偏微分方程基础

保继光 李海刚 编

高等教育出版社

偏微分方程基础

保继光　李海刚　编

PIANWEIFEN FANGCHENG JICHU

高等教育出版社·北京

内容提要

本书包含100多幅图片，图文并茂地讲述了偏微分方程的基本概念、发展历史、模型建立、研究方法；介绍了二阶、一阶方程定解问题的适定性和求解方法，其内容共由六章组成，包括偏微分方程的基本概念和史实、位势方程、热传导方程、波动方程、二阶线性方程的化简与分类、一阶方程。同时，本书设置了单独的章节，给出了n元微积分的预备知识、基本习题的完整答案，降低了初学者的学习难度；在各章的最后提供了拓展习题、阅读材料、中外著名参考文献，方便了学有余力读者的进一步提高。

本书可作为高等学校数学类专业本科生偏微分方程课程的教材，也可作为非数学类理工科本科生和研究生数学物理方程课程的教材，适合不同层次院校的学生学习，还可供自学者参考。

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程基础 / 保继光，李海刚编 . -- 北京：
高等教育出版社，2018.9
ISBN 978-7-04-050222-0

Ⅰ. ①偏… Ⅱ. ①保… ②李… Ⅲ. ①偏微分方程 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 169226 号

策划编辑 李冬莉　责任编辑 李冬莉　封面设计 张楠　版式设计 张楠　插图绘制 黄云燕　责任校对 王雨　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社　社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120　购书热线 010-58581118　咨询电话 400-810-0598
网址 http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn http://www.hepmall.com http://www.hepmall.cn

印刷 固安县铭成印刷有限公司　开本 787mm×1092mm 1/16　印张 15.25　字数 280千字
版次 2018年9月第1版　印次 2018年9月第1次印刷　定价 31.00元

物料号 50222-00

前言

偏微分方程起源于 18 世纪, 发展于 19 世纪, 兴盛于 20 世纪。从历史上看, 偏微分方程的重要源泉是物理学与几何学。上世纪末以来, 偏微分方程又在备受关注的生物数学、金融数学与图像处理等领域大量出现, 在很大程度上推动了科学、技术、工程、社会的进步。"佩雷尔曼证明庞加莱猜想" 和 "爱因斯坦预言引力波存在" 就是应用偏微分方程的著名例子。

偏微分方程是数学类专业本科生的基础课, 也可以是非数学类理工科专业本科生或研究生的选修课, 一般安排在大学三年级或硕士一年级开设。本教材是作者在北京师范大学多年教学的基础上完成的, 遵循 "下要保底、上不封顶" 的原则, 适应高校扩招后人才培养多样化的状况。一方面, 本书精选了偏微分方程理论中最基本的内容, 选材首先考虑是有 "意思", 然后是有 "意义", 避免过分地强调 "理论意义" 使读者失去兴趣。第一章不仅介绍基本概念和记号, 讲述偏微分方程的发展历史、模型建立、研究方法, 还涉及金融数学、图像处理、网络搜索等读者感兴趣的话题, 穿插 79 幅的相关图片, 力求引人入胜, 避免枯燥; 此外, 第二、三、六章中专门设置了附录, 给出了教材需要的 n 元微积分的知识。另一方面, "上不封顶" 体现在本书各章后面提供了拓展习题和阅读材料、附注及其具体的参考文献, 为学有余力的读者预留了进一步深入学习的空间。根据作者多年的教学经验, 64 学时可以讲完全书, 48 学时可以讲完前 4 章, 12 学时可以讲完相对独立的第一章。

虽然执笔写书是近几年的事, 但作者在学习和工作过程中数学知识的积累和学术品位的提高, 离不开张恭庆院士、朱汝金教授, 以及周美珂教授、刘嘉荃教授、黄海洋教授、郇中丹教授、蒋美跃教授、李岩岩教授等老师们的教育与影响, 借此成书机会对他们表示由衷的感谢。同时, 感谢数学科学学院的同事们和国内外偏微分方程的同行们, 与他们的讨论开阔了作者的思路, 柯媛媛、黄红、代丽美老师指出了初稿中的具体错误。感谢高等教育出版社的领导和编辑对本书写作的鼓励与支持。最后, 也要感谢作者的博士生王宠、徐龙娟, 硕士生赵鹏、何欣蔚、侯媛媛、李一梅、王芳、肖俐、龚书钰、周子威等同学, 他们帮助作者

