“十三五”国家重点出版物出版规划项目

线性代数

LINEAR ALGEBRA

杜红　张向华　姜文彪　编 / 母丽华　主审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

五” 国家重点出版物出版规划项目

线性代数

杜 红 张向华 姜文彪 编
母丽华 主审

机械工业出版社

本书的编写符合教育部颁发的工科本科线性代数课程教学大纲的基本要求。全书共分5章：第1章，行列式；第2章，矩阵及其初等变换；第3章，线性方程组；第4章，矩阵的特征值和二次型；第5章，线性空间与线性变换，每节末配有练习，章末配有两套综合练习，书末附有习题答案。书中第1至4章的教学学时约为40学时，第5章可供对数学要求较高的专业选用。

本书可作为大学工科专业的基础课教材，也可作为科技人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/杜红，张向华，姜文彪编. —北京：机械工业出版社，2018.4

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

ISBN 978-7-111-58923-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①杜…②张…③姜… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第003223号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 汤 嘉

责任校对：陈 越 封面设计：鞠 杨

责任印制：孙 炜

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2019年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm · 12.5印张 · 232千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58923-5

定价：32.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

“线性代数”在高等理工科学校的教学计划中是一门必修的基础理论课。本书的编写是以国家精品在线开放课程建设为契机，注重结合学生专业背景，立足应用，由授课教师结合多年的教学经验及课程建设成果编写而成的，适合于一般高等理工科院校各专业的学生使用。

本书符合教育部颁发的工科本科线性代数课程教学大纲的基本要求。编者注重知识点之间的衔接和基本理论知识的引入。针对线性代数应用性强这一特点，注重对基础知识的应用，进而提高学生应用理论知识解决实际问题的能力。本书每节末配有练习，利于学生对基础知识和基本概念的理解。每章末配有两套综合练习，重在考查综合运用基本知识解决问题的能力。同时，还介绍了行列式、二次型等历史发展过程及数学家的轶事，在带有一定趣味性的同时激发学生的兴趣，并使学生能了解数学的历史。

本书的编写受到了哈尔滨工业大学、佳木斯大学等院校老师的帮助和支持，他们对教材的编写提出了宝贵的意见，谨在此表示衷心的感谢。编者付出了很多努力，但由于水平有限，书中存在着一定的欠缺和不足，恳请各位同行不吝指正，从而使我们更明确教材中的短长，进而扬长避短，改进教学。

编　者

目　　录

第 1 章

行列式

行列式的理论起源于线性方程组，它是一个重要的数学工具，在数学的许多分支及其他学科的研究中都有广泛的应用．本章主要介绍全排列、逆序数、n 阶行列式的定义，研究 n 阶行列式的性质、计算方法及用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则等内容．

1.1 二阶行列式和三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

在许多实际问题中，人们常常会遇到求解线性方程组的问题．我们在初等数学中曾经学过如何求解二元一次方程组和三元一次方程组．例如，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_i（$i=1,2$）表示未知量，a_{ij}（$i=1,2$；$j=1,2$）表示未知量的系数，b_i（$i=1,2$）表示常数项．当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法可求得方程组（1.1）的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

观察式（1.2）的特点，式中分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得．其中分母是由方程组（1.1）的四个系数确定，把这四个数按它们在方程组（1.1）中的位置，做两行两列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

定义 1.1 代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（1.3）的二阶行列式(second order determinant)．记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

其中 a_{ij}（$i=1,2$；$j=1,2$）称为行列式的元素．a_{ij} 的下标 i 表示它所在行的序号，称为行标，j 表示它所在列的序号，称为列标．

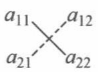

图 1.1

二阶行列式的计算可遵循如图 1.1 所示的对角线法则（diagonal principle），图 1.1 中实线称为行列式的主对角线，虚线称为行列式的副对角线，二阶行列式的值等于它的主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积．

根据二阶行列式的定义，方程组（1.1）的唯一解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq0$ 时，方程组（1.1）的唯一解可简单表示为 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$（$j=1,2$）.

其中 D 称作方程组（1.1）的系数行列式，D_j（$j=1,2$）就是用方程组的常数列代替系数行列式的第 j 列所得的行列式．

例 1.1 求解方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2=5, \\ 3x_1+2x_2=11. \end{cases}$

解 计算二阶行列式

$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7$，$D_1=\begin{vmatrix} \underline{\quad} & -1 \\ 11 & \underline{\quad} \end{vmatrix}=21$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & \underline{\quad} \end{vmatrix}=7$，由于 $D=7\neq0$，方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$，$x_2=\dfrac{\underline{\quad}}{D}=1$.

