

中国科学院大学研究生教材系列

微分方程数值解法

(第二版)

Numerical Solutions of Differential Equations
(Second Edition)

余德浩 汤华中 编著
YU Dehao TANG Huazhong



科学出版社

中国科学院大学研究生教材系列

微分方程数值解法 (第二版)

**Numerical Solutions of Differential Equations
(Second Edition)**

余德浩 汤华中 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括常微分方程初值、边值问题的数值解法,抛物型、双曲型及椭圆型偏微分方程的差分解法,偏微分方程和边界积分方程的有限元解法和边界元解法.本书选材力求通用而新颖,既介绍了在科学和工程计算中常用的典型数值计算方法,又包含了近年计算数学研究的一些新的进展,包括作者本人的若干研究成果.本书以介绍微分方程的数值求解方法为主,但也涉及有关的理论,叙述和论证力求既深入浅出,又严格准确.

本书可供理工科各专业硕士研究生作教材之用,也可供高年级本科生、研究生、计算数学工作者及其他利用计算机从事科学与工程计算的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解法/余德浩,汤华中编著. —2版. —北京:科学出版社, 2018.3

(中国科学院大学研究生教材系列)

ISBN 978-7-03-046654-9

I. ①微… II. ①余… ②汤… III. ①微分方程-数值计算-高等学校-教材
IV. ①O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 301519 号

责任编辑:王丽平/责任校对:彭珍珍
责任印制:张伟/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年3月第一版 开本:720×1000 1/16

2018年3月第一次印刷 印张:27 1/4

字数:540 000

定价:158.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

本书自 2003 年 10 月初版以来受到了众多高校的高年级本科生、研究生、计算数学工作者和利用计算机从事科学与工程计算的科技人员的欢迎。尽管本书已经多次重印,但每次均很快售罄,这使得近年来很多学校的相关专业希望以本书作为教材或参考书,却苦于无处购买,许多其他读者也希望本书再版。正是在读者需求的驱动和科学出版社的支持下,作者才开始了本书修订再版的工作。在此我们衷心感谢读者对本书的关注和支持,同时也希望本书能继续高质量地服务于广大读者。

相比于第一版,本书的第二版主要做了如下一些变动:① 修订和调整部分文字、数学符号和语句、例子的环境与编号、高分辨 TVD 格式部分的内容顺序,并完善了参考文献;② 插入了一些辅助图形,如常微分方程某些数值方法的绝对稳定性区域图;③ 增加了一些新内容,如一些新的例子和习题, Kreiss 矩阵定理及其证明,一阶双曲型方程组的对称化,一阶高维双曲型方程组的定义与一维的关系和分裂方法的分裂误差分析等;④ 更正了第一版中的一些印刷错误;⑤ 增加了一个附录:本书第一作者撰写的文章《冯康院士与科学计算》。该文内容是第一作者几十年来以本书为教材授课时必讲的内容。

本书新版在编排中仍然可能存在疏漏和不足之处,敬请读者批评指正。

余德浩 汤华中

2017 年 4 月于北京

第一版前言

科学与工程中的许多问题都可用线性或非线性微分方程来描述, 这些微分方程中只有很少一部分可以给出解析解, 而绝大多数则必须通过近似方法求解, 包括借助计算机进行数值求解. 随着计算机软硬件的不断更新和计算方法的迅猛发展, 科学计算、实验及理论已成为现代科学技术研究的三大主要手段. 科学计算还能解决实验及理论无法解决的问题, 并由此发现一些新的物理现象, 加深人们对物理机理的理解和认识, 促进科学的发展.

目前科学计算已渗透到许多专业学科中, 形成了许多新的交叉学科, 如计算物理学、计算力学、计算流体力学、计算化学、计算生物学、计算材料科学和计算经济学等, 而计算数学则是它们的纽带和共同的基础. 因此, 不仅数学工作者要学习和掌握微分方程数值解法的知识, 许多其他理工科专业的科技工作者也迫切需要学习和掌握微分方程数值解法的知识, 以便结合自身专业开展与科学与工程计算相关的研究工作.