录入了书稿, 给出了习题解答, 并提出了改进建议。

由于作者学识和水平有限, 本书一定还有许多需要完善的地方, 衷心希望读者批评指正, 电子邮件可发至 jgbao@bnu.edu.cn。

保继光

2017 年 4 月于北京师范大学

目录

第一章

偏微分方程的基本概念和史实

§1.1 偏微分方程的定义与实例

1. 方程概念的起源

在数学中, 方程可以简单地理解为含有未知量的等式.

中国人对方程的研究有着悠久的历史. 世界上最早的印刷本数学书、中国古代第一部数学专著《九章算术》(图 1.1) 成书于东汉初年 (约公元 1 世纪前后), 其 “卷第八” 的标题就是 “方程”, 它在历史上首次阐述了负数及其加减运算法则, 提出了求解线性方程组的新方法.

中国古典数学理论的奠基人之一、魏晋期间伟大的数学家刘徽 (约 225—295) (图 1.2) 在 263 年给《九章算术》作注时, 给出了方程的定义:

> **程, 课程也. 群物总杂, 各列有数, 总言其实, 令每行为率. 二物者再程, 三物者三程, 皆如物数程之. 并列为行, 故谓之方程.**

这里所谓的 “课程” 指的是按不同物品的数量关系列出的式子. “实” 就是式中的常数项. “令每行为率” 就是由一个条件写出一行式子. “如物数程之” 就是有几个未知数就必须列出几个等式. “方” 的本义是并, 将两条船并起来, 船头拴在一起, 谓之方. 故列出的一系列式子称 “方程”. 这里的方程实际上就是现在人们说的一次方程组.

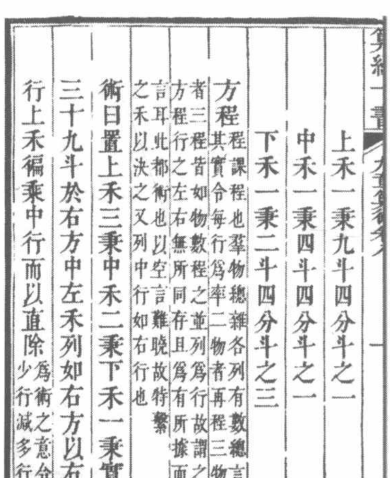
上禾一秉九斗四分斗之一
中禾一秉四斗四分斗之一
下禾一秉二斗四分斗之三
方程 程課程也羣物總雜各列有數總言其實令每行爲率二物者再程三物者三程皆如物數程之並列爲行故謂之方程行之左右無所同存且爲有所據而言耳此都術也以空言難曉故特繫之禾以決之又列中行如右行也
術曰置上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗於右方中左禾列如右方以右行上禾徧乘中行而以直除 爲術之意令少行減多行

图 1.1《九章算术》的相关内容

图 1.2 带有刘徽画像的邮票

1859 年中国近代数学的前驱、清代数学史上的杰出代表李善兰 (1811—1882 年 12 月 9 日) (图 1.3) 与亚历山大 (Alexander Wylie, 1815—1887, 英国) 合作翻译出版了《代微积拾级 (Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculas)》, 书中将英文单词 “Equation” 创译成 “方程” 一词.《代微积拾级》是在中国翻译出版的第一部微积分著作, 此后该书译出的大批中文数学名词被普遍接受并沿用至今.

等式中的符号 “=” 是英国科学教育家雷科德 (Robert Recorde, 1510—1558) 在 1557 年出版的一本书《砺智石 (The Whetstone of Witte)》中建议使用的 (图 1.4). 直到 17 世纪末, 等号 “=” 才逐渐通用起来.

