论非线性代数方程组的消去法

朱望规　著

學苑出版社

论非线性代数方程组的消去法

朱望规 著

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

论非线性代数方程组的消去法/朱望规著.—北京:学苑出版社,2018.8

ISBN 978-7-5077-5496-4

Ⅰ.①论… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①非线性方程-方程组-消去法 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 140900 号

出 版 人:孟 白
责任编辑:李 耕 徐志琴
出版发行:学苑出版社
社 址:北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼
邮政编码:100079
网 址:www.book001.com
电子邮箱:xueyuanpress@163.com
销售电话:010-67601101(营销部)、010-67603091(总编室)
印 刷 厂:北京建宏印刷有限公司
开本尺寸:787×1092 1/16
印 张:11.875
字 数:252 千字
版 次:2018 年 8 月第 1 版
印 次:2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价:98.00 元

目　录

绪　论

初等几何定理的机器证明过程大致经过以下几个步骤：

（1）定理定解条件数字化，生成多项式表示的 $h_i = 0$ 公式组；

（2）把问题结论变成 $g_j = 0$ 公式组；

（3）利用代数方法把 $h_i = 0$ 公式组等价变换生成三角阵列的 $F_i = 0$ 公式组；

（4）用 $F_i = 0$ 公式组的逐个 $x_i(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1)$，消去 g_j 中的 x_i，得最终的余式 $g_j^{(n)}$。当 $g_j^{(n)} = 0$ 时，问题结论成立；当 $g_j^{(n)} \neq 0$ 时，问题结论不成立。

1965 年 B. Buchberger 提出了名叫 Gröbner 基的算法，把一个一元多项式（实际上是其中一个元作主元的多元多项式）除另一个选与前面相同的元作主元的多元多项式，看作是相同变量的多项式除法，其余式等于余式定理的余式。Gröbner 基算法可以看成一个非线性消去法。Gröbner 基算法用来做上述的（3），从 $h_i = 0$ 公式组来获得 $F_i = 0$ 公式组。

在 20 世纪 80 年代国内引入非线性消去法，想把“线性空间的任一向量表示为线性空间基向量的线性组合”，将此用到非线性代数方程组，从而增加了 $g_j = 0$ 公式组，并用来做上述的（4）。但对非线性的 g_j 而言，并不能表示为 Gröbner 基向量的线性或非线性组合。对 n 个变量的 n 个非线性代数方程组而言，可以使 $F_i = 0$ 公式组的每个 F_i 就是 Gröbner 基向量。换句话说：非线性的 g_j，并不能表示为 $F_i = 0$ 的线性或非线性组合。当 $F_i = 0$ 公式组是三角阵列且每个 $F_i = 0$ 都是不超过 4 次代数方程时，用 Gröbner 基算法才可以解出变量 x_i 的代数表达式。但该算法没有提供新东西、新结果，没有 Gröbner 基算法，我们用纯代数方法一样能得到完全相同的 x_i 的代数表达式。就国内的非线性消去法所引入的 $g_j = 0$ 来说，由于所解出的 x_i 表达式的不一致性，又难以判定 $g_j = 0$ 或 $g_j \neq 0$，从而非线性消去法失效。在第八章指出了 $g_j = 0$ 引入所产生的问题。还要指出，用 Gröbner 基算法所得到的 $F_i = 0$ 公式组未必是三角阵列，也不能保证每个 $F_i = 0$ 方程次数不超过 4 次（超过 4 次代数方程没有代数表达式的解）。Gröbner 基算法常常是无效的。Gröbner 基算法和多项式代数的研究弥补不了非线性消去法的致命之处。