本书是在原有讲义《微分方程数值解法》的基础上编写的. 该讲义已积累了作者十几年的教学经验, 并不断吸收近几年国内外发展的一些新算法和新理论, 同时也融合了作者本人的一些科研成果.

本书内容丰富、比较全面, 取材力求典型、通用和新颖, 既重视基础理论和基本训练, 又有一定的理论深度. 为了面向更多的读者, 本书避免了过多的抽象数学理论分析, 但又自成系统. 书中每章后面都配有一定数量的习题, 可供读者练习和上机实习. 阅读本书, 仅需数学分析、高等代数、数学物理方程及计算机程序设计等方面的一般基础知识. 全书共六章, 其中前面四章由汤华中编写, 后面两章由余德浩编写. 第 1 章介绍常微分方程初值、边值问题的数值解法, 着重介绍一些典型的离散方法, 包括 Euler 方法、Runge-Kutta 方法、一般线性多步方法和 Hamilton 系统的辛几何算法, 对算法的稳定性和收敛性等基本问题也作了分析. 第 2、3、4 章分别介绍抛物型、双曲型和椭圆型偏微分方程的初值、边值问题的有限差分法. 内容包括有限差分方法的构造、数值方法的稳定性分析、收敛性理论和基本的迭代方法. 第 5 章和第 6 章则分别介绍有限元方法及边界元方法. 除了介绍经典的方法外, 其中也简要介绍了自适应有限元、自然边界元及区域分解算法等内容.

中国科学院及中国科学技术大学北京研究生院的领导们对本书的写作给予了热情的鼓励和支持. 此外, 本书在编写过程中也得到了中国科学院数学与系统科学研究院、计算数学与科学与工程计算研究所和科学与工程计算国家重点实验室领导

和同事们的大力支持和帮助。作者在这里向他们表示衷心的感谢。我们还要感谢中国科学院研究生教材出版基金的资助，正是这一资助使本书得以顺利出版。

由于时间仓促，加之我们水平有限，本书将不可避免存在疏漏和不足之处，敬请读者批评指正。

编著者

2016年6月于北京

目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 常微分方程初、边值问题数值解法	1
1.1 引言	1
1.2 Euler 方法	3
1.2.1 Euler 方法及其几何意义	3
1.2.2 Euler 方法的误差分析	4
1.2.3 Euler 方法的稳定性	6
1.2.4 改进的 Euler 方法	7
1.3 Runge-Kutta 方法	8
1.3.1 显式 Runge-Kutta 方法	8
1.3.2 隐式 Runge-Kutta 方法	13
1.3.3 半隐式 Runge-Kutta 方法	16
1.3.4 单步法的稳定性和收敛性	17
1.4 线性多步方法	20
1.4.1 Adams 外插法	20
1.4.2 Adams 内插法	24
1.4.3 一般线性多步公式	26
1.5 线性多步法的稳定性和收敛性	29
1.5.1 线性差分方程	29
1.5.2 线性多步法的局部截断误差	32
1.5.3 线性多步法的稳定性和收敛性	35
1.5.4 绝对稳定性	40
1.6 预估-校正算法	47
1.7 刚性方程组的解法	54
1.8 解常微分方程边值问题的试射法	58
1.8.1 二阶线性常微分方程的试射法	60
1.8.2 二阶非线性常微分方程的试射法	61
1.9 解两点边值问题的有限差分方法	63
1.9.1 有限差分近似的基本概念	64

