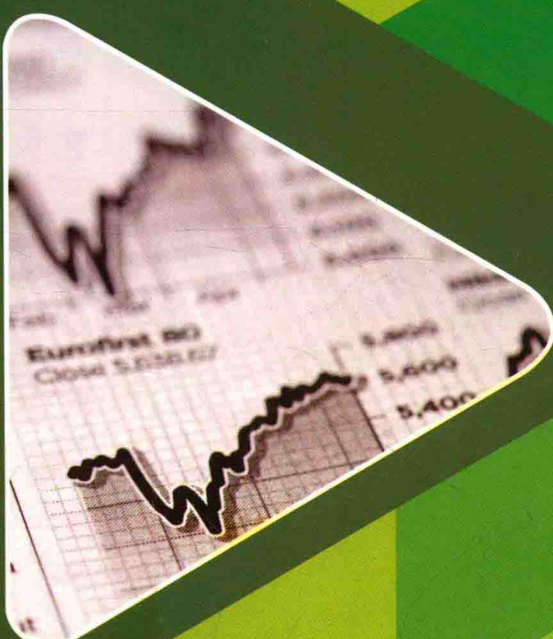
高等院校“十三五”规划教材

概率论与数理统计学习指导

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

主编 徐宝树 梁宝钰



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等院校“十三五”规划教材

概率论与数理统计学习指导

GAILULUN YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

主编 徐宝树 梁宝钰

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

随着经济的发展、科技的进步，数学在经济、管理、金融、生物、信息、医药等众多领域发挥着越来越重要的作用，数学方法的学习与灵活运用已经成为当今高等院校人才培养的基本要求．为了让学生更好、更快地掌握所学知识，我们编写了本书．本书编写的主要目的有两个：一是帮助学生更好地学习"概率论与数理统计"课程，熟练掌握课程中的一些基本概念、基本理论和基本方法，提高学生分析问题、解决问题的能力，以达到工科类、经济管理类专业对学生数学能力培养的基本要求；二是为了满足学生报考研究生的需要，结合编者多年来的教学经验，精选了部分经典考题，使学生对考研题的难度和深度有一个总体的认识．

全书将每章内容分为内容提要、典型例题分析、习题精选以及习题详解四大模块．

本书可以作为高等院校工科类、经济管理类本科生学习"概率论与数理统计"课程的辅导用书；对于准备报考硕士研究生的考生而言，本书也是一本不错的基础复习用书．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导 / 徐宝树，梁宝钰主编.
—哈尔滨 ： 哈尔滨工业大学出版社，2018.2
ISBN 978-7-5603-7287-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①徐… ②梁… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 031128 号

策划编辑　常　雨
责任编辑　李长波　张艳丽
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　三河市海新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.5　字数 345 千字
版　　次　2018 年 2 月第 1 版　　2018 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-7287-7
定　　价　39.80 元

前　言

随着经济的发展、科技的进步，数学在经济、管理、金融、生物、信息、医药等众多领域发挥着越来越重要的作用，数学方法的学习与灵活运用已经成为当今高等院校人才培养的基本要求.

然而，很多学生在学习的过程中，对于一些重要的数学思想、方法难以把握，对一些常见题型存在困惑，感觉无从下手，对数学的理解往往只拘泥于某些具体的知识点，体会不出蕴含在其中的数学思想.

为了让学生更好、更快地掌握所学知识，同时结合部分学生考研的需要，我们编写了本书.本书编写的主要目的有两个：一是帮助学生更好地学习"概率论与数理统计"课程，熟练掌握课程中的一些基本概念、基本理论和基本方法，提高学生分析问题、解决问题的能力，以达到工科类、经管类专业对学生数学能力培养的基本要求；二是为了满足学生报考研究生的需要，结合编者多年来的教学经验，精选了部分经典考题，使学生对考研题的难度和深度有一个总体的认识.

全书将每章内容分为四大模块，具体包括：

1.内容提要

本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统的梳理和归纳总结，详细解答了学习过程中可能遇到的各种疑难问题.

2.典型例题分析

本模块是作者在多年来教学经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目编写而成的，按照知识结构、解题思想、解题方法等对典型例题进行了系统的归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

3.习题精选

本模块精心选编了部分具有代表性的习题，可帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果.

