如下:

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj},\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.7}$$

并将此乘积记作

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

按此定义, 一个 $1 \times s$ 行矩阵与一个 $s \times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵, 也就是一个数:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

这表明乘积矩阵 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应元素乘积之和.

注意只有当第一个矩阵(左矩阵) 的列数等于第二个矩阵(右矩阵) 的行数时, 两个矩阵才能相乘.

例 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$, 求乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 2×3 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘, 其乘积 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ 是一个 2×3 矩阵, 按定义 1.4 有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 2 & 1 \times 3 + 3 \times (-9) \\ -3 \times (-1) + 4 \times 1 & -3 \times 0 + 4 \times 2 & -3 \times 3 + 4 \times (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -24 \\ 7 & 8 & -45 \end{pmatrix}$$

例 1.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -5 & -8\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -5 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

在例 1.4 中，$\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 2×3 矩阵，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，而 $\boldsymbol{BA}$ 却没有意义，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不能相乘. 由此可知，在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序. $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，$\boldsymbol{BA}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，$\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 可能没有意义. 又若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶方阵，当 $m\neq n$ 时 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即使 $m=n$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，如例 1.5，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 2 阶方阵，从而 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也都是 2 阶方阵，但 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，总之，矩阵的乘法不满足交换律. 即在一般的情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 而且例 1.5 中的两个非零矩阵的乘积 $\boldsymbol{BA}$ 变成了零矩阵，即不能由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，且例 1.5 中的 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 而 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$，这表明矩阵的乘法不满足消去律，这些都是矩阵乘法与数的乘法不同的地方.

矩阵的乘法虽不满足交换律，但仍满足下列结合律和分配律（假设运算都是可行的）：

（ⅰ）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（ⅱ）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

（ⅲ）$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，其中 λ 是实数.

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\ \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$$

可简写成 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$，类似可得 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$.

这说明单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数 1.

矩阵的乘法有着多方面的应用.

例 1.6 在上面的例 1.1 中定义了两个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\text{产品}\\ \text{商店 I}\quad\text{II}\quad\text{III}\quad\text{IV}\\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ 1\\ 2\\ 3\end{array}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\text{产品}\quad\text{单价}\quad\text{单件质量}\\ \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\\ b_{41} & b_{42}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \text{I}\\ \text{II}\\ \text{III}\\ \text{IV}\end{array}$$

若记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，那么 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{3\times 2}$，其中，$c_{i1}=a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+a_{i3}b_{31}+a_{i4}b_{41}$ 是该厂向第 i 家商店所发产品的总价，$i=1, 2, 3$；$c_{i2}=a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+a_{i3}b_{32}+a_{i4}b_{42}$ 是该厂向第 i 家商店所发产品的总质量，$i=1, 2, 3$，因此可写成：