1.9.2	用差商代替导数的方法	66
1.9.3	积分插值法	68
1.9.4	解三对角方程组的追赶法	70
1.10	Hamilton 系统的辛几何算法	71
1.10.1	辛几何与辛代数的基本概念	73
1.10.2	线性 Hamilton 系统的辛差分格式	76
1.10.3	辛 Runge-Kutta 方法	79
	习题 1	82
第 2 章	抛物型方程的差分方法	86
2.1	有限差分格式的基础	89
2.2	一维抛物型方程的差分方法	95
2.2.1	常系数热传导方程	95
2.2.2	变系数热传导方程	103
2.3	差分格式的稳定性与收敛性	106
2.3.1	ϵ 图方法	106
2.3.2	稳定性分析的矩阵方法	108
2.3.3	Gerschgorin 定理及其应用	120
2.3.4	稳定性分析的 Fourier 方法	124
2.3.5	Kreiss 矩阵定理	132
2.3.6	能量方法	142
2.3.7	差分方程的收敛性	145
2.4	二维抛物型方程的差分方法	147
2.4.1	显式差分格式	148
2.4.2	隐式差分格式	151
2.4.3	差分格式的稳定性分析	153
2.4.4	交替方向隐式差分格式	156
2.4.5	辅助应变量的边界条件	161
	习题 2	163
第 3 章	双曲型方程的差分方法	168
3.1	一维双曲型方程的特征线方法	168
3.1.1	一阶线性双曲型方程	168
3.1.2	一阶拟线性双曲型方程	171
3.1.3	二阶拟线性双曲型方程	174
3.2	一维一阶线性双曲型方程的差分方法	179
3.2.1	双曲型方程的初值问题	179

3.2.2	双曲型方程的初边值问题	190
3.3	一维一阶线性双曲型方程组的差分方法	191
3.3.1	Lax-Friedrichs 格式	192
3.3.2	Lax-Wendroff 格式	194
3.3.3	Courant-Isaacson-Rees 格式	196
3.4	高维一阶线性双曲型方程的差分方法	201
3.4.1	Lax-Wendroff 格式	202
3.4.2	显式 MacCormack 格式	203
3.4.3	Strang 分裂格式	204
3.5	二阶线性双曲型方程的差分方法	207
3.5.1	一维波动方程	207
3.5.2	二维波动方程	213
3.6	拟线性双曲型守恒律的差分方法	218
3.6.1	守恒律与弱解	218
3.6.2	熵条件和可容许解	228
3.6.3	守恒型差分方法	232
3.6.4	高分辨 TVD 格式	239
	习题 3	254
第 4 章	椭圆型方程的差分方法	258
4.1	Poisson 方程边值问题的差分方法	259
4.1.1	五点差分格式	259
4.1.2	边界条件的离散	260
4.2	极坐标下 Poisson 方程的差分方法	266
4.3	Poisson 方程的有限体积方法	267
4.4	差分方法的收敛性和误差估计	271
4.4.1	离散边值问题的可解性	271
4.4.2	差分格式的收敛性和误差估计	272
4.5	一般二阶线性椭圆型方程差分方法	274
4.6	椭圆型差分方程的迭代解法	278
4.6.1	迭代法的基本理论	278
4.6.2	Jacobi 迭代方法和 Gauss-Seidel 迭代方法	281
4.6.3	逐次超松弛迭代法	287
4.6.4	相容次序和性质 A	289
4.6.5	共轭梯度方法	294
4.7	多重网格方法	301

4.7.1	双重网格方法	302
4.7.2	多重网格方法	307
习题 4		309
第 5 章	有限元方法	312
5.1	引言	312
5.2	变分原理	312
5.2.1	一个典型例子	312
5.2.2	二次泛函的变分问题	315
5.2.3	Ritz 法与 Galerkin 法	317
5.3	几何剖分与分片插值	319
5.3.1	三角形单元剖分	320
5.3.2	三角形线性元与面积坐标	322
5.3.3	其他三角形 Lagrange 型单元	326
5.3.4	三角形 Hermite 型单元	329
5.3.5	矩形 Lagrange 型单元	331
5.3.6	矩形 Hermite 型单元	335
5.3.7	变分问题的有限元离散化	337
5.4	Sobolev 空间初步	340
5.4.1	广义导数	340
5.4.2	Sobolev 空间 $H^k(\Omega)$ 与 $H_0^k(\Omega)$	342
5.4.3	嵌入定理与迹定理	343
5.4.4	等价模定理	345
5.5	协调元的误差分析	346
5.5.1	Lax-Milgram 定理	346
5.5.2	典型边值问题的适定性	348
5.5.3	投影定理	351
5.5.4	收敛性与误差估计	353
5.6	非协调有限元	356
5.6.1	非协调元的例子	356
5.6.2	非协调元的收敛性	357
5.7	自适应有限元	358
5.7.1	自适应方法简介	358
5.7.2	后验误差估计	359
习题 5		363