下面以范例 1 为例（参见本书 4.1 及第七章），简介非线性消去法全过程。先得到 $F_i = 0$ 公式组如下：

$$\begin{cases} F_1=(3(u_1-u_2)^2u_2^2-(u_1^2+6u_1u_2-6u_2^2)u_3^2+3u_3^4)x_1-(3(u_1-u_2)^2-u_3^2)(3u_2^2-u_3^2)u_3=0 \\ F_2=(3u_2^2-u_3^2)u_3x_2-(u_2^2-3u_3^2)u_2x_1=0 \\ F_3=((3u_2^2-u_3^2)u_3(x_1^2+x_2^2))x_3^3+3(-2u_2u_3(x_1^2+x_2^2)-u_1(u_2^2-u_3^2)x_1+2u_1u_2u_3x_2) \\ \qquad \times(u_2x_1-u_3x_2)x_3^2+3(u_3(x_1^2+x_2^2)+u_1u_2x_1-u_1u_3x_2)(u_2x_1-u_3x_2)^2x_3 \\ \qquad -u_1x_1(u_2x_1-u_3x_2)^3=0 \\ F_4=-(u_2x_1-u_3x_2)x_4+(u_3x_1+u_2x_2)x_3=0 \\ F_5=(((u_1-u_2)x_1-u_3x_2)x_4-(u_3x_1+(u_1-u_2)x_2)x_3+u_3(x_1^2+x_2^2))x_5 \\ \qquad +((u_1-u_2)x_1+u_3x_2-u_1u_3)(-x_1x_4+x_2x_3)=0 \\ F_6=((u_1-u_2)x_1+u_3x_2-u_1u_3)x_6+(u_3x_1-(u_1-u_2)x_2+(u_1-u_2)u_1)x_5 \\ \qquad -((u_1-u_2)x_1+u_3x_2-u_1u_3)u_1=0 \end{cases}$$

这是最简单的非线性代数方程组,五个线性方程及一个三次方程。

同时有要证明的目标,第三组 $g_j=0$ 公式组:

$$(\Delta)\begin{cases} g_1=2(x_4-u_2)x_6+2(x_3-u_3)x_5-(x_4^2+x_3^2)+(u_2^2+u_3^2)=0 \\ g_2=x_6^2-2x_4x_6+x_5^2-2x_3x_5+2(u_2x_4+u_3x_3)-(u_2^2+u_3^2)=0 \\ g_3=x_6^2-2u_2x_6+x_5^2-2u_3x_5-(x_4^2+x_3^2)+2(u_2x_4+u_3x_3)=0 \end{cases}$$

对消去法而言,$F_i=0(i=\overline{1,6})$ 公式组是已知的,$g_j=0(j=\overline{1,3})$ 是欲证明的。

非线性消去法用 $F_i=0$ 逐个消去 $g_j=0$ 中的变量 x_6、x_5、x_4、x_3、x_2、x_1:

(1) 用f_6:$[(x_2-u_1)u_3+(u_1-u_2)x_1]x_6=((u_1-u_2)(x_2-u_1)-u_3x_1)x_5+(u_3(x_2-u_1)+(u_1-u_2)x_1)u_1$消去 x_6。

(2) 用f_5:$[(u_3x_2-(u_1-u_2)x_1)x_4+((u_1-u_2)x_2+u_3x_1)x_3-u_3(x_1^2+x_2^2)]x_5=(u_3(x_2-u_1)+(u_1-u_2)x_1)(-x_1x_4+x_2x_3)$消去 x_5。

(3) 用f_4:$(u_2x_1-u_3x_2)x_4=(u_3x_1+u_2x_2)x_3$消去 x_4。

(4) 用f_3:$(3u_2^2-u_3^2)u_3(x_1^2+x_2^2)x_3^3=3(2u_2u_3(x_1^2+x_2^2)+u_1(u_2^2-u_3^2)x_1-2u_1u_2u_3x_2)(u_2x_1-u_3x_2)x_3^2-3(u_3(x_1^2+x_2^2)+u_1u_2x_1-u_1u_3x_2)(u_2x_1-u_3x_2)^2x_3+u_1x_1(u_2x_1-u_3x_2)^3$消去 x_3^3。(如有x_3^4,先对f_3两边乘 x_3,消去x_3^4,再一次消去x_3^3)。

(5) 用f_2:$u_3(3u_2^2-u_3^2)x_2=u_2(u_2^2-3u_3^2)x_1$消去 x_2。

(6) 用f_1:$[3(u_1-u_2)^2u_2^2-(u_1^2+6u_1u_2-6u_2^2)u_3^2+3u_3^4]x_1=(3(u_1-u_2)^2-u_3^2)\times(3u_2^2-u_3^2)u_3$消去 x_1。

