九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·华东师大数学系编

教你用更多的自信面对未来！

数学分析

（第四版·下册）

同步辅导及习题全解

主编 杨阳

一书三用
同步辅导+考研复习+教师备课

习题超全解
名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

新版

扫码在线阅读电子书，
让你的学习更简单！

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第四版·下册）同步辅导及习题全解

主 编 杨 阳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

本书是为了配合高等教育出版社出版，华东师范大学数学系编写的《数学分析》（第四版·下册）一书而编写的配套辅导书。

本书共有十二章，分别介绍数项级数、函数列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、含参量积分、曲线积分、重积分、曲面积分、向量函数微分学等内容。本书按教材内容安排全书结构，各章基本都包括本章导航、各个击破、课后习题全解、走进考研四部分内容。全书按教材内容，对各章的重点、难点做了较深刻的分析，针对各章节习题给出详细解题过程，并附以知识点窍和逻辑推理，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题。各章还附有典型例题与解题技巧，以及历年考研真题评析。

本书可作为数学专业学生学习“数学分析”课程的辅导材料和复习参考用书，也可作为数学专业考研学生强化复习的指导书及“数学分析”课程教师的教学参考书。

由于时间仓促及编者水平有限，书中难免存在疏漏甚至错误之处，恳请广大读者和专家批评指正。如有疑问，请联系我们（微信：JZCS15652485156 或 QQ：753364288）。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（第四版·下册）同步辅导及习题全解 / 杨阳主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2018.9
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-6835-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第207931号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：张玉玲　加工编辑：焦艳芳　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 数学分析（第四版·下册）同步辅导及习题全解 SHUXUE FENXI (DI-SI BAN · XIACE) TONGBU FUDAO JI XITI QUANJIE
作　　者	主　编　杨　阳
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	三河市祥宏印务有限公司
规　　格	170mm×240mm　16 开本　20 印张　527 千字
版　　次	2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	38.80 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

前言

foreword

“数学分析”是数学专业最重要的一门专业基础课。大学本科乃至研究生阶段的很多后续课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用，至于它的基本概念、思想和方法，更可以说是无处不在。数学专业后续专业课程如“微分方程”“实变函数和复变函数”“概率论”“统计及泛函分析”“微分几何”等都要以“数学分析”为基础。同时，“数学分析”也是数学专业各个方向上考研必考的专业基础课。华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版 · 下册)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本配套辅导书。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到“数学分析”这门课程的特点，我们在内容上作了以下安排：

1. 本章导航。以图文的形式概括各章知识点及其之间的联系，使读者对全章内容有一个清晰的了解。

2. 各个击破。对每章知识点作了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确、有的放矢。

3. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促使其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

4. 走进考研。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题，并对其进行了详细的解答，以开拓广大同学的解题思路，使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