例 1.2 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，问：(1) 当 λ 为何值时 $D=0$，(2) 当 λ 为何值时 $D\neq0$?

解 $$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda,$$

若 $\lambda^2-3\lambda=0$，则 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$. 因此可得

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$；(2) 当 $\lambda\neq0$，$\lambda\neq3$ 时，$D\neq0$.

1.1.2 三阶行列式

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

用消元法求方程组的解．我们引入三阶行列式的定义．把方程组（1.5）的 9 个系数做成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.6}$$

定义 1.2 代数和

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ 称为数表（1.6）的三阶行列式的值，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.7}$$

为了便于记忆，三阶行列式的计算可采用如图 1.2 所示的对角线法则．

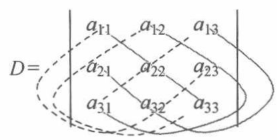

图 1.2 对角线法则

三条实线看作是平行于主对角线的连线，实线上的三个元素的乘积赋予“+”号，三条虚线看作是平行于副对角线的连线，虚线上的三个元素的乘积赋予“-”号．

三阶行列式的计算也可采用如图 1.3 所示的**添补法**．

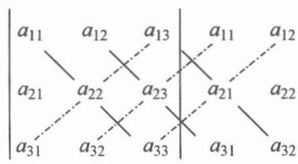

图 1.3 添补法

三条实线上的三个元素的乘积赋予“+”号，三条虚线上的三个元素的乘积赋予“-”号．

例 1.3 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$．

解 $D = 2\times(-5)\times1 + (-4)\times3\times1 + 1\times1\times\underline{\quad} - 1\times\underline{\quad}\times1 - (-4)\times1\times1 - 2\times(-1)\times3 = -8.$

例 1.4 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 3x^2 + 4x + 18\underline{\qquad} - 2x^2\underline{\quad} \\ &= x^2 - 5x + 6, \end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=$____或 $x=$____.

练习1

一、选择题

1. 与行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值相等的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值等于（　　）.

（A）1；　（B）-1；　（C）0；　（D）2.

3. 方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0$ 的根是（　　）.

（A）$x_1=1$，$x_2=3$；　　（B）$x_1=2$，$x_2=3$；

（C）$x_1=0$，$x_2=1$；　　（D）$x_1=-1$，$x_2=1$.

4. 行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}\neq 0$ 的充要条件是（　　）.

（A）$k\neq -2$ 且 $k\neq -3$；　　（B）$k\neq -1$ 且 $k\neq 3$；

（C）$k\neq 1$ 且 $k\neq -3$；　　（D）$k=-1$ 且 $k=3$.

二、填空题

1. 二阶行列式的代数和共________项，每一项是________个元素乘积，三阶行列式的代数和共________项，每一项是________个元素乘积.

2. 已知二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$ 称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是方程组的________行列式.

3. 若行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & a \end{vmatrix}\geqslant 0$，则 a 应满足________.

4. 三阶行列式 $D_3=\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}=$________.

1.2 全排列及其逆序数

观察二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

可以发现二阶、三阶行列式的项数与行（列）标的排列有关，而且当行标按自然顺序排好以后，其符号与列标有关．于是为了给出 n 阶行列式的概念，这里引入全排列与逆序数的概念．

定义 1.3 把自然数 1，2，…，n 组成一个有序数列，称为这 n 个元素的全排列（total permutation），简称排列（permutation）．

例如：(1) 自然数 1，2，3 构成的不同排列有 3!，共 6 种．即

123，231，312，132，213，321.

(2) 有 n 个互异元素 p_1，p_2，…，p_n构成的不同排列有______种．

定义 1.4 在 n 个元素全排列中，规定自然数从小到大次序的排列为标准排列．设 $p_1p_2\cdots p_n$为一个全排列，如果某两个元素的先后次序与标准排列不同时，称这两个元素之间有 1 个逆序（inverse order）．排列中逆序的总和称为排列的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．

一般地，可以按照下面的方法计算逆序数：设一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$，考虑数 p_i，若排在 p_i前面比 p_i大的元素有 t_i个（$i=1, 2, \cdots, n$），则该排列的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