图 1.3 李善兰

图 1.4 雷科德在《砺智石》中有关等号的叙述: “为了避免多次烦琐重复使用 ‘等于’ 这个词, 在日常工作中, 我规定用两条等长的平行线段来表示 ‘等于’, 因为没有两样东西能比两条平行的线段更平等了”. 第一次使用的方程是 “$14x + 15 = 71$”.

1591 年, 韦达 (Franciscus Vieta, 1540—1603, 法国) (图 1.5) 在《分析方法入门 (In artem analyticem isagoge)》中第一次有意识地、系统地使用代数字母与符号. 笛卡儿 (René Descartes, 1596—1650, 法国) 对其进行了改进, 建议用 a, b, c, $\cdots$ 表示已知数, 用 x, y, z, $\cdots$ 表示未知数. 这已成为今天的习惯.

图 1.5 韦达

2. 偏微分方程的定义

方程可以根据其中出现的未知数或未知函数及其运算加以分类.

代数方程是指由已知数与未知数通过有限次的加、减、乘、除和开方组成的方程, 包括整式方程、分式方程与根式方程. 整式方程也称作多项式方程, 可以依多项式的次数, 细分为一次方程、二次方程等. 分式方程是指分母中至少含有一个未知数的方程. 整式方程与分式方程统称为有理方程. 根式方程是指被开方式中至少含有一个未知数, 而根指数不含未知数的方程, 也称为无理方程. 有理方程与无理方程统称为代数方程. 超越方程是指包含指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等

超越函数的方程, 也称为非代数方程.

函数方程是指其中包含未知函数的方程. 微分方程是指其中包含未知函数及其导数 (或微分) 的函数方程. 如果一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量, 这个方程称为常微分方程, 也简称微分方程.

定义 1.1.1 含有多元未知函数及其偏导数的方程称为偏微分方程 (partial differential equation). 含有多元未知函数及其偏导数的方程组称为偏微分方程组 (partial differential system), 其未知函数可以不止一个.

另外, 积分方程是指其中包含未知函数积分的函数方程; 积分微分方程是指其中同时包含未知函数积分和导数 (或微分) 的函数方程.

莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716, 德国, 图 1.6) 在他创办的《教师学报 (Acta Eruditorum)》上于 1684 年发表第一篇微分学论文《一种求极大极小和切线的新方法 (Nova methodus pro maximis et minimis)》, 定义了微分概念, 采用了微分符号 d. 1686 年他又在同一杂志上发表了积分学论文《深奥的几何与不可分量和无限的分析》, 讨论了微分与积分, 使用了积分符号 $\int$ (图 1.7). 依据他的笔记, 早在 1675 年莱布尼茨就完成了一套完整的微分学. 莱布尼茨是微积分的发明者之一、拓扑学的提出者、二进制的主要发现者, 被誉为 "17 世纪的亚里士多德 (Aristotle, 公元前 384 年—公元前 322 年, 希腊)". 他是最早接触中华文化的欧洲人, 并发现八卦可以用他的二进制来解释.

图 1.6 莱布尼茨

图 1.7 邮票上的微分和积分的符号

3. 两个千禧年问题

千禧年问题 (millennium prize problems) 是由美国克雷数学研究所 (Clay Mathematics Institute, 图 1.8) 于 2000 年 5 月 24 日公布的七个数学难题. 根据

规则, 所有难题的解答必须发表在数学期刊上, 并经过各方验证, 只要通过两年验证期, 每道题的第一个解答者, 将会被颁发 100 万美元的奖金. 人们期望千禧年问题的破解能为密码学、航天、通信等领域带来突破性进展.

这些难题是呼应希尔伯特 (David Hilbert, 1862—1943, 德国) 的 23 个数学问题提出的. 希尔伯特 (图 1.9) 是 19 世纪和 20 世纪初最具影响力的数学家之一, 因为创立了大量的思想理论 (例: 不变量理论、公理化几何、希尔伯特空间) 而被尊为伟大的数学家、科学家. 他在 1900 年巴黎国际数学家大会上提出的 23 个问题为 20 世纪的数学研究指出了方向.