消去过程结束,得到 g_j 对 g_1 是 $g_1^{(6)}$、对 g_2 是 $g_2^{(5)}$、对 g_3 是 $g_3^{(7)}$。形如:

$$(\cdots)\times\left(\frac{x_3}{u_2x_1-u_3x_2}\right)^2+(\cdots)\times\left(\frac{x_3}{u_2x_1-u_3x_2}\right)+(\cdots)$$

此时不能做 $g_j=0$ 或 $g_j\neq0$ 的判定。(见第七章)

因为对范例 1 的 $F_i=0$ 公式组来讲,仅适用于 $\Delta D_{00}E_{00}F_{00}$、$\Delta D_{01}E_{10}F_{00}$与 $\Delta D_{02}E_{20}F_{00}$。也就是说,只有这三个三角形的坐标$(x_2,x_1)$、$(x_4,x_3)$、$(x_6,x_5)$代入 $F_i=0(i=\overline{1,6})$才全部成立 $F_i=0$。这三个三角形中 $\Delta D_{00}E_{00}F_{00}$与 $\Delta D_{02}E_{20}F_{00}$是正三角形,$\Delta D_{01}E_{10}F_{00}$不是正三角形。这个时候如果能判定 $g_j=0$ 或 $g_j\neq0$,就会引起思维逻辑的混乱。因为这时的判定,

若 $g_j=0$,则三个三角形都是正三角形;若 $g_j\neq 0$,则三个三角形都是非正三角形。与实际上有两个正三角形一个非正三角形不一致。

这里的关键是 x_3 在起作用,由于 x_3 的取值不一样,有的成了正三角形,有的则不是正三角形。

在第七章中用特例指证法证明此时不能判定 $g_j=0$ 或 $g_j\neq 0$。对 $u_1=1,u_2=0.4,u_3=0.2$,此时 $x_1=1.144,x_2=0.208,x_1^2+x_2^2=1.352$(一个实例),代入 g_j,出现了与上述一致的结果:$\Delta D_{00}E_{00}F_{00}$与 $\Delta D_{02}E_{20}F_{00}$是正三角形,而 $\Delta D_{01}E_{10}F_{00}$不是正三角形。确实不能做出统一的 $g_j=0$ 还是 $g_j\neq 0$ 的判定,其实这已经足够了。

在 5.1 节用纯代数的方法解出了范例 1 的 x_i 的形式表达式(用 Gröbner 基算法得与 5.1.2 相同结果),但是代入 $g_j=0$ 公式组时,由于表达式的不一致性,我们无法判定 $g_j=0$ 或 $g_j\neq 0$,无法得到所期望的结果。在 5.2 节用纯代数方法解出了范例 2 的 $h_i=0$ 公式组的 x_i 的形式解,但用 Gröbner 基算法是无论如何解不出来的。在 6.2 节指出 Gröbner 基算法所得到的结果不是三角阵列形式,如果硬性解出,由于最后的 x_i 的多项式方程高达 12 次,无法得到 x_i 的解。

从而得出结论:非线性消去法不能形成真正的算法,是失败的。不能模仿 Gauss 消去法形成非线性消去法。Gröbner 基算法与多项式代数不能挽救非线性消去法的致命之处。

另外,范例 2(见本书 4.2 节)得出的 $h_i=0$ 公式组是:

$$(*)\begin{cases}h_1=u_2x_1^3-3\,u_3x_1^2x_2-3\,u_2x_1x_2^2+u_3x_2^3=0\\ h_2=(u_1-u_2)x_1^3-3\,u_3x_1^2(u_1-x_2)-3(u_1-u_2)x_1(u_1-x_2)^2+u_3(u_1-x_2)^3=0\\ h_3=(u_3x_1+u_2x_2)x_3+(u_2x_1-u_3x_2)x_4=0\\ h_4=u_1u_3(u_2^2+u_3^2-u_3x_3-u_2x_4)^3-3(u_3^2-(u_1-u_2)u_2)(-u_2x_3+u_3x_4)(u_2^2+u_3^2-u_3x_3-u_2x_4)^2\\ \qquad -3\,u_1u_3(-u_2x_3+u_3x_4)^2(u_2^2+u_3^2-u_3x_3-u_2x_4)+(u_3^2-(u_1-u_2)u_2)(-u_2x_3+u_3x_4)^3=0\\ h_5=(-(u_1-u_2)x_1+u_3(u_1-x_2))(u_1-x_6)-(u_3x_1+(u_1-u_2)(u_1-x_2))x_5=0\\ h_6=(-u_2x_3+u_3x_4)(-u_3x_5+(u_1-u_2)x_6+u_3^2-(u_1-u_2)u_2)\\ \qquad +(u_2^2+u_3^2-u_3x_3-u_2x_4)((u_1-u_2)x_5+u_3x_6-u_1u_3)=0\end{cases}$$