定义 1.5 逆序数为偶数的排列称为偶排列（even permutation），逆序数为奇数的排列称为奇排列（odd permutation）．

例如：在 321 这个排列中，构成逆序的数对有 32，31，21，因此 $\tau(321)=3$，排列 321 为奇排列．

在 51423 这个排列中，构成逆序的数对有 51，54，52，53，42，43，因此 $\tau(51423)=$________，51423 为________排列．

排列 2754613 的逆序数，也可以这样计算：

(1) 3 前面有 6，4，5，7 四个大于 3 的数；

(2) 1 前面有 6，4，_______五个大于 1 的数；

(3) 6 前面有 7 比 6 大；

(4) 4 前面有 5，___两个大于 4 的数；

(5) 5 前面有 7 比 5 大．

至此，再没有大数排在小数的前面了，于是

$$\tau(2754613) = 4 + \_\_\_ + 1 + 2 + \_\_\_ = 13,$$

这是一个奇排列．

定义 1.6 把一个排列中某两个元素的位置互换，而其余元素的

位置不动，就得到一个新的排列，这样从一个排列到另一个排列的变换称为对换（transposition），元素 i 与 j 的对换记作 (i,j). 将两个相邻的元素对换，称为相邻对换.

例如，排列 321，经过 1，2 对换，就变成 312，我们知道 321 是奇排列，而 312 是偶排列，这样施行一次对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的特殊情形. 即排列

$$\cdots\cdots ij\cdots\cdots$$

经相邻对换 (i,j)，变成排列

$$\cdots\cdots ji\cdots\cdots,$$

比较上面两个排列的逆序数. 显然，i，j 以外的数彼此间的逆序情况在两个排列中是一样的；i，j 以外的数与 i 或 j 的逆序情况在两个排列中也是一样的. 现在看 i，j，若 $i<j$，则经对换 (i,j) 后，逆序数增加 1，即后一排列的逆序数比前一排列多 1；若 $i>j$，则经对换 (i,j) 后，逆序数减少 1，即后一排列的逆序数比前一排列少 1. 无论哪种情形，都改变了排列的奇偶性. 这就证明了相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般情形. 设排列

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$$

经对换 (i,j)，变成排列

$$\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots,$$

容易看出，这一对换 (i,j) 可以通过如下 $2s+1$ 次相邻对换来实现. 即将排列

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$$

经 s 次相邻对换变成如下排列

$$\cdots\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots\cdots,$$

再经 $s+1$ 次相邻对换变成排列

$$\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots,$$

由于每做一次相邻对换便改变一次排列的奇偶性，而 $2s+1$ 为奇数，因此排列 $\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$ 与排列 $\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots$ 的奇偶性相反. 这就证明了在一般情形下，对换改变排列的奇偶性.

推论 1.1 奇（偶）排列变成标准排列的对换次数为奇（偶）数.

例 1.5 在 1，2，3，4，5，6，7，8，9 组成的下列排列中，选择 i 和 j，使得 $58i419j73$ 为奇排列.

解 若 $i=2$，$j=6$，求得 $\tau(582419673)=18$，再由定理 1.1 得到，对换改变排列的奇偶性，从而可以得到，当 $i=6$，$j=2$ 时，$58i419j73$ 为奇排列.

练习2

一、选择题

1. 排列41325867的逆序数为（　　）.

（A）4；　（B）7；　（C）6；　（D）5.

2. 下列排列是偶排列的是（　　）.

（A）53214；　（B）654321；　（C）12345；　（D）32145.

3. 求出 i 和 j，使得排列 $1274i56j9$ 成为偶排列（　　）.

（A）$i=8$，$j=3$；　（B）$i=3$，$j=8$；

（C）$i=10$，$j=3$；　（D）$i=3$，$j=10$.

二、填空题

1. 排列6427531的逆序数为________，该排列为________排列.

2. 在1，2，3，4四个数的排列中，共有________个排列，其中奇排列________个，偶排列________个.

3. 排列中对任意两个元素进行一次对换________排列的奇偶性（填“改变或不改变”）.

1.3 n 阶行列式的定义

由全排列及逆序数的定义，总结二阶、三阶行列式的规律如下：

（1）项数正好是阶数的阶乘，即二阶行列式的项数为2!，三阶行列式的项数为3!；

（2）每一项都是由每一行、每一列的一个元素组成的乘积，而且这些元素取自不同的行和不同的列；

（3）带“+”号和“-”号的项数各占一半，而且当行标按自然顺序排好以后，其符号与列标排列的逆序数有关，偶排列的带“+”号，奇排列的带“-”号.

