# 应用数学：理论、案例与模型

YINGYONG SHUXUE
LILUN ANLI YU MOXING

主　编　李建杰　傅建军
副主编　王　瑜　王佳新　班云飞

中国人民大学出版社

# 应用数学：理论、案例与模型

主　编　李建杰　傅建军
副主编　王　瑜　王佳新　班云飞

中国人民大学出版社
·北京·

**图书在版编目（CIP）数据**

应用数学：理论、案例与模型/李建杰，傅建军主编. —北京：中国人民大学出版社，2017.7
ISBN 978-7-300-23403-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①李…②傅… Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 228468 号

**应用数学：理论、案例与模型**
主　编　李建杰　傅建军
副主编　王　瑜　王佳新　班云飞
Yingyong Shuxue：Lilun Anli yu Moxing

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街 31 号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010－62511242（总编室） | | 010－62511770（质管部） |
| | 010－82501766（邮购部） | | 010－62514148（门市部） |
| | 010－62515195（发行公司） | | 010－62515275（盗版举报） |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.ttrnet.com（人大教研网） | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京东君印刷有限公司 | | |
| **规　　格** | 185 mm×260 mm　16 开本 | **版　　次** | 2017 年 7 月第 1 版 |
| **印　　张** | 12.5 | **印　　次** | 2017 年 7 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 288 000 | **定　　价** | 35.00 元 |

# 前　　言

高等数学是很多专业开设的公共课程，其教学目的不仅仅是要求学生掌握数学基本理论、基本方法和基本计算，更重要的是培养学生运用所学知识解决实际问题的能力，从而解决学有所用、学有成效的问题，达到高技能型人才培养目标的要求. 因此，寻求科学的、可操作的数学与专业课结合的切入点，为数学课程教学模式的创新提供依据和路径，就成为我们编写本书的主旨.

本书以高等数学在社会生产生活中的实际运用为背景，在剖析案例的过程中融入数学知识，赋予枯燥的数学公式与模型以生命力，调动受教者自主学习、多元思考的积极性与创造精神. 本书由 5 个教学模块、84 个案例、1 个教学软件构成，知识面广，涉及多个领域，能够为高等数学的教授者掌握具体应用案例提供帮助，使教授者轻松地将这些具体案例运用于课堂教学中，在具体事物的描述中向学生传授高等数学知识，潜移默化地提高学生运用数学知识分析问题与解决问题的能力.

本书也可以作为学生的课外读物，用于提高学生对高等数学应用的认知，使学生学会用数学思维方法解决实际问题，提高学生的数学素养与逻辑分析能力.

本书编写特色与优势在于：

1. 案例编写原则：

(1) 选取学生熟悉、容易接触到的与生活及专业学习紧密相关的案例.

(2) 贯彻实效性与新鲜性原则，案例突出时代感，具有真实、生动、丰富、有效的情境设计安排.

(3) 有人文、技术、管理、对话、会面等情境介绍.

(4) 经典性与时尚性相结合，将经典案例与具有时尚色彩的案例结合起来，使两种案例相互取长补短，达到更优的效果.

(5) 文字简捷，问题线索清晰，对工作中的专业词汇有交代，有利于准确地理解案例.

2. 案例选取的途径：

(1) 从生活体验中发掘案例.

（2）从科学前沿、新闻事件中发掘案例.

（3）从专业课程及工作实践中派生具有专业课程背景及实际工作背景的案例.

3. 数学应用实践案例的设计：

（1）确保问题采集的真实性. 为了确保专业课程中的案例真正来源于实践，在分析问题时紧紧扣住两个环节：一是案例取材于何种职业岗位，源于什么工作任务，来自哪门专业课程中的哪项行动领域；二是从工作任务、工作原理、工作过程及要求出发，简化实际问题，给可能尚未接触专业的学生以相对简单的专业实践环境.