这样的 $h_i=0$ 公式组用 Gröbner 基算法或其他代数方法得不到三角阵列的 $F_i=0$ 公式组,无法去做消去法。

本书对特例 $u_1=1,u_2=0.4,u_3=0.2$ 用直接代入法与反解法说明,这个$(*)h_i=0$ 公式组的适用对象正是 Morley 定理的 27 个三角形。这里用上了第三章实例给出的 27 个三角形顶点坐标。

这里产生与范例 1 同样的思维逻辑的混乱。设想一下,不管用什么消去法,一步一步下来,逐个消去各个变量,得到最终的残量,对 27 个三角形统一判定$g_j=0$ 或$g_j\neq 0$,只可能得出它们全都是正三角形,或者全都不是正三角形。注意,这里是 18 个正三角形与 9 个非正三角形。统一处理是绝无可能的,而且也没有办法利用$(*)h_i=0$ 公式组来做一个个三角形的检验。

本书在 5.2 节利用类比三角学中的三倍角公式,用卡丹公式解出了$(*)h_i=0$ 公式组的精确解。指出多项式代数中把非线性代数方程组归化为多个线性代数方程组时,由于

此时线性代数方程组的系数不再是多项式或有理分式,从而线性代数方程组的精确解不具有代数形式,代入 g_j 后同样不能判定 $g_j=0$ 或 $g_j\neq 0$。多项式代数并不能克服或弥补非线性消去法的致命伤。

有的时候,一个几何定理的结论无法用 $g_j=0$ 来表示,如面积为常数时,就不能写成 $g_j=0$。也就无法去做消去法了。

因此,不能模仿线性代数方程组的 Gauss 消去法去形成非线性消去法。

初等几何定理的机器证明一般都可以用 Gauss 消去法来实现,如果没有实现,说明没有找对路子。而非线性消去法是不可能成功的。

Morley 定理涉及△ABC 三个角所有的三等分线方程及 27 个点的坐标公式。本书用坐标化 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,u_3)$ 得出了:①用 u_1、u_2、u_3 及角 α、β 表示的角三等分线方程及 27 个点坐标公式;②用 u_1 及角 α、β 表示的角三等分线方程及 27 个点坐标公式。从而用三角及解析几何证明了 Morley 定理。

设定 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$F(u_2,u_3)$,解出了用 u_1、u_2、u_3 表示的 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 的线性的三角阵列的 $F_i=0$ 公式组。随后用 Gauss 消去法证明了 Morley 定理。

本书重新诠释了 Morley 定理,使对三等分线的正、逆时针转向及 27 个点的来历得到理解。

第　一　篇

用经典方法证明初等几何定理[①]

① 经典方法主要指初等几何、三角、代数、解析几何等方法。鉴于 Morley 定理用初等几何证明已有很多，本书不再使用，而使用三角、代数及解析几何方法。

本篇分三章阐述。

第一章首先用解析几何方法给出 Morley 定理有关的 18 条直线的点斜式方程,得出 27 个点关于参数u_1、α、β 的坐标表达式。进一步利用三角与解析几何证明了 Morley 定理。

第二章给出了 Morley 定理有关的 18 条直线(角的三等分线)的关于参数u_1、u_2、u_3的直线方程,利用这些直线方程,使用 Gauss 消去法与直接代入有关三角形边长公式证明了 Morley 定理。