第 6 章 边界元方法	372
6.1 引言	372
6.2 经典边界归化	373
6.2.1 调和边值问题、Green 公式和基本解	373
6.2.2 间接边界归化	376
6.2.3 直接边界归化	380
6.3 自然边界归化	382
6.3.1 自然边界归化原理	382
6.3.2 典型域上的自然边界归化	384
6.3.3 自然积分算子的性质	389
6.4 边界积分方程的数值解法	390
6.4.1 配置法	390
6.4.2 Galerkin 法	391
6.4.3 一类超奇异积分方程的数值解法	392
6.5 有限元边界元耦合法	393
6.5.1 有限元法与边界元法比较	393
6.5.2 自然边界元与有限元耦合法原理	394
6.6 无穷远边界条件的近似	397
6.6.1 人工边界上的近似边界条件	397
6.6.2 近似积分边界条件与误差估计	400
6.7 区域分解算法	400
6.7.1 有界区域的区域分解算法	400
6.7.2 基于边界归化的区域分解算法	403
习题 6	406
参考文献	409
附录 冯康院士与科学计算	412

第 1 章 常微分方程初、边值问题数值解法

1.1 引 言

微分方程和微积分是同时问世的. Newton 在 1671 年的一篇关于微积分的论文中就已涉及, 并用积分和级数讨论了微分方程的近似求解. 他研究的第一个一阶微分方程是

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

微积分的另一发明者, Leibniz, 约于 1676 年讨论了一个几何问题——反切向问题. 它的数学模型是

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Euler 于 1744 年借助二阶微分方程

$$f_{y'y'}y'' + f_{y'y}y' + f_{y'x} - f_y = 0,$$

给出了一个极小问题

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = \min$$

的一般解. Clairaut 于 1734 年在研究一个长方形框的移动时建立了如下数学模型

$$y - xy' + f(y') = 0,$$

这是第一个隐式微分方程, 它在某些点处存在着许多可能的不同解曲线, 如直线族 $y = Cx - f(C)$ 和它们的包络曲线, 其中 C 为任意常数.

总之, 生产实际和其他数学分支中都会不断地遇到常微分方程, 而在这些方程中, 仅有很少的一部分能通过初等积分法给出其通解或通积分. 这促使数学工作者从理论上去探讨它们的解析解, 工程师从渐近分析角度去研究问题的渐近解, 但是无论是理论分析还是渐近分析, 它们均存在一定的局限性.

在计算机迅猛发展的今天, 微分方程的数值求解越来越受到重视. 一方面, 借助于计算机, 一些超大规模问题和原来无法通过初等积分和渐近方法求解的问题能得以求解; 另一方面, 借助于数值方法, 一些问题的理论分析可以得到简化, 但是数值模拟最终又必须由理论或实验来检验.

这章将主要介绍离散一阶常微分方程初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad (1.1.1)$$

$$y(a) = y_a \quad (1.1.2)$$

的数值方法, 其中 f 是 x 和 y 的函数, y_a 是给定的初始值, 同时也将简单介绍求解常微分方程边值问题和刚性常微分方程(组)的计算方法, 以及 Hamilton 系统的辛几何算法.

在介绍数值方法之前, 先不加证明地给出初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 的适定性和解的存在性结果.

定理 1.1.1(存在唯一解) 如果方程 (1.1.1) 中的右端函数 $f(x, y)$ 满足:

(i) $f(x, y)$ 是实值函数,

(ii) 函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $\Omega = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ 内连续, 其中 \mathbb{R} 是实数集,

(iii) $f(x, y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件: 存在正常数 L , 使得对任意 $x \in [a, b]$, 均成立不等式

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|, \quad (1.1.3)$$

则问题 (1.1.1)—(1.1.2) 存在唯一的解 $y(x) \in C^1[a, b]$.