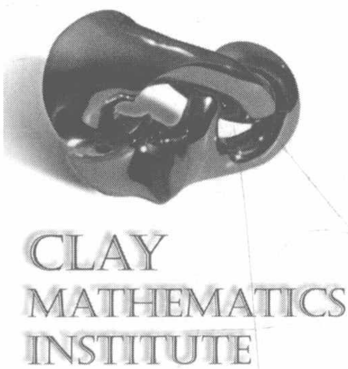

图 1.8 克雷数学研究所的所标

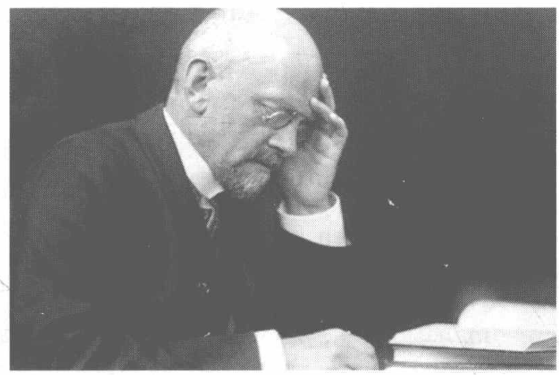

图 1.9 希尔伯特

下面介绍两个与偏微分方程有关的千禧年问题. 一个来自几何, 另一个来自物理.

庞加莱猜想

庞加莱 (Jules Henri Poincaré, 1854—1912) (图 1.10) 是法国最伟大的数学家之一、理论物理学家和科学哲学家, 被公认是 19 世纪后四分之一和 20 世纪初的领袖数学家, 是继历史上最重要的数学家之一高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855, 德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家) (图 1.11) 之后对数学及其应用具有全面知识的最后一人.

图 1.10 庞加莱

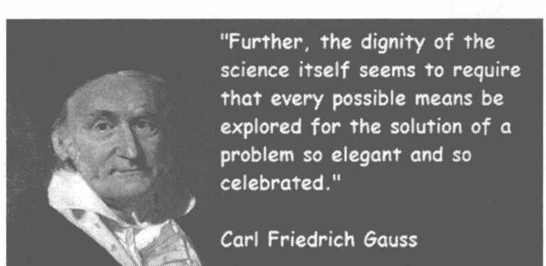

图 1.11 高斯

1904 年, 庞加莱提出猜想: 任何一个单连通的闭三维流形一定同胚于三维

球面, 即该流形与球面之间存在一一的连续映照 (图 1.12).

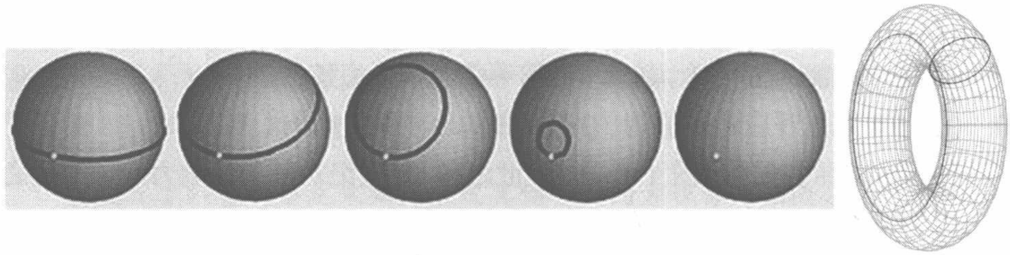

图 1.12 庞加莱猜想在二维情形的图示: 对一个二维闭曲面, 若它上面的每一个闭曲线都可以连续地收缩为一点, 则该曲面同胚于二维 (通常的) 球面. 作为对比, 右图中环面上两个圆周均无法连续地收缩成一点. 因此环面并不与球面同胚. 庞加莱猜想断言, 同样的结果适用于三维曲面.