（2）展现数学解决问题的完整过程. 模拟数学建模的完整过程，从数学问题的提出、解决、应用及推广几个方面充分展现数学应用于实际问题的全过程，最后归纳总结出其中所用的数学知识和数学软件，既体现数学建模过程中的“用”，又体现高职数学教学中的“学”，使案例成为可以学用数学的真实环境.

4. 编写理念先进、模式创新：

真实、典型案例与课堂理论教学相结合，强化数学实践，符合高等数学教改发展趋势；突出实用，引导就业，案例内容与未来工作岗位密切相关，为学生就业工作奠定基础；设计独特，创设真实的工作情景，提高学生的学习兴趣；定位明确，服务教学，供高职院校各专业使用.

5. 以学生为中心，力求实现教、学、做一体化：

本书按照“项目教学法”模式编写，以学生的实际应用过程为导向，以能力培养为目标，以实际问题为载体，以学生为中心，力求实现教、学、做一体化.

6. 注重数学建模思想和方法的融会贯通：

通过应用案例介绍数学建模过程，从而引入数学概念或找到解决问题的知识点，同时引入数学软件，培养学生用数学知识解决实际问题的意识和能力. 期望学生能学以致用，温故知新，提高兴趣，潜移默化地提升数学应用能力.

本书在编写过程中得到了北京市职业院校数学师资基地李亚杰、刘静两位主任的大力支持. 北京电子科技职业学院教师李建杰、王瑜、王佳新、王建荣、刘博夫、王楠、闫林静，北方交通运输职业学院教师林宏、聂弢、王志英、班云飞、宿昱、文秋丽、唐晓玲参与了本书的编写，特此表示感谢.

由于编者的水平有限，时间仓促，书中不足之处，敬请读者提出宝贵意见.

# 目　录

# 第一章 函数

# 工薪人员的收入纳税问题

| 案例编号 | 1—01 | 作者 | 傅建军 |
|---|---|---|---|
| 适用专业 | 各类专业 | 知识点 | 分段函数 |

## 案例原型

### 一、工作任务

每一位在职职工，在领取自己的劳动工资时，常常想看看工资单上关于税收部分是多少？为什么这样收取？国家工资税收规定具体有哪些？

### 二、工作原理

带着这样的问题，我们将实际工资收入纳入国家税收系统——实际上是一个分段函数，解答了以上的问题，体现了数学的应用性.

### 三、工作过程及要求

财务处将职工的工资纳入国家税收——北京市地方税收系统，按照职工的收入分段计算实际收入与纳税额度，最后得到这个月这位职工的实际收入（工资总收入一实际纳税）.

## 案例解答

### 一、数学问题提出

《中华人民共和国个人所得税法》规定：个人工资、薪金所得应纳个人所得税. 应纳税所得额的计算为：工资、薪金所得，以每月收入额减除费用 3 500 元后的余额，为应纳税所得额. 工资、薪金所得适用的个人所得税税率表如表 1－1 所示.

表 1－1　　个人所得税税率表（工资、薪金所得适用）

| 级数 | 全月应纳税所得额 | 税率 | 速算扣除数 |
|---|---|---|---|
| 1 | 收入≤3 500 元 | 0 | 0 |
| 2 | 3 500 元＜收入≤5 000 元 | 3% | 0 |
| 3 | 5 000 元＜收入≤8 000 元 | 10% | 105 |
| 4 | 8 000 元＜收入≤12 500 元 | 20% | 555 |
| 5 | 12 500 元＜收入≤38 500 元 | 25% | 1 005 |
| 6 | 38 500 元＜收入≤58 500 元 | 30% | 2 755 |
| 7 | 58 500 元＜收入≤83 500 元 | 35% | 5 505 |
| 8 | 收入＞83 500 元 | 45% | 13 305 |

（1）若某人的月工资、薪金所得额为 $x$ 元，请列出他应缴纳的税款 $y$ 与其工资、薪金所得 $x$ 之间的函数关系. （2）某人 2013 年 6 月总收入为 7 500 元，试计算此人这个月

应缴纳个人所得税是多少元.（3）若某人 2013 年 7 月总收入为 10 500 元，请用分段函数求值的方法和速算的方法计算此人这个月应缴纳个人所得税是多少元，并比较两种算法哪种更为简便呢?