上述定理的证明可参阅有关微分方程理论的教材.

定义 1.1.1 称初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 对初值 y_a 是适定的, 如果存在常数 $K > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得对于任意 $0 < \varepsilon \leq \eta$ 和

$$|y_a - \tilde{y}_a| < \varepsilon, \quad |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.1.4)$$

初值问题

$$\frac{dz}{dx} = \tilde{f}(x, z), \quad z(a) = \tilde{y}_a \quad (1.1.5)$$

存在解且满足 $|y(x) - z(x)| \leq K\varepsilon$, 其中 $y(x)$ 是问题 (1.1.1)—(1.1.2) 的解.

该定义描述的是微分方程解对初始值的连续依赖性, 或者说, 初始值引起小扰动对微分方程解的影响程度.

定理 1.1.2(适定性) 如果方程 (1.1.1) 中的右端函数 $f = f(x, y)$ 在区域 Ω 上满足 Lipschitz 条件 (1.1.3), 则初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 对任何初值 y_a 都是适定的.

下面以初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 为例简单地说明建立数值方法的基本思想. 初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 的解 $y(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上连续变量 x 的函数, 而数值计算该问题的解就是在区间 $[a, b]$ 内的有限个离散点 (例如, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$)

处计算函数 $y(x)$ 的近似值 $y_m \approx y(x_m)$, $m = 1, \dots, N$. 一般可将 x_0, x_1, \dots, x_N 取成等间距的, 即 $x_m = a + mh$, $m = 0, 1, \dots, N$, 称 $h = (b - a)/N$ 为网格步长. 建立数值方法的过程也就是通过一些手段将问题 (1.1.1)—(1.1.2) 转化为在给定的有限个离散点 $\{x_m\}$ 上近似 (1.1.1) 的有限差分或有限元方程的初值问题, 这个过程通常称为离散化. 关于离散化的方法, 通常有直接化微商为差商的方法、Taylor 级数展开法、数值积分方法等, 它们将在今后的章节中提到, 这里不再重复.

解常微分方程初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 的数值方法通常可分为如下两类.

(i) 单步法——计算 $y(x)$ 在 $x = x_{m+1}$ 处的值时仅用到 x_m 处的应变量及其导数值. 例如, Euler 方法 (1.2 节) 和 Runge-Kutta 方法 (1.3 节).

(ii) 多步法——计算 $y(x)$ 在 $x = x_{m+1}$ 处的值时需要应变量及其导数在 x_{m+1} 左侧的多个网格结点处的值. 例如线性多步方法 (1.4 节).

1.2 Euler 方法

1.2.1 Euler 方法及其几何意义

仍考虑初值问题 (1.1.1)—(1.1.2). 由于 $y(a)$ 已知, 则根据方程 (1.1.1) 可计算出 $y'(x)$ 在点 $x_0 = a$ 处的值, 即 $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. 如果假设 $x_1 = x_0 + h$ 充分靠近 x_0 , 则近似地有

$$y(x_1) \approx y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0) =: y_1.$$

因此可以用 y_1 作为 $y(x_1)$ 的近似. 类似地, 利用 y_1 和 $f(x_1, y_1)$ 又可计算出 $y(x)$ 在 $x_2 = x_0 + 2h$ 处的近似值

$$y_2 := y_1 + hf(x_1, y_1) \approx y(x_2).$$

一般地, 如果已知 $y(x)$ 在 $x_m = x_0 + mh$ 处的精确值或近似值, $0 \leq m < N$, 则可给出计算 $y(x_{m+1})$ 的近似公式

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m). \quad (1.2.1)$$

这就是离散初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 的 Euler 方法.