4.习题详解

本模块对精选习题部分给出了详细的解答过程，部分习题给出了多种解法，以开拓读者的解题思想，培养读者的分析能力和发散性思维.

本书可以作为高等院校工科类、经济管理类本科生学习"概率论与数理统计"课程的辅导用书；对于准备报考硕士研究生的考生而言，本书也是一本不错的基础复习用书.

由于编者水平有限，尽管我们付出了很大努力，书中仍可能存在疏漏或不足之处，恳请读者和同行不吝指正，以期不断完善.

编　者

2017年9月

目　录

2. 事件间的关系

(1)事件的包含 $A\subset B$:事件 A 发生必然导致事件 B 发生;

(2)事件相等 $A=B$:$A\subset B$ 且 $B\subset A$;

(3)互不相容事件:事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$;

(4)对立事件:事件 A 和 B 互不相容,且 $A\cup B=\Omega$;

(5)完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生且不同时发生,即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$ 且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$;

(6)事件独立:事件 A 与 B 发生与否互相不受影响,即 $P(AB)=P(A)P(B)$.

3. 运算规律

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$;$(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)德・摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}$.

注 $A-B=A-AB=A\overline{B}$;$(A\overline{B})\cup(AB)=A$.

1.1.3 频率的定义及性质

1. 定义

设 A 为试验 E 中的一个事件,试验 E 在相同条件下重复进行 n 次,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频率,$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 在 n 次试验中发生的频率,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

2. 性质

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2)$f_n(\Omega)=1$;

(3)设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为 k 个两两互不相容的事件,则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

1.1.4 概率的公理化定义及性质

1. 定义

设 E 是一个随机试验,Ω 是样本空间,对 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记作 $P(A)$,称为事件 A 的概率. 事件 A 的概率 $P(A)$满足以下 3 个条件:

(1)非负性:对任意的事件 A,$P(A)\geqslant 0$;

(2)规范性:对于必然事件 Ω,$P(\Omega)=1$;

(3)可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

2. 性质

(1)$P(\varnothing)=0$；

(2)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3)若 $B\subset A$，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，$P(B)\leqslant P(A)$；

(4)对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$；

(5)对任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 或 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(6)对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

对任意 3 个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

1.1.5 条件概率的定义及性质

1. 定义

设 A,B 为两个事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

2. 性质

(1)非负性：对任意的事件 A，$P(A|B)\geqslant 0$；

(2)规范性：对于必然事件 Ω，$P(\Omega|B)=1$；

(3)可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A\mid B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A\mid B);$$

(4)乘法公式：若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A|B)P(B)$；

推论 设 A,B,C 为 3 个事件，且 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C|AB)P(A|B)P(B);$$

(5)全概率公式：设 Ω 为试验 E 的样本空间，B 为 E 的一个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，且有 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i);$$

推论 设 Ω 为试验 E 的样本空间，B 为 E 的一个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且有 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}A_i\supset B$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i);$$

(6)贝叶斯公式：设 Ω 为试验 E 的样本空间，B 为 E 的一个事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，$P(B)>0$，$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B\mid A_i)P(A_i)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

1.1.6 事件的独立性

1. 两个事件相互独立的定义

设 A,B 是两个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

2. 两个事件相互独立的性质

(1)若 $P(A)>0$，则事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$；

(2)若 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

注 当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，“A 与 B 相互独立”与“A 与 B 互不相容”不能同时成立.

3. 3 个事件相互独立的定义

设 A,B,C 是 3 个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(CA)=P(C)P(A),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立.

4. 3 个事件相互独立的性质

(1)若 A,B,C 相互独立，将其中任意 $i(i=1,2,3)$ 个换成其对立事件，得到的 3 个事件仍然相互独立；

(2)若 A,B,C 相互独立，则 $A\cup B$，AB，$A-B$ 均与 C 相互独立.

一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 对于其中任意 $i(i=2,3,\cdots,n)$ 个事件都满足积事件的概率等于各事件的概率相乘，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立. 将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意多个事件换成它们的对立事件，得到的 n 个事件仍然相互独立.