编　者

2018 年 7 月

目 录

contents

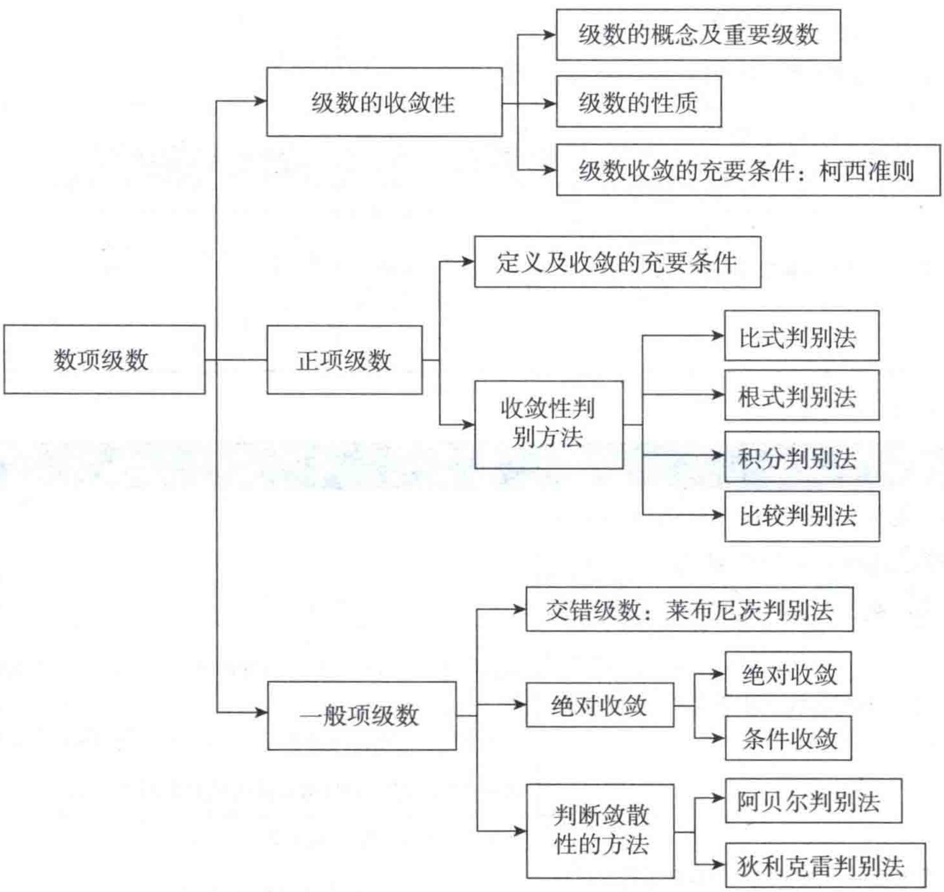
目录
contents

目 录

contents

第十二章
数项级数

本章导航



各个击破

级数的收敛性

1. 级数收敛性定义

	定义	说明
数项级数	给定一个数列 $\{u_n\}$,对它的各项依次用"+"号连接起来的表达式 $u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots$ 称为**数项级数或常数项无穷级数**,其中 u_n 为级数的**通项**	数项级数常记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,或简记为 $\sum u_n$ 例:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
部分和	数项级数的前 n 项之和记为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 称为数项级数**第 n 个部分和(简称部分和)**	
级数收敛(发散)	若数项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S(即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$),则称数项级数**收敛**,称 S 为数项级数**的和**	例:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(\|x\|<1)$
	若 $\{S_n\}$ 是发散数列,则称数项级数发散,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$	例:$\sum\limits_{n=1}^{2n}(-1)^n=0$ $\sum\limits_{n=1}^{2n+1}(-1)^n=-1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n=+\infty$

2. 级数的基本性质

级数的性质	说明
若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛,则对任意常数 c,d,级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛,且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$	
去掉、增加或改变级数的有限个项,并不改变级数的敛散性	若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,其和为 S,则级数 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 也收敛,且其和 $R_n=S-S_n$. 级数 $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的第 n 个余项,它表示以部分和 S_n 代替 S 所产生的误差
在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变它的和	对发散级数不可随便加括号 例如:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散,但级数加括号后为 $(-1+1)+(-1+1)+\cdots=0$

级数的性质	说 明
设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_1$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_2$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=S_1\pm S_2$	
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$，c是与n无关的常数，则$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$也收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n=cS$	

3. 级数收敛的柯西准则

级数收敛的充要条件是：任给正数ε，总存在正整数N，使得当$m>N$以及对任意的正整数p，都有$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$.

推论：若级数收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

［说明］可用此推论的逆否命题推断级数发散.

4. 几种重要的级数

级数		说明
等比级数	等比级数（几何级数）$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$ $|q|<1\Rightarrow$级数收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$；$|q|>1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，级数发散； $q=1\Rightarrow S_n=na$，级数发散；$q=-1\Rightarrow$级数发散	$0\leqslant|q|<1$时收敛； $|q|\geqslant1$时发散
调和级数	调和级数形式为$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$	调和级数是发散级数
p级数	p级数形式为$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$，$p>1$收敛，$p\leqslant1$发散	

小提示：讨论数项级数的敛散性与数列极限的存在性本质相同，于是可以将级数的各种性质转化成它的部分和数列的各种性质来讨论.

例1 以等比数列为通项的几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$的敛散性，其中$a\neq0$，$r$是公比.

解 (1) 当$|r|\neq1$时，级数的部分和$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}$.

(i) 当$|r|<1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}$，

因此，级数收敛. 其和是$\frac{a}{1-r}$，即$\sum_{n=0}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$.

(ii) 当$|r|>1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$.

因此级数发散.

(2) 当 $|r|=1$ 时.

(i) 若 $r=1$,则级数为 $a+a+\cdots+a+\cdots$,$S_n=na$,

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty(a\neq 0)$,即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

(ii) 若 $r=-1$,则级数为 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$,

$S_n=\begin{cases}0, n\text{ 为偶数}\\ a, n\text{ 为奇数}\end{cases}$,即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

综上所述,当 $|r|<1$ 时,级数收敛;当 $|r|\geqslant 1$ 时,级数发散.