Euler 方法有着明显的几何意义: 事实上, 方程 (1.1.1) 的解是 (x, y) 平面上的一族积分曲线, 而积分曲线上任意点 (x, y) 处的斜率为 $f(x, y)$, 过点 (x_0, y_0) 的积分曲线就是初值问题 (1.1.1)—(1.1.2) 的解. 如果在点 (x_0, y_0) 处引出积分曲线 l_0 的切线, 切线斜率是 $f(x_0, y_0)$, 则该切线在 $x_1 = x_0 + h$ 处将与另一条积分曲线 l_1 相交, 交点的纵坐标记为 y_1 . 类似地, 在点 (x_1, y_1) 处可引出积分曲线 l_1 的切线,

它的斜率是 $f(x_1, y_1)$, 并在 $x_2 = x_1 + h$ 处与另一条积分曲线 l_2 相交, 交点的纵坐标记为 y_2 . 依次类推, 过点 (x_0, y_0) 的积分曲线就可以用上面得到的一条折线 $(x_0, y_0) \longleftrightarrow (x_1, y_1) \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow (x_m, y_m) \longleftrightarrow (x_{m+1}, y_{m+1}) \longleftrightarrow \cdots$ 来近似地代替, 见图 1.2.1.

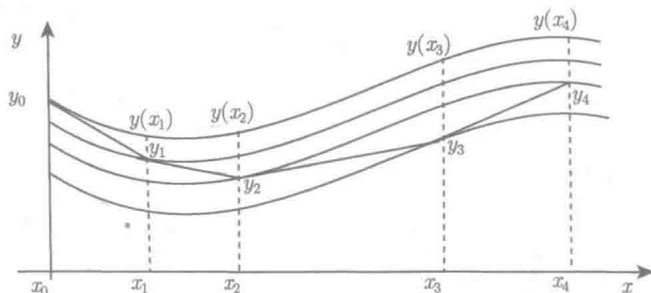


图 1.2.1 Euler 方法的几何说明

1.2.2 Euler 方法的误差分析

考虑微分方程 (1.1.1) 在区间 $[x, x+h]$ 上的积分

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds. \quad (1.2.2)$$

如果用左矩形积分公式计算上式右端的积分, 并令 $x = x_m$, 则有

$$y(x_m+h) = y(x_m) + hf(x_m, y(x_m)) + R_m, \quad (1.2.3)$$

其中

$$R_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s)) ds - hf(x_m, y(x_m)). \quad (1.2.4)$$

如果用 y_m 代替 (1.2.3) 中的 $y(x_m)$, 并舍去 R_m , 则可得到 Euler 方法 (1.2.1). 称方程 (1.2.3) 中的 R_m 是 Euler 方法的局部截断误差, 它表示当 $y_m = y(x_m)$ 时, 利用 Euler 方法计算 $y(x_m+h)$ 的误差.

引理 1.2.1 设 $f(x, y)$ 关于 x 和 y 均满足 Lipschitz 条件, K 和 L 是相应的 Lipschitz 常数, Euler 方法 (1.2.1) 的局部截断误差 R_m 满足

$$|R_m| \leq \frac{h^2}{2}(K+LM) =: R, \quad x_m < \xi < x_{m+1}, \quad (1.2.5)$$

式中

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \{|y'(x)|\} = \max_{a \leq x \leq b} \{|f(x, y(x))|\}.$$

证明 由方程 (1.2.4) 出发, 可得

$$\begin{aligned}
 |R_m| &= \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} [f(s, y(s)) - f(x_m, y(x_m))] ds \right| \\
 &= \left| \int_{x_m}^{x_{m+1}} [f(s, y(s)) - f(x_m, y(s)) + f(x_m, y(s)) - f(x_m, y(x_m))] ds \right| \\
 &\leq \int_{x_m}^{x_{m+1}} |f(s, y(s)) - f(x_m, y(s))| ds \\
 &\quad + \int_{x_m}^{x_{m+1}} |f(x_m, y(s)) - f(x_m, y(x_m))| ds \\
 &\leq K \int_{x_m}^{x_{m+1}} |s - x_m| ds + L \int_{x_m}^{x_{m+1}} |y(s) - y(x_m)| ds \\
 &\leq \frac{1}{2} K h^2 + L \int_{x_m}^{x_{m+1}} |y'(\xi)| \cdot |s - x_m| ds \\
 &\leq \frac{h^2}{2} (K + LM), \quad x_m < \xi < x_{m+1}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

有了局部截断误差 R_m 的界之后, 可进一步研究各时间步的局部误差的累积, 即估计整体误差 $\varepsilon_m = y(x_m) - y_m$ 的界, 其中 y_m 和 $y(x_m)$ 分别是差分方程 (1.2.1) 和微分方程 (1.1.1) 的精确解.