**二、数学问题解决**

1. 问题分析及模型建立

依据个人所得税税率表（工资、薪金所得适用），以每月收入额减除费用 3 500 元后的余额，为应纳税所得额.

2. 问题求解

通过建立函数关系的方法，建立分段函数。根据应纳税所得额，选择分段函数中对应的函数关系式进行计算，得到函数值，即为纳税额.

（1）按税法规定，当收入 $x\leqslant 3\,500$ 元时，不必纳税，∴这时 $y=0$.

当 3 500 元$<x\leqslant 5\,000$ 元时，纳税部分是 $x-3\,500$，税率为 3%，∴$y=(x-3\,500)\times\frac{3}{100}$.

当 $5\,000<x\leqslant 8\,000$ 时，其中 3 500 元不纳税，1 500 应纳 3%的税，即 $1\,500\times\frac{3}{100}=45$（元），再多的部分，即 $x-5\,000$ 按 10%纳税. ∴他应纳税款 $y=45+(x-5\,000)\times\frac{10}{100}$.

依次可列出下面的函数关系（其中收入为 $x$ 元，应纳税额为 $y$ 元）：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 3\,500,\\(x-3\,500)\times 3\%, & 3\,500<x\leqslant 5\,000,\\45+(x-5\,000)\times 10\%, & 5\,000<x\leqslant 8\,000,\\45+300+(x-8\,000)\times 20\%, & 8\,000<x\leqslant 12\,500,\\345+750+(x-12\,500)\times 25\%, & 12\,500<x\leqslant 38\,500,\\1\,095+6\,500+(x-38\,500)\times 30\%, & 38\,500<x\leqslant 58\,500,\\7\,595+6\,000+(x-58\,500)\times 35\%, & 58\,500<x\leqslant 83\,500,\\13\,595+8\,750+(x-83\,500)\times 45\%, & x>83\,500.\end{cases}$$

（2）此人应纳税款为 $45+(7\,500-5\,000)\times 10\%=295$（元）.

（3）分段函数求值法计算此人应纳税款为

$$45+300+(10\,500-8\,000)\times 20\%=845(\text{元}).$$

速算法计算此人应纳税款为：

$$(10\,500-3\,500)\times 20\%-555=845(\text{元}).$$

比较两种算法，速算算法更为简便.

注：财务上为计算方便，采用简便的方法：视某人月实际收入所在的档次减去 3 500 之后乘以本档次的税率，再减去速算扣除数就是该人本月实际应缴纳的税.

即：个人所得税＝应缴纳税的所得额×税率－速算扣除数.

设应纳税所得额为 $x$ 元，应纳税额为 $y$ 元，则：

$$y=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 3\,500,\\ x\cdot 3\%, & 3\,500<x\leqslant 5\,000,\\ x\cdot 10\%-105, & 5\,000<x\leqslant 8\,000,\\ x\cdot 20\%-555, & 8\,000<x\leqslant 12\,500,\\ x\cdot 25\%-1\,005, & 12\,500<x\leqslant 38\,500,\\ x\cdot 30\%-2\,755, & 38\,500<x\leqslant 58\,500,\\ x\cdot 35\%-5\,505, & 58\,500<x\leqslant 83\,500,\\ x\cdot 45\%-13\,305, & x>83\,500.\end{cases}$$

**三、应用于实际问题及推广**

1. 结果应用

广泛应用于职工收入.

2. 应用推广

可以通过税收，查验出自己的工资总收入.

**四、案例涉及数学知识点**

1. 知识点一

列出分段函数解析式.