百余年来, 数学家们为证明这一猜想付出了艰辛的努力. 数学家首先将庞加莱原来的猜想推广为: 任意维数的同伦等价于球面的闭流形同胚于球面. 1961 年斯梅尔 (Stephen Smale, 1930—, 美国) 绕过三维和四维的情形, 利用动力系统的方法证明了五维及五维以上的广义庞加莱猜想. 1982 年弗里德曼 (Michael Freedman, 1951—, 美国) 证明了四维广义庞加莱猜想, 仅留下庞加莱最初猜测的三维情形没有解决. 斯梅尔和弗里德曼分别获得了 1966 年和 1986 年的菲尔兹奖 (Fields Medal), 斯梅尔还获得了 2006 年的沃尔夫数学奖 (Wolf Prize, 世界最高成就奖之一).

佩雷尔曼 (Grigori Yakovlevich Perelman, 1966—, 俄罗斯) 在这个问题的研究中将分析、几何和拓扑的方法结合在一起, 以一种近乎 “疯狂” 的方式证明了庞加莱猜想, 给这个具有一百多年历史的著名数学问题画上了句号. 美国《科学》杂志 2006 年 12 月 21 日公布了该刊评选出的年度十大科学进展, 其中庞加莱猜想的解决名列榜首.

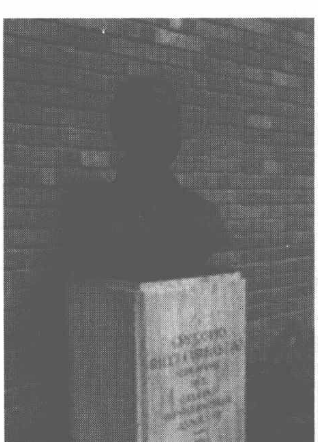

图 1.13 里奇的雕像

佩雷尔曼是一个神秘人物, 自从 2002 年 11 月在一个数学论文预印本网站上贴出《里奇流的熵公式及其几何应用 (The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application)》等 3 篇关于庞加莱猜想的关键论文之后, 就不再露面, 甚至拒领菲尔兹奖和千禧年大奖. 他很好地使用了 2011 年邵逸夫奖 (Shaw Prize, 被称为 “东方诺贝尔奖”) 得主哈密顿 (Richard Hamilton, 1943—, 美国) 引入的所谓的里奇 (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853—1925, 意大利) (图 1.13) 流方程. 实际上, 里奇流方程是一个比较复杂的偏微分方程组, 但它有一个非常简单的特例

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{e}^{2u}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big).$$

2006 年, 菲尔兹奖得主陶哲轩 (Terence Chi-Shen Tao, 1975—, 澳裔华人) 在预印本网站贴出了长达 42 页、题目为《从非线性偏微分方程看佩雷尔曼对庞加莱猜想的证明 (Perelman's proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective)》的论文.

菲尔兹奖 (图 1.14 和图 1.15) 的正式名称为国际杰出数学发现奖 (The International Medals for Outstanding Discoveries in Mathematics), 是一个在国际数学家大会上颁发的奖项. 20 世纪 20 年代末, 数学家、教育家菲尔兹 (John Charles Fields, 1863—1932, 加拿大) (图 1.16) 开始筹备这个奖项, 在遗嘱中捐出 47 000 美元给奖项基金. 1936 年首次颁发, 每 4 年评选 2~4 名年龄不超过 40 岁的有卓越贡献的数学家, 奖金是 15 000 加拿大元.

图 1.14 菲尔兹奖章正面: 阿基米德的浮雕头像

图 1.15 菲尔兹奖章背面: 背景为阿基米德的球体嵌进圆柱体定理

图 1.16 菲尔兹

纳维 – 斯托克斯方程 (Navier–Stokes equation)

因为地球被大气层包围, 而地球表面的三分之二又被水面覆盖, 所以人们自然非常关心流体 (包括气体和液体) 的运动. 纳维 – 斯托克斯方程就是描述流体物质运动规律的一组偏微分方程, 是黏性不可压缩流体动力学的基础, 可以用于模拟天气、洋流、管道中的水流、恒星的运动、潜艇附近的水流、机翼周围的气流等大量对学术和经济有用的现象的物理过程. 它被称为改变世界的 17 个方程之一, 1827 年由纳维 (Claude-Louis Navier, 1785—1836, 法国) 首先提出, 1845 年由斯托克斯 (Sir George Gabriel Stokes, 1819—1903, 英国) 加以完善 (图 1.17).