1.1.7 概率模型

1. 古典概型(等可能概型)

古典概型满足：样本空间中的样本点有限，并且每个基本事件发生的可能性均等，设

样本空间 Ω 中的样本点总数为 n，事件 A 中包含的样本点数为 n_A，则

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中的基本事件数}}{\Omega\text{ 中的基本事件总数}}.$$

2. 几何概型

设样本空间是一个测度(如长度、面积、体积等)有限的区域(如长度有限的线段，面积有限的区域等)，事件 A 中的样本点为区域的子集，若事件 A 发生的可能性大小与 A 的测度成正比，记样本空间 Ω 的度量为 $u(\Omega)$，事件 A 的度量为 $u(A)$，则

$$P(A)=\frac{u(A)}{u(\Omega)}.$$

这个概率模型称为几何概型.

3. 伯努利概型

如果试验 E 只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利试验，将试验 E 在相同条件下独立地重复进行 n 次所构成的试验称为 n 重伯努利试验 E^n. 设 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p(0<p<1)$，将 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率记为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

这个概率模型称为伯努利概型.

1.2 典型例题分析

1.2.1 题型一 事件的运算及事件的概率

本题型要求读者正确使用事件的运算形式来表达事件，熟练使用事件的运算规律进行事件的运算，熟练使用概率的性质进行运算. 另外，在事件的运算中差事件 $A-B$ 可以使用其等价事件 $A\overline{B}$ 表示.

例 1.1 设 A,B,C 为 3 个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) A,B,C 中至少有一个发生；

(4) A,B,C 都不发生；

(5) A,B,C 中不多于两个发生；

(6) A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；(2) $AB\overline{C}$；(3) $A\cup B\cup C$；(4) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；(5) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；(6) $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

例 1.2 设 A,B,C 为 3 个事件，且满足

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\quad P(AB)=P(BC)=0,\quad P(AC)=1/8,$$

求 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

解 由于 $ABC\subset AB$，有

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0,$$

可得 $P(ABC)=0$，故

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

例 1.3 设 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3},P(C)=\frac{1}{5},P(AB)=\frac{1}{10},P(AC)=\frac{1}{15},P(BC)=\frac{1}{20},P(ABC)=\frac{1}{30}$，求事件 $A\cup B\cup C,\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\overline{A}\,\overline{B}C,(\overline{A}\,\overline{B})\cup C$ 发生的概率.

解 $$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20},\end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20},$$

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=1-P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\\&=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right]\\&=\frac{4}{15},\end{aligned}$$

另由于 $\overline{A}\,\overline{B}=(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}C$ 与 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 互不相容，从而有

$$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60},$$

$$P((\overline{A}\,\overline{B})\cup C)=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\,\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

例 1.4 设 $P(A\cup B)=0.6$，且 $P(\overline{A}B)=0.3$，求 $P(\overline{A})$.

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(\overline{A}B)$，有

$$P(A)=P(A\cup B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.3=0.3,$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.7.$$

例 1.5 证明 $\overline{(AB)\cup(CD)}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup\overline{D})$.

证 由德・摩根律有

$$\overline{(AB)\cup(CD)}=\overline{AB}\cap\overline{CD}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup\overline{D}).$$

例 1.6 证明 $A-BC=(A-B)\cup(A-C)$.

证 $(A-B)\cup(A-C)=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})=A(\overline{B}\cup\overline{C})=A\,\overline{BC}=A-BC$.

例 1.7 设 A 与 B 为对立事件,证明 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也为对立事件.

证 由 A 与 B 为对立事件,有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,从而 $\overline{AB}=\Omega$ 且 $\overline{A\cup B}=\varnothing$,从而有 $\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$,故 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为对立事件.

例 1.8 设 A,B 为任意两个事件,则(　　).

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

C. $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　D. $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解 由于 $AB\subset A$,$AB\subset B$,有 $P(AB)\leqslant P(A)$,$P(AB)\leqslant P(B)$,从而有

$$[P(AB)]^2\leqslant P(A)P(B),\quad P(AB)\leqslant\sqrt{P(A)P(B)}\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2},$$

故选 C.

1.2.2 题型二 古典概型、几何概型的计算

在古典概型的计算中,要注意分析试验的全部基本事件是什么,以及要计算概率的事件中含有哪些基本事件;在几何概型的计算中,常需要与高等数学的知识相结合.

例 1.9 袋中有 5 只球,其中只有 1 只红球,现从袋中取球,每次取 1 只球,取出后不放回,求:(1)前 3 次取到的球中有红球的概率;(2)第 3 次取到的球是红球的概率.