2. 知识点二

计算分段函数的函数值。

## 曲柄连杆滑块的运动规律

| 案例编号 | 1—02 | 作者 | 傅建军 |
|---|---|---|---|
| 适用专业 | 制造类（工科）、汽车类 | 知识点 | 曲柄连杆机构的函数关系 |

### 案例原型

**一、工作任务**

曲柄连杆机构主动轮转动时，连杆带动滑块作往复直线运动，滑块的运动规律是什么？列出滑块速度的表达式.

**二、工作原理**

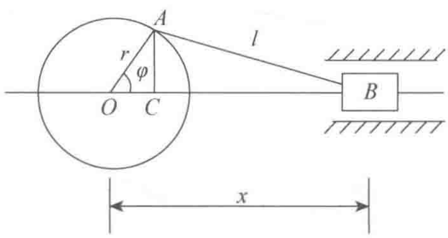


图 1-1 滑块 $B$ 作往复直线运动

**三、工作过程及要求**

连杆在等长的情况下，定点 $A$ 在圆周上运动，观察滑块 $B$ 的运动规律. 要求：$AB$ 定长，滑块 $B$ 作直线运动.

## 案例解答

**一、数学问题提出**

曲柄连杆机构主动轮转动时，连杆带动滑块 $B$ 作往复直线运动. 设曲柄 $OA$ 的长为 $r$，连杆 $AB$ 的长为 $l$，旋转的角速度是 $\omega$，开始时，曲柄 $OA$ 与 $OB$ 重合. 求滑块的运动规律，并求滑块速度的表达式.

**二、数学问题解决**

解法一：设经过 $t$ 秒主动轮转过的角度为 $\varphi$（弧度），此时滑块 $B$ 离 $O$ 点的距离为 $x$. 过点 $A$ 作 $AC\perp OB$，交 $OB$ 于点 $C$，则 $OC=r\cos\varphi$，$AC=r\sin\varphi$，

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

于是 $x=OC+BC=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}$.

因为 $\omega$ 是角速度，$\varphi=\omega t$，所以滑块 $B$ 的运动规律是

$$x=OC+BC=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},\ t\in[0,+\infty).$$

解法二：在$\triangle OAB$ 中直接利用正弦定理，得

$$\frac{l}{\sin\varphi}=\frac{r}{\sin B}=\frac{x}{\sin[\pi-(\varphi+B)]}.$$

从而 $\sin B=\frac{r}{l}\sin\varphi$，

$$\begin{aligned}x&=\frac{l}{\sin\varphi}\sin(\varphi+B)\\&=\frac{l}{\sin\varphi}[\sin\varphi\cos B+\cos\varphi\sin B]\\&=\frac{l}{\sin\varphi}\left[\sin\varphi\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}+\cos\varphi\,\frac{r}{l}\sin\varphi\right]\\&=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}+r\cos\varphi\\&=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}+r\cos\omega t.\end{aligned}$$

由导数的物理意义可知，函数一阶导数的物理意义是物体的速度.

$$x'=-\frac{2r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{2\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}+r(-\sin\omega t)\omega$$
$$=-\frac{r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}}-r\omega\sin\omega t.$$

例如“492”发动机中，曲柄连杆机构主动轮半径为 46mm，连杆长度为 165mm，问当 $\omega=\frac{\pi}{6}$ 弧度/秒、$t=2$ 秒时，活塞的速度是多少？

$$\nu\Big|_{\substack{\omega=\frac{\pi}{6}\\ t=2}}=-\frac{r^2\times\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sqrt{l^2-r^2\times\sin^2\frac{\pi}{3}}}-\frac{\pi}{6}\times r\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}\pi r^2}{24\sqrt{l^2-\frac{3}{4}r^2}}-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi r.$$
$$\nu\Big|_{\substack{r=46\\ l=165}}=-\frac{\sqrt{3}\times 46^2\times\pi}{24\sqrt{165^2-\frac{3}{4}\times 46^2}}-\frac{\sqrt{3}}{12}\times 46\times\pi\approx-39.1(\mathrm{mm/s}).$$

注：“492”发动机的编号含义为：4 表示 4 个缸，92 表示缸径是 92mm.