于是，二阶、三阶行列式可分别记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对1，2两个数的所有排列 j_1j_2 求和，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对1，2，3三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据这个规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义1.7　用 n^2 个元素 a_{ij}（$i,j=1,2,\cdots,n$）做成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

该数表中所有取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 **n 阶行列式**（n-order determinant）．其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和．记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

特别地，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$（注意：这里符号“$|\ \ |$”不是绝对值）.

例 1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的特点是主对角线以下的元素全为零（以后称这种行列式为上三角行列式）．根据定义 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，在此行列式中，当 $j_p<p$ 时，元素 $a_{pj_p}=0$，故在定义式中，可能不为零的项中的任意因子 a_{pj_p} 必须满足 $j_p\geqslant p$，即

$$j_1\geqslant 1,\ j_2\geqslant 2,\ \cdots,\ j_{n-1}\geqslant n-1,\ j_n\geqslant n.$$

能满足上述关系的列标排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，$\tau(12\cdots n)=0$. 故有

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

和对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即三角行列式和对角行列式的值都等于主对角线元素的乘积.

例 1.7 计算 n 阶行列式（其副对角线以上的元素都为零）

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

解 在 D_n 的 $n!$ 项中，仅剩下一项 $(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots21)}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n,1}$ 可能不为零，该项列标排列的逆序数

$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=$_____,

故

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n,1}.$$

同理可得行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}\, a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}.$$

练习 3

一、选择题

1. $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(\qquad).$

(A) 0;　　　　(B) 1;

(C) $-a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;　　　　(D) $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

2. 下列构成 6 阶行列式展开式的各项中，取“+”的是(　　).

(A) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$;　　　　(B) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$;

(C) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$;　　　　(D) $a_{31}a_{52}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$.

3. $D=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=($　　$)$.

(A) $-a^4$;　　(B) a^3;　　(C) a^4;　　(D) 0.

二、填空题

1. n 阶行列式由________项的代数和组成，其中每一项为行列式中位于不同行不同列的________个元素的乘积，若将每一项的各元素所在行标按自然顺序排列，那么列标构成一个 n 级排列．若该排列为奇排列，则该项的符号为________号；若为偶排列，该项的符号为________号．

2. n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示自然数________的一个排列，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示这个排列的________，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示所有 n 阶排列________．

3. 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{24}$ 的项是________和________．

4. $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________．

1.4　行列式的性质

直接根据行列式的定义来计算 n 阶行列式往往是比较烦琐的．因此，我们将推导行列式的一些基本性质，利用这些性质不仅可以简化行列式的计算，而且这些性质在行列式的理论研究中也有着非常重要的作用．

定义 1.8　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 D 的行与列互换，得到一个新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^{T}为 D 的转置行列式（transposed determinant）.

性质 1.1 行列式与其转置行列式的值相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 设 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

由定义 1.7 知

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=D. \end{aligned}$$

性质 1.1 说明，在行列式中行与列的地位是对称的，所有对行成立的性质对列同样成立，反之亦然.

性质 1.2 互换行列式的两行（列），行列式的值变号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 显然

$$左端=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n},$$

该展开式中的每一项 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$也是右端展开式中的项.

现在确定项 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$在右端展开式中应带的符号．由于交换第 p 行和第 q 行后，a_{pj_p}在右端行列式中位于第 q 行第 j_p列；而 a_{qj_q}则位于第 p 行第 j_q列．所以这一项 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$的行标与列标所成的排列分别是

$$1\cdots q\cdots p\cdots n$$

和

$$j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n.$$

所以 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$作为右端行列式的展开式中的项，它的前面所带的符号是

$$(-1)^{\tau(1\cdots q\cdots p\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)},$$

故有左端 = 右端.

例如，$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -(2c-3b).$

推论 1.2 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

性质 1.3 用一个数 k 乘行列式，等于将行列式某一行（列）中的所有元素都乘同一个数 k，即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

换句话说，若行列式某行（列）元素有公因子 k，则可以把它提到行列式符号外面.

证 由行列式的定义有

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，若 $k\neq 0$，

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & u \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & u \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ku \end{vmatrix} = \underline{\qquad}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & u \end{vmatrix}.$$

性质 1.4 如果行列式中有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值等于零.