解 (1)对袋子中的球进行编号,考虑取出 3 只球的所有可能情况,样本空间 Ω 中的样本点数为 A_5^3(排列数),设 $A=\{$前 3 次取到的球中有红球$\}$,则 A 中的样本点数为 $3C_4^1C_3^1$,由古典概型有

$$P(A)=\frac{3C_4^1C_3^1}{A_5^3}.$$

(2)设 $B=\{$第 3 次取到的球是红球$\}$,则 B 中的样本点数为 $C_4^1C_3^1$,由古典概型有

$$P(B)=\frac{C_4^1C_3^1}{A_5^3}.$$

注 本题中(1)的计算也可以在压缩的样本空间上进行,Ω 中的样本点数为 C_5^3(组合数),A 中的样本点数为 C_4^2,由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_5^3}.$$

但(2)的计算不能在压缩的样本空间上进行,因为若使用 C_5^3(组合数)计算 Ω 中的样本点数,则 B 不是 Ω 的子集,即 B 不是事件.

例 1.10 墙上挂着 5 张字母卡片,其顺序为"*abcba*",现掉落了两个,捡起后随机地挂回,求顺序仍然为"*abcba*"的概率.

解 由于卡片可能掉落的情况有 C_5^2 种，则随机挂回的情况即样本空间中的点数为 $2C_5^2$，显然其中有一半的挂回方式是正确的(顺序仍然为"$abcba$")，再注意到当两个 a 或两个 b 同时掉落时，不论怎么挂回都能使得顺序为"$abcba$"，故令 $A=\{$顺序仍然为"$abcba$"$\}$，则 A 中的点数为 C_5^2+2，由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_5^2+2}{2C_5^2}.$$

例 1.11 一批产品共有 50 件，其中含有 3 件次品. 现对产品进行不放回抽样检查，若被抽查到的 5 件产品中至少有一件是次品，则认为这批产品不合格，求这批产品不合格的概率.

解 对产品按次品与非次品分别编号，则样本空间中样本点总数为 C_{50}^5，取到的 5 件产品中没有次品的样本点数为 C_{47}^5，设 $A=\{$这批产品不合格$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_{50}^5-C_{47}^5}{C_{50}^5}=1-\frac{C_{47}^5}{C_{50}^5}.$$

注 计算复杂事件中的样本点数，可利用样本空间中的样本点数减去其对立事件中的样本点数，这种方法在计算含"至少"这样的事件点数时常常很方便.

例 1.12 某班有 n 名学生，求至少两人同一天生日的概率是多少？

解 这个问题实质上是分房问题，这里关键是将生日作为"房子". 因每个人的生日都可能是 365 天中的任何一天，且是等可能的，因此基本事件总数 $n=365^n$，设 $A=\{$至少两人同一天生日$\}$，注意到 $\overline{A}=\{n$ 个人生日各不相同$\}$，由于 $\overline{A}$ 包含的基本事件为 A_{365}^n，则 A 包含的基本事件数为 $365^n-A_{365}^n$. 所以

$$P(A)=\frac{365^n-A_{365}^n}{365^n}.$$

表 1.1 是 n 取不同的值时 $P(A)=p$ 的数值.

表 1.1

n	10	15	20	25	30	40	45	50	55
p	0.117	0.253	0.414	0.569	0.706	0.891	0.94	0.97	0.99

当 $n=64$ 时，$P(A)\approx 0.997$，"至少两人生日相同"几乎是必然的了.

例 1.13 在区间$[0,1]$上任取两个数(图 1.1)，求两数之和小于 $\frac{3}{2}$ 的概率及两数之和等于 $\frac{3}{2}$ 的概率.

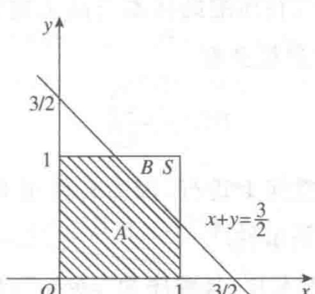


图 1.1

解 用 x,y 分别表示取得的两个数，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

令 $A=\left\{两数之和小于\frac{3}{2}\right\}$，$B=\left\{两数之和等于\frac{3}{2}\right\}$，则有

$$A=\left\{(x,y)\mid x+y<\frac{3}{2},(x,y)\in\Omega\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\mid x+y=\frac{3}{2},(x,y)\in\Omega\right\},$$

如图1.1所示，将 S,A,B 几何化后，由几何概型有

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{7}{8},\quad P(B)=\frac{L(B)}{L(\Omega)}=0,$$

其中，$L(A)$，$L(B)$ 与 $L(\Omega)$ 分别表示区域 A,B 与 Ω 的面积.