对于不可压缩流体, 其纳维 – 斯托克斯方程包括动量守恒公式

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}$$

和质量守恒公式 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 其中 $\boldsymbol{v}$ 是描述流体速度的三维向量. 第一个方程是牛顿 (Isaac Newton, 1643—1727, 英国) 第二定律 $F=ma$ 的一个变形; 第二个方程表示流体是不可压缩的.

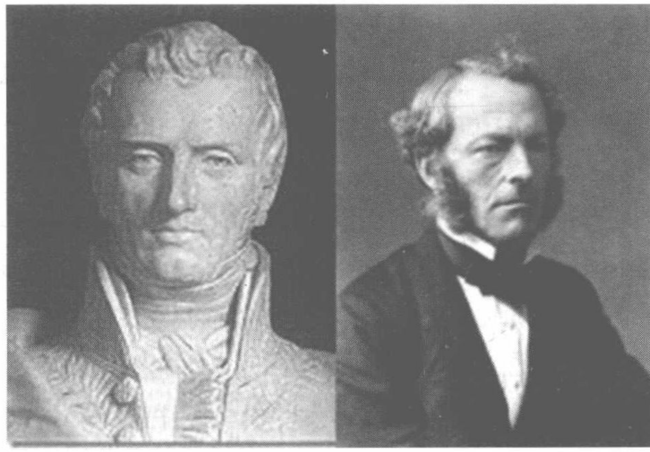

图 1.17 纳维与斯托克斯

从美国数学会网站可知, 纳维 – 斯托克斯方程的研究论文至今已超过 15 000 篇, 但许多基本性质都尚未被证明. 在千禧年问题中, 相关的数学问题是: 在三维空间中, 给定一个光滑的无散度的初值, 纳维 – 斯托克斯方程是否存在光滑的整体解? 1934 年, 勒雷 (Jean Leray, 1906—1998, 法国) (图 1.18) 证明了纳维 – 斯托克斯方程整体经典解的唯一性和弱解的存在性. 他获得了 1979 年的沃尔夫数学奖. 1969 年, 拉德仁斯卡娅 (Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya, 1922—2004, 苏联和俄罗斯) (图 1.19) 证明了二维纳维 – 斯托克斯方程整体经典解的存在性. 除了这两个结果外, 纳维 – 斯托克斯方程经典解的存在唯一性定理还没有本质的进展.

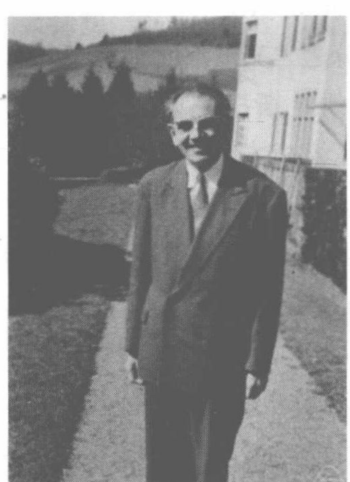

图 1.18 勒雷

图 1.19 拉德仁斯卡娅

1982 年, 卡法雷利 (Luis A. Caffarelli, 1948—, 阿根廷, 2012 年沃尔夫数学奖获得者), 科恩 (Robert V. Kohn, 1953—, 美国) 和尼伦伯格 (Louis Nirenberg,

1925—, 加拿大和美国; 2010 年首届陈省身奖获得者) 证明了纳维 – 斯托克斯方程弱解的部分正则性. 美国数学会评价说 “这大概是试图解决纳维 – 斯托克斯方程千禧年问题的所有已知结果中最好的结果”. 2014 年, 这篇论文获得了由美国数学会颁发的斯梯尔 (Leroy P. Steele) 开创性贡献论文奖.