定理 1.2.2 如果 $f(x, y)$ 关于 x 和 y 均满足 Lipschitz 条件, K 和 L 为相应的 Lipschitz 常数, 且当 $h \rightarrow 0$ 时, $y_0 \rightarrow y(x_0)$, 则 Euler 方法 (1.2.1) 的解 $\{y_m\}$ 一致收敛于初值问题 (1.1.1)–(1.1.2) 的解, 且整体截断误差 ε_m 满足估计式

$$|\varepsilon_m| \leq e^{L(b-a)} |\varepsilon_0| + \frac{h}{2} (M + K/L) (e^{L(b-a)} - 1). \quad (1.2.6)$$

如果 $y_0 = y(x_0) = y(a)$, 即 $\varepsilon_0 = 0$, 则由上式得

$$|\varepsilon_m| = O(h).$$

这说明 Euler 方法的整体截断误差与 h 同阶.

证明 将方程 (1.2.3) 和 (1.2.1) 相减, 得

$$\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m + h[f(x_m, y(x_m)) - f(x_m, y_m)] + R_m. \quad (1.2.7)$$

等式两边取绝对值, 并利用 Lipschitz 条件, 则有

$$|\varepsilon_{m+1}| \leq (1 + hL) |\varepsilon_m| + |R_m|.$$

对 $k = m + 1, m, \dots, 1$, 反复利用上述不等式和不等式 (1.2.5), 有

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\leq (1 + hL)|\varepsilon_{k-1}| + R \\ &\leq (1 + hL)^2|\varepsilon_{k-2}| + R + (1 + hL)R \\ &\quad \dots\dots \\ &\leq (1 + hL)^k|\varepsilon_0| + R \sum_{i=0}^{k-1} (1 + hL)^i \\ &= (1 + hL)^k|\varepsilon_0| + \frac{R}{hL} ((1 + hL)^k - 1). \end{aligned}$$

由函数 $e^x - x - 1$ 的单调性知

$$1 + hL \leq e^{hL}, \quad h > 0, L > 0.$$

如果 $x_k = a + kh \in [a, b]$, 则有

$$(1 + hL)^k \leq e^{khL} \leq e^{L(b-a)},$$

进而有

$$|\varepsilon_k| \leq e^{L(b-a)}|\varepsilon_0| + \frac{R}{hL}(e^{L(b-a)} - 1), \quad k = 1, 2, \dots \quad \blacksquare$$

从 (1.2.5) 和 (1.2.6) 可以看到, Euler 方法 (1.2.1) 的整体截断误差的阶要比局部误差低一阶.

1.2.3 Euler 方法的稳定性

定义 1.2.1 称 Euler 方法 (1.2.1) 是稳定的, 如果存在常数 C 和 h_0 , 使得 Euler 方法的解 y_m 和 z_m 满足

$$|y_m - z_m| \leq C|y_0 - z_0|, \quad 0 < h < h_0, \quad a \leq mh \leq b, \quad (1.2.8)$$

其中 y_m 和 z_m 是方程 (1.2.1) 分别以 y_0 和 z_0 为初始值的解.

该稳定性表示, 对于任意 $h \in (0, h_0)$, Euler 方法 (1.2.1) 的精确解连续地依赖于初始值.

定理 1.2.3 在定理 1.2.2 的假设条件下, Euler 方法 (1.2.1) 是稳定的.

证明 考虑

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m)$$

和

$$z_{m+1} = z_m + hf(x_m, z_m).$$