注 由几何概型可以看到，并不是只有不可能事件 $\varnothing$ 的概率才为零.

例 1.14 设 A,B 为两个事件，且 $0<P(B)<1$，若 $P(A\mid B)=1$，则 A 与 B 的关系可能是(　　).

A. $A=B$　　　　B. $A\supset B$

C. $A\subset B$　　　　D. A,B,C 均有可能

解 若 $A=B$ 或 $A\supset B$，有 $AB=B$，从而

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,$$

若 $A\subset B$，也有可能使得 $P(A\mid B)=1$，如在例1.13中令 $A=\left\{两数之和小于\frac{3}{2}\right\}$，$B=\left\{两数之和不大于\frac{3}{2}\right\}$，显然 $A\subset B$，由几何概型可知

$$P(B)=\frac{L(B)}{L(\Omega)}=\frac{7}{8},$$

从而有

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=1,$$

故此题选D.

1.2.3 题型三　条件概率问题

关于条件概率有如下几个方面的问题需要注意：①在计算或证明中一般可以将条件概率问题转化为无条件概率问题进行；②与实际问题相结合时应注意分清条件概率与积事件的概率；③若试验的总过程可以分解为若干个分过程，可用乘法公式计算积事件概率；④样本空间中样本点若有不同属性，这时计算常与全概率公式、贝叶斯公式的计算有关.

例 1.15 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解 由已知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3},\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2},$$

有

$$P(AB)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\quad P(B)=2P(AB)=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

例 1.16 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B|(A\cup\overline{B}))$.

解 由 $P(\overline{A})=0.3$，有 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.7$，再由 $P(A\overline{B})=0.5$，有

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2,$$

从而

$$\begin{aligned}P(B|(A\cup\overline{B}))&=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P((BA)\cup(B\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}\\&=\frac{P(BA)}{P(AB)+P(\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(AB)+1-P(B)}=\frac{0.2}{0.2+1-0.4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 1.17 若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

证 由 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1$，有 $P(B)=P(AB)$，从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A),$$

故

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\,\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$$

例 1.18 设有 N 件产品，其中包括 $n(N\geqslant n)$ 件次品，现从中任取两件，求：

(1)取出的两件产品中有一件是次品的条件下，另一件也是次品的概率；

(2)取出的两件产品中有一件不是次品的条件下，另一件是次品的概率；

(3)取出的两件产品中至少有一件是次品的概率.

解 (1)令 $A=\{$取出的两件产品中有一件是次品$\}$，$B=\{$另一件是次品$\}$，则 $AB=\{$取出的两件产品都是次品$\}$，从而

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{C_n^2}{C_N^2}}{\frac{C_{N-n}^1C_n^1+C_n^2}{C_N^2}}=\frac{C_n^2}{C_{N-n}^1C_n^1+C_n^2}.$$

(2)令 $C=\{$取出的两件产品中有一件不是次品$\}$，则 $CB=\{$取出的两件产品中有一件

是次品，另一件是非次品}，从而

$$P(B|C)=\frac{P(CB)}{P(C)}=\frac{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1}{C_N^2}}{\dfrac{C_{N-n}^1C_n^1+C_{N-n}^2}{C_N^2}}=\frac{C_{N-n}^1C_n^1}{C_{N-n}^1C_n^1+C_{N-n}^2}.$$

(3)令 $D=\{$取出的两件产品中至少有一件是次品$\}$，则 $\overline{D}=\{$取出的两件产品均为非次品$\}$，从而

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{C_{N-n}^2}{C_N^2}.$$

例 1.19 袋中装有 n 只红球，m 只白球，每次从袋中任取 1 只球，观察颜色后将其放回，并再放入 a 只与所取的那只球同颜色的球，现连续进行 3 次，试求前两次取到白球并且第三次取到红球的概率.