例 2 用柯西准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

证明 对任意的 $n>m>1$,有

$$\left|\frac{\sin(m+1)}{(m+1)^2}+\frac{\sin(m+2)}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{1}{m}.$$

因此 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>m>N$ 时,满足

$$\left|\frac{\sin(m+1)}{(m+1)^2}+\frac{\sin(m+2)}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}\right|<\frac{1}{m}<\varepsilon,$$

由柯西收敛准则可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

小提示: 收敛级数可任意加括号,所得的级数仍为收敛级数,且两者具有相同的和.发散级数不满足上述性质.

正项级数

定义:数项级数各项都是由正数组成的级数称为**正项级数**		
收敛准则	正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界,即存在某正数 M,对一切正整数 n,有 $S_n\leqslant M$	由此可将求 $\{S_n\}$ 极限问题转化到估计 S_n 是否有上界的问题
达朗贝尔判别法(或称比式判别法)	设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数,若 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$,级数 $\sum u_n$ 收敛 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$ 或 $q=+\infty$,级数 $\sum u_n$ 发散	若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$,则推不出级数的敛散性,例:$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛
根式判别法	设 $\sum u_n$ 为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ (1) 当 $l<1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛 (2) 当 $l>1$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散	

续表

定义:数项级数各项都是由正数组成的级数称为**正项级数**		
积分判别法	原理:利用非负函数的单调性和积分性质,并以反常积分为比较对象来判断正项级数的敛散性	积分余项 r_n 可估计,$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$
	设 $f(x)$ 为$[1,+\infty)$ 上非负减函数,那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散	
比较判别法	设$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数,如果存在某正数 N,对一切 $n > N$ 都有 $u_n \leqslant v_n$ (1) 若级数$\sum v_n$ 收敛,则级数$\sum u_n$ 也收敛 (2) 若级数$\sum u_n$ 发散,则级数$\sum v_n$ 也发散	可利用已知级数的敛散性来判断所要考虑级数的敛散性
	若存在 N,使当 $n > N$ 时有$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$,则 (1) 由$\sum b_n$ 收敛$\Rightarrow \sum a_n$ 收敛 (2) 由$\sum a_n$ 发散$\Rightarrow \sum b_n$ 发散	
	设$\sum u_n$ 和$\sum v_n$ 是两个正项级数,若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ (1) 当$0<l<+\infty$时,级数$\sum u_n$,$\sum v_n$ 同时收敛或发散 (2) 当 $l=0$ 且级数$\sum v_n$ 收敛,级数$\sum u_n$ 也收敛 (3) 当 $l=+\infty$ 且级数$\sum v_n$ 发散,级数$\sum u_n$ 也发散	$\sum v_n$ 可取等比级数或 p 级数,有时也直接研究 u_n 趋于零的阶

例 3 判断级数$\frac{2}{1} + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 3} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{15\cdot 9} + \cdots + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot(2+3(n-1))}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(1+4(n-1))} + \cdots$ 的敛散性.

解 利用达朗贝尔判别法(比式判别法).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{1+4n} = \frac{3}{4} < 1.\text{ 因此}\sum u_n\text{ 收敛,即原级数收敛.}$$

例 4 判断函数$\sum \frac{3+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解 利用根式判别法.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}} = \frac{1}{2} < 1,\text{因此}\sum u_n\text{ 收敛,即原级数收敛.}$$

例 5 讨论 p 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 令 $f(x) = \frac{1}{x^p}$,$p > 0$ 时,$f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上非递减.

当 $p > 1$ 时,积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

当 $0 < p \leqslant 1$ 时,积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

因此当 $p > 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛;当 $0 < p \leqslant 1$ 时,级数发散;当 $p \leqslant 0$ 时,级数发散.

综上所述，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当且仅当 $p>1$ 时收敛.

例 6 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$ 的敛散性.

解 $u_n=\dfrac{1}{n^2-n+1}>0$，因为 $\dfrac{n^2}{2}-n+1>0$，

故 $\dfrac{1}{n^2-n+1}<\dfrac{2}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$ 收敛.