**三、应用于实际问题及推广**

1. 结果应用

在汽车维修车间对于各种类型的车辆的曲柄连杆配件列出函数关系式.

2. 应用推广

可以对任何曲柄连杆设备建立函数关系，以及应用导数的物理意义计算瞬时速度.

**四、案例涉及数学知识点**

1. 知识点一

变量与变量的关系，函数关系.

2. 知识点二

导数的物理意义的应用.

# 营销策略问题

| 案例编号 | 1—03 | 作者 | 傅建军 |
|---|---|---|---|
| 适用专业 | 经济管理类专业 | 知识点 | 函数 |

## 案例原型

**一、工作任务**

某品牌的家庭用多功能食物粉碎机每台售价 900 元，成本为 600 元. 厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低一角（例如某商场订购了 300 台，订购量比 100 台多 200 台，于是每台就降价 $0.1\times200=20$ 元，该商场可以按 880 元/台的价格购进 300 台），但最低价为 750 元/台. 当一商场订购了 1 000 台时，厂家可获利润多少？

**二、工作原理**

这是一个商家的营销方案问题. 可以将其转变为建立函数关系，求出相应的函数值的问题.

**三、工作过程及要求**

1. 每台利润 $P$ 是实际售价 $p$ 与成本之差：$P=(p-600)\cdot x$.
2. 建立分段函数关系.
3. 求出相应的函数值.

## 案例解答

**一、数学问题提出**

(1) 用每台的实际售价 $p$ 表示为订购量 $x$ 的函数；

(2) 用利润 $P$ 表示为订购量 $x$ 的函数；

(3) 当一商场订购了 1 000 台时，厂家可获利润多少？

**二、数学问题解决**

1. 问题分析及模型建立

这是一个商家的营销方案问题.

首先建立分段函数关系式. 利润 $P$ 是实际售价 $p$ 与成本之差，求出相应的函数值.

2. 问题求解

(1) 当 $0<x\leqslant100$ 时，售价为 900 元/台.

现在计算订购量 $x$ 是多少台时售价降为 750 元/台.

$$900-750=150,\ 150\div0.1=1\,500$$

所以，当订购量超过 1 500+100 台时，每台售价为 750 元. 当订购量在 100～1 600 台之间时，售价为 $900-(x-100)\times0.1$，因而实际售价 $p$ 与订购量之间的函数关系为：

$$p=\begin{cases}900, & 0<x\leqslant 100,\\ 910-0.1x, & 100<x<1\,600,\\ 750, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$$

（2）每台利润 $P$ 是实际售价 $p$ 与成本之差，则 $P=(p-600)\cdot x$.

（3）由（1）先计算出 $p=910-0.1\times 1\,000=810$，再由（2）得知

$$P=(810-600)\times 1\,000=210\,000(\text{元}).$$

**三、应用于实际问题及推广**

1. 结果应用

厂家为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低一角，达到薄利多销，从而产生利润最大化.

2. 应用推广类问题

通过这样的营销策略，我们可以将此类问题进行社会化服务，触类旁通达到商品销售额的最大化.

**四、案例涉及数学知识点**

1. 知识点一

建立函数关系.

2. 知识点二

求出相应函数值.

# 钟表每天快多少

| 案例编号 | 1—04 | 作者 | 傅建军 |
|---|---|---|---|
| 适用专业 | 各类专业 | 知识点 | 函数的增量 |

## 案例原型

**一、工作任务**

在冬季，一只机械挂钟摆长缩短了 0.01 厘米，每天大约快多少？

**二、工作原理**

钟摆的周期为 1 秒，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$［单摆的周期公式，其中 $l$ 是摆长（单位：cm），g 是重力加速度］.

$$\Delta T\approx dT=\frac{\pi}{\sqrt{g\cdot\dfrac{g}{(2\pi)^2}}}.$$