解 设 $A=\{$第一次取到白球$\}$，$B=\{$第二次取到白球$\}$，$C=\{$第三次取到红球$\}$，则按试验的先后顺序，应用乘法公式有

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)=\frac{C_n^1}{C_{n+m+2a}^1}\frac{C_{m+a}^1}{C_{n+m+a}^1}\frac{C_m^1}{C_{n+m}^1}.$$

例 1.20 现有两个箱子，第一个箱子装有 10 只球，其中 8 只为白色，第二个箱子装有 20 只球，其中 4 只为白色，现从每个箱子任取一球，然后再从这两只球中任取一只，求取到球为白色的概率.

解 设 $A=\{$取到的球为白色$\}$，$B_1=\{$取到的球来自第一个箱子$\}$，$B_2=\{$取到的球来自第二个箱子$\}$，由古典概型有

$$P(A|B_1)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1},\quad P(A|B_2)=\frac{C_4^1}{C_{20}^1},$$

再由已知有 $P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$，从而根据全概率公式有

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{C_8^1}{C_{10}^1}+\frac{C_4^1}{C_{20}^1}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.21 已知仓库中存放的某种元件是由编号为 1,2,3 的 3 个工厂提供的，提供的份额分别是 15%，80%，5%，又知 3 个工厂生产产品的次品率分别是 0.02，0.01，0.03，现从仓库中随机取出一只元件，经检验取到的是次品，求该产品是由第 2 个厂家生产的概率.

解 设 $A=\{$取到的产品是次品$\}$，$B_i=\{$取到的产品是由第 i 个厂家生产的$\}$，$i=1,2,3$，由已知有

$$P(B_1)=15\%,\quad P(B_2)=80\%,\quad P(B_3)=5\%,$$
$$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03,$$

故

$$P(B_2|A)=\frac{P(A \mid B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A \mid B_i)P(B_i)}=\frac{0.01\times0.8}{0.02\times0.15+0.01\times0.8+0.03\times0.05}=\frac{8}{53}.$$

例 1.22 考察 3 种疾病 d_1,d_2,d_3，它们在临床上的主要症状为 $S=\{S_1,S_2,S_3\}$，假设其中：S_1＝食欲不振，S_2＝呼吸急促，S_3＝发热. 现从 20 000 份患有疾病 d_1,d_2,d_3 的病历中统计得到的数据见表 1.2.

表 1.2

疾病	人数	出现 S 中一个或几个症状的人数
d_1	7 750	7 500
d_2	5 250	4 200
d_3	7 000	3 500

求：(1)当一个具有 S 中症状的人前来要求诊断时，他患有疾病 d_1,d_2,d_3 的可能性是多少？(2)在无其他诊断手段的情况下，能对这个病人做出什么样的诊断？

解 (1)设 A_1,A_2,A_3 分别表示患有疾病 d_1,d_2,d_3，B 表示出现的症状 S，以频率作为概率的近似，由统计表可知

$$P(A_1)=\frac{7\ 750}{20\ 000}=0.387\ 5,\quad P(A_2)=\frac{5\ 250}{20\ 000}=0.262\ 5,\quad P(A_3)=\frac{7\ 000}{20\ 000}=0.35,$$

$$P(B|A_1)=\frac{7\ 500}{7\ 750}=0.967\ 7,\quad P(B|A_2)=\frac{4\ 200}{5\ 250}=0.8,\quad P(B|A_3)=\frac{3\ 500}{7\ 000}=0.5,$$

由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=0.387\ 5\times0.967\ 7+0.262\ 5\times0.8+0.35\times0.5=0.76.\end{aligned}$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.387\ 5\times0.967\ 7}{0.76}=0.493\ 4,$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.262\ 5\times0.8}{0.76}=0.276\ 3,$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.35\times0.5}{0.76}=0.230\ 3.$$

这就是病人出现症状 S 的情况下患有疾病 d_1,d_2,d_3 的概率.

(2)在无其他诊断手段的条件下，注意到 $P(A_1|B)>P(A_2|B)>P(A_3|B)$，于是可以做出判断：病人患有疾病 d_1 的可能性最大. 这种用贝叶斯公式算出概率然后以最大概率做出决断的方法称为贝叶斯决策.

1.2.4 题型四 独立性与伯努利概型

在本题型中需要注意事件相互独立与事件互不相容的区别；事件组相互独立与事件