一般项级数

名称	判定定理	说明
莱布尼茨判别法	**交错级数**：若级数的各项符号正负相间，即 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots(u_n>0)$，则称为**交错级数** 若交错级数满足下述两个条件 (1) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 则级数收敛	用莱布尼茨判别法判别交错级数是否收敛，要考察 u_n 与 u_{n+1} 的大小，比较 u_n 与 u_{n+1} 大小的方法有三种： (1) 比值法，即考察 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 是否小于 1 (2) 差值法，即考察 u_n-u_{n+1} 是否大于 0 (3) 由 u_n 找出一个连续可导函数 $f(x)$，使 $u_n=f(n)$，考察 $f'(x)$ 是否小于 0
绝对收敛	(1) 若级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 各项绝对值所组成的级数 $\lvert u_1\rvert+\lvert u_2\rvert+\cdots+\lvert u_n\rvert+\cdots$ 收敛，则称原级数**绝对收敛** (2) 若 $\sum\lvert u_n\rvert$ 收敛，则称 $\sum u_n$ 绝对收敛；若 $\sum\lvert u_n\rvert$ 发散，而 $\sum u_n$ 收敛，则称为**条件收敛** (3) 设级数 $\sum u_n$ 绝对收敛，且其和等于 S，则任意重排后得到的级数 $\sum v_n$ 也绝对收敛，且有相同的和数	
柯西定理	若级数 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都绝对收敛，则对所有乘积 u_iv_j 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛，且其和等于两级数和的乘积	
阿贝尔判别法	设级数 $\sum u_n$ 收敛又 $\{v_n\}$ 单调有界，$\lvert v_n\rvert\leqslant M$，则级数 $\sum u_nv_n$ 收敛	
狄利克雷判别法	设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的部分和 $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$ 有界，$\lvert B_n\rvert\leqslant M$，又 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛	

小提示：在莱布尼茨判别法中，数列$\{u_n\}$单调递减的条件是必不可少的.

例 7 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{n}(x>0)$的敛散性.

解 当$0<x\leqslant 1$时，上述交错级数满足莱布尼茨判别法的两个条件，即①数列$\{u_n\}$单调递减；②$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 故级数收敛.

当$x>1$时，通项的极限不为0，故级数发散.

课后习题全解

级数的收敛性(教材下册 P5)

1. 逻辑推理 先确定级数部分和S_n的表达式，再根据级数的收敛定义求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. 若极限存在，则级数收敛.

解题过程 (1) 因为

$$S_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{5}$，由定义知该级数收敛，且和为$\dfrac{1}{5}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$是公比为$\dfrac{1}{2}$的级数，故收敛于$\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，同理$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛于$\dfrac{1}{2}$.

由级数的性质知$S_n=\sum\limits_{n=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

级数收敛且和为$\dfrac{3}{2}$.

(3) 因为$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

从而$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$，故该级数收敛且和为$\dfrac{1}{4}$.

(4)
$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$，故级数收敛且和为 $1-\sqrt{2}$.

(5)(错位相减法求部分和 S_n)$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$，则有

$$S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}(n\geqslant 2).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$，故级数收敛且和为 3.

2. 知识点窍 级数的性质：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，c 是与 n 无关的常数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$ 也收敛.

逻辑推理 利用反证法，将级数发散转化成级数收敛来证明.

解题过程 假设 $\sum cu_n$ 收敛，因为 $c\neq 0$，所以 $\sum\dfrac{1}{c}(cu_n)=\sum u_n$ 也收敛.

与题目中的 $\sum u_n$ 发散矛盾.

故假设不成立，即若 $\sum u_n$ 发散，$\sum cu_n$ 也发散($c\neq 0$) 成立.

3. 逻辑推理 级数发散，则存在某个正数 ε_0，使 $|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0$，再利用不等式的相关变换，即可求解.

解题过程 (i) $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，但 $\sum(u_n+v_n)$ 不一定发散.

例：$\sum u_n=\sum\dfrac{1}{n}$ 与 $\sum v_n=\sum(-\dfrac{1}{n})$ 都发散，而 $\sum(u_n+v_n)=0+0+0+\cdots+0$ 收敛.

(ii) 若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 发散，且 $u_n\geqslant 0$，$v_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$，则 $\exists\,\varepsilon_0,\varepsilon_1>0$.

对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0(m_0>N)$ 和 p_0 及 $m_1(m_1>N)$ 和 p_1，有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0,$$
$$|v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}|\geqslant\varepsilon_1.$$

由此可知

$$|(u_{m_0+1}+v_{m_0+1})+(u_{m_0+2}+v_{m_0+2})+\cdots+(u_{m_0+p_0}+v_{m_0+p_0})|$$
$$=|(u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0})+(v_{m_0+1}+v_{m_0+2}+\cdots+v_{m_0+p_0})|$$
$$\geqslant|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

由柯西准则得 $\sum(u_n+v_n)$ 也发散.