能否建构一个理论模型来描述湍流 (图 1.20 和图 1.21) 的行为, 特别是它的内部结构? 这也是物理学九大未解之谜之一. 纳维 – 斯托克斯方程只是流体在连续介质假定下的一种公认的近似, 究竟这种近似在什么程度下可以描述那些实际现象, 而另外一些现象是否需要用别的模型来描述, 这也是需要考虑的重要问题.

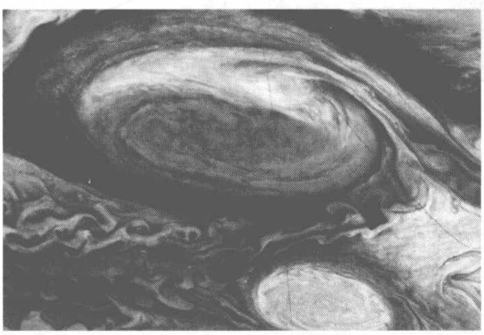

图 1.20 木星的大红斑

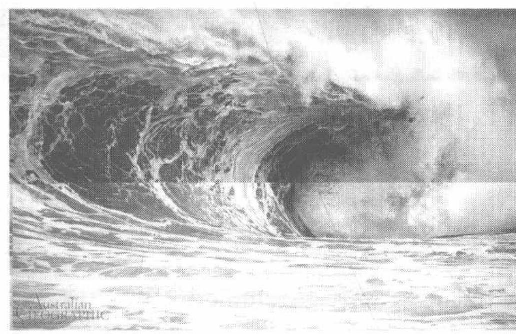

图 1.21 湍流波

习题 1.1.1 阅读文章《“潜伏” 在日常生活中的 7 个方程式》.

§1.2 偏微分方程的发展历史

1. 18 世纪的偏微分方程

微积分学的深入发展与广泛应用是 18 世纪数学的主流, 它刺激和推动了偏微分方程等许多新分支的产生. 欧拉 (Leonhard Euler, 1707—1783, 瑞士) (图 1.22) 在 18 世纪 30 年代就开始了对偏微分方程的研究. 1734 年, 他最早在自己的著作中提出了特殊的偏微分方程.

欧拉是 18 世纪最杰出的数学家, 也是有史以来最伟大的数学家之一, 在微积分、图论、力学、流体动力学、光学和天文学等多个领域都有重大发现. 他引进了许多现代数学的术语和书写格式, 最为著名的是第一个将函数写为 $f(x)$, 用来表示一个以 x 为自变量的函数. 据统计, 欧拉一生平均每年发表 800 页的学术论文, 内容涵盖多个学术范畴. 1911 年, 数学界开始系统地出版欧拉的著作, 并定名为《欧拉全集 (Leonhard Euler, Opera Omnia)》, 迄今已上架 70 多卷, 平

均每卷 500 多页. 拉普拉斯 (Pierre–Simon Laplace, 1749—1827, 法国) (图 1.23) 说: 读读欧拉, 他是我们所有人的老师 (Read Euler, read Euler, he is the master of us all).

图 1.22 纪念欧拉诞辰 300 周年的邮票

图 1.23 拉普拉斯雕塑

就科研成果方面而言, 欧拉是数学史上或者说是自然科学史上首屈一指的. 欧拉给后人留下了极其丰富的科学遗产和为科学献身的精神. 历史学家把欧拉同阿基米德 (Archimedes, 公元前 287 年 — 公元前 212 年, 希腊, 其出生年月是历史学家推算出来的, 但其名字已无从考证) (图 1.24)、牛顿 (图 1.25)、高斯并列为数学史上的 “四杰”. 他们有一个共同点, 就是在创建纯粹理论的同时, 还应用这些数学工具去解决大量的来自天文、物理和力学等方面的实际问题.