4. 逻辑推理 由数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 可求得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的前几项和 S_n 的极限为 a_1-a，然后根据级数收敛定义即可得证.

解题过程 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以级数的前 n 项和极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-a,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

5. 逻辑推理 首先确定级数前 n 项和 S_n 的表达式，然后求 $\lim_{n\to\infty} S_n$. 若极限存在，则级数收敛且等于该极限；若极限不存在，则级数发散.

解题过程 (1) 级数的前 n 项和

$S_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$,

因为 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_1) = \infty$，所以级数发散.

(2) 级数的前 n 项和

$$S_n = \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) + \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}},$$

因为 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$,

所以级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$.

柯西准则：级数收敛的充要条件是对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p，都有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$.

6. 知识点窍 题 4、5 的结论：① 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$；

② 数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty (b_n \neq 0)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$.

逻辑推理 由因式分解把部分和公式表达为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$，而数列 $\{a_n\}$ 收敛易求，则再应用题 4、5 结论求出级数的和.

解题过程 (1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\right)$,

而数列 $\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$ 收敛于零，且 $a_1 = \frac{1}{a}$，由第 4 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a+1-1} - 0 = \frac{1}{a}(a \neq 0).$$

(2) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right]$,

而数列 $\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于 0，且 $a_1 = 1$，由第 4 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = a_1 - a = 1.$$

(3) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$，而数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 收敛于 0，

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{1^2+1} - 0 = \frac{1}{2}.$$

7. 逻辑推理 根据柯西准则，要判断级数 $\sum \mu_n$ 的敛散性，只需对任意的正整数 p 判断 $|\mu_{m+1} + \mu_{m+2} + \cdots + \mu_{m+p}|$ 在 $m \to \infty$ 时的极限是否存在. 通常采用放缩法和夹逼准则等.

解题过程 (1) 对任意的正整数 p,有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{|\sin 2^{m+k}|}{2^{m+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{m+k}}=\frac{1}{2^m}\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2^m},$$

因为 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2^m}=0$,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{Z}^+$,当 $m>N$ 时,

对任意的正整数 p,有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{k+m}}{2^{k+m}}\right|\leqslant\frac{1}{2^m}<\varepsilon.$$

由柯西准则可知级数收敛.

(2) 当 $p=1$ 时,$|\mu_{m+1}|=\left|\frac{(-1)^m(m+1)^2}{2(m+1)^2+1}\right|\geqslant\frac{(m+1)^2}{2(m+1)^2+(m+1)^2}=\frac{1}{3}$,

故级数发散. 有

(3) 对任意的正整数 p,有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{1}{m+k}\right|=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}$$

$$=\frac{1}{m+1}-\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\right)$$

$$<\frac{1}{m+1}<\frac{1}{m}.$$

故对任给的正数 $\varepsilon>0$,存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $m>N$ 及对任意的正整数 p,都有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{1}{m+k}\right|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

由柯西准则可知级数收敛.

(4) 当 $p=m$ 时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\right|=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\geqslant\frac{m}{\sqrt{(m+m)^2+(m+m)}}$$

$$\geqslant\frac{m}{\sqrt{2(m+m)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2\sqrt{2}}$,则对任意的正数 N,总存在 $m=N+1$ 及 $p=m$,使

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

由柯西准则可知级数发散.

8. 逻辑推理 由结论 $|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$ 的形式可知,可以用柯西准则来证明.

解题过程 充分性:已知任给正数 ε,存在正整数 N,对一切 $n>N$,总有 $|\mu_N+\mu_m+\cdots+\mu_n|<\varepsilon$ 成立,则对 $n>m>N$ 的 m,有 $|\mu_N+\mu_{N+1}+\cdots+\mu_m|<\varepsilon$.

因此

$$|\mu_{m+1}+\mu_{m+2}+\cdots+\mu_n|=|(\mu_N+\mu_{N+1}+\cdots+\mu_n)-(\mu_N+\mu_{N+1}+\cdots+\mu_m)|$$

$$\leqslant|\mu_N+\mu_{N+1}+\cdots+\mu_n|+|\mu_N+\mu_{N+1}+\cdots+\mu_m|$$

$$\leqslant 2\varepsilon.$$