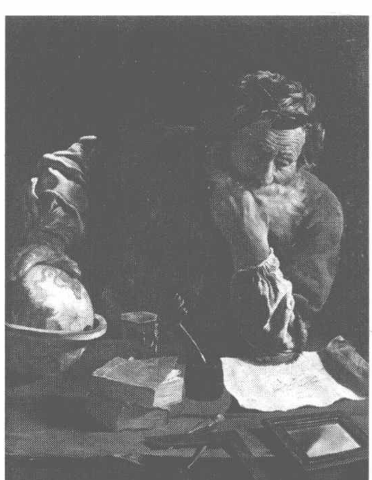

图 1.24 阿基米德

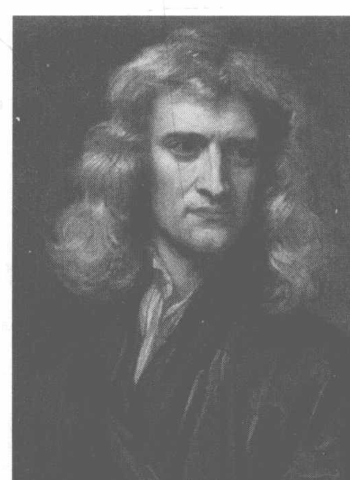

图 1.25 牛顿

1743 年, 达朗贝尔 (Jean–Baptiste le Rond d’Alembert, 1717—1783, 法国) (图 1.26) 在《论动力学 (Traité de dynamique)》中提出和总结力学中的达朗贝尔原理和虚功原理时出现了特殊的偏微分方程. 但这些著作当时并没有引起多

大关注.

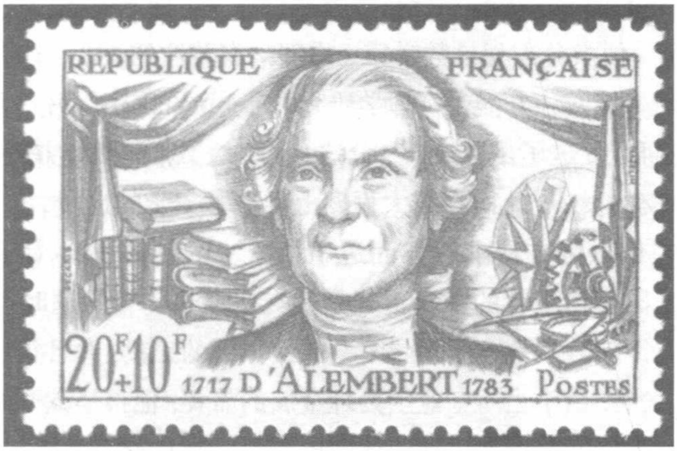

图 1.26 印有达朗贝尔头像的邮票

声音是人类最早研究的物理现象之一. 1747 年, 达朗贝尔在《张紧的弦在振动时形成的曲线研究 (Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration)》中首先明确导出了弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

且给出了其通解的表达式 (图 1.27), 并提议证明存在无穷多种与正弦曲线不同的曲线都是振动的模式, 由此开创了偏微分方程这门学科.

l'equation generale de la courbe eft donc

$$y = \Psi(t + s) + \Gamma(t - s).$$

图 1.27 达朗贝尔给出的弦振动方程的通解公式 $y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$.

1753 年, 伯努利 (Daniel Bernoulli, 1700—1782, 瑞士) 发表了《弦振动问题新思考》. 他假定初始曲线均可表示为正弦级数, 从而弦振动问题所有可能的解都是正弦周期模式的叠加. 这一做法遭到了欧拉和达朗贝尔的强烈反对, 并展开了长期的争论.

18 世纪获得的另一类重要的偏微分方程是位势方程, 这与当时另一个热门的问题 —— 计算两个物体之间的引力是相关的. 被誉为 "法国牛顿" 的拉普拉斯在 1785 年发表的论文《球状物体的引力理论与行星形状 (Théorie du movement et de la figure elliptique des planètes)》中引进了标量函数 V, 推导出 V 所满足的方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$