第三章通过实例,给出了为验证本书数学推导准确的数据依据。

第一章　Morley 定理与三角、解析几何证明

1.1　Morley 定理概述

1899 年 Johns Hopkins 大学的 prof. Morley 发现了 Morley 定理，1913 年 11 月 14 日 F. Glanville Taylor 和 W. L. Marr 证明了我们所知的 27 个点的分布，它们都在由内 Morley 正三角形与两个外 Morley 正三角形的 9 条边所形成的三组平行线上，其中任意两组平行线夹角为 60°，即 π/3，且 27 个点的每个点都是两组平行线之一的交点（27×2＝54），恰恰是在上述 3 个 Morley 正三角形的每条边形成的平行线上有其中的 6 个点（9×6＝54），于是形成了 27 个正三角形。他们的结果刊登在 *Proceedings of Edinburgh Math Society*（XXXII），1914 年，p119—p150。这篇论文虽然发表于百年前，但很好找，剑桥大学有电子版，爱丁堡大学有杂志原版。美国 R.A.约翰逊著、单墫译，由上海教育出版社出版的《近代欧氏几何学》p222—p224 上有介绍。

首先介绍一下与 Morley 定理有关的基本概念：

有一个任意 $\triangle ABC$，可以用 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$\angle A=3\alpha$、$\angle B=3\beta$ 来确定。此时有 $\angle C=\pi-3\alpha-3\beta=3\gamma$，且有 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{3}$。也可以用 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,u_3)$ 来确定。这里有：$u_2=\dfrac{u_1\tan3\beta}{\tan3\alpha+\tan3\beta}=\dfrac{u_1\sin3\beta\cos3\alpha}{\sin3(\alpha+\beta)}$，$u_3=\dfrac{u_1\tan3\alpha\tan3\beta}{\tan3\alpha+\tan3\beta}=\dfrac{u_1\sin3\beta\sin3\alpha}{\sin3(\alpha+\beta)}$，或 $\tan3\alpha=\dfrac{u_3}{u_2}$，$\tan3\beta=\dfrac{u_3}{u_1-u_2}$。

我们还会用到 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R，有 $u_1=2R\sin3\gamma$，$\sqrt{(u_1-u_2)^2+u_3^2}=2R\sin3\alpha$，$\sqrt{u_2^2+u_3^2}=2R\sin3\beta$。

$\triangle ABC$ 的内角与外角有三等分线，$\triangle CAB$ 有内角三等分线 t_1、s_1，外角三等分线 t'_1、t''_1、s'_1、s''_1，t_1 顺时针方向旋转 120°得 t'_1，旋转 240°得 t''_1，s_1 逆时针方向旋转 120°得 s'_1，旋转 240°得 s''_1。其他二角 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 也有内角三等分线 t_2、s_2、t_3、s_3。同样对 t_2、t_3 顺时针方向旋转 120°得 t'_2、t'_3，旋转 240°得 t''_2、t''_3；s_2、s_3 逆时针方向旋转 120°得 s'_2、s'_3，旋转 240°得 s''_2、s''_3。如图 1-1 所示。

图中 D_{qr} 用记号 $(1,\gamma_r,\beta_q)$，$r=0$ 指 t_3，$r=1$ 指 t'_3，$r=2$ 指 t''_3，$q=0$ 指 s_2，$q=1$ 指 s'_2，$q=2$ 指 s''_2。D_{qr} 是相应 t_3 或 t'_3 或 t''_3 与 s_2 或 s'_2 或 s''_2 的交点。E_{rp} 用记号 $(\gamma_r,1,\alpha_p)$，$p=0$ 指 t_1，$p=1$ 指 t'_1，$p=2$ 指 t''_1，$r=0$ 指 s_3，$r=1$ 指 s'_3，$r=2$ 指 s''_3，E_{rp} 是相应 t_1 或 t'_1 或 t''_1 与 s_3 或 s'_3 或 s''_3 的交点。F_{pq} 用记号 $(\beta_q,\alpha_p,1)$，$q=0$ 指 t_2，$q=1$ 指 t'_2，$q=2$ 指 t''_2，$p=0$ 指 s_1，$p=1$ 指 s'_1，$p=2$ 指 s''_1，F_{pq} 是相应 t_2 或 t'_2 或 t''_2 与 s_1 或 s'_1 或 s''_1 的交点。如图 1-1 所示。记号

$(1,\gamma_r,\beta_q)$、$(\gamma_r,1,\alpha_p)$、$(\beta_q,\alpha_p,1)$第 1 个指 A 顶点，第 2 个指 B 顶点，第 3 个指 C 顶点，1 表示与相应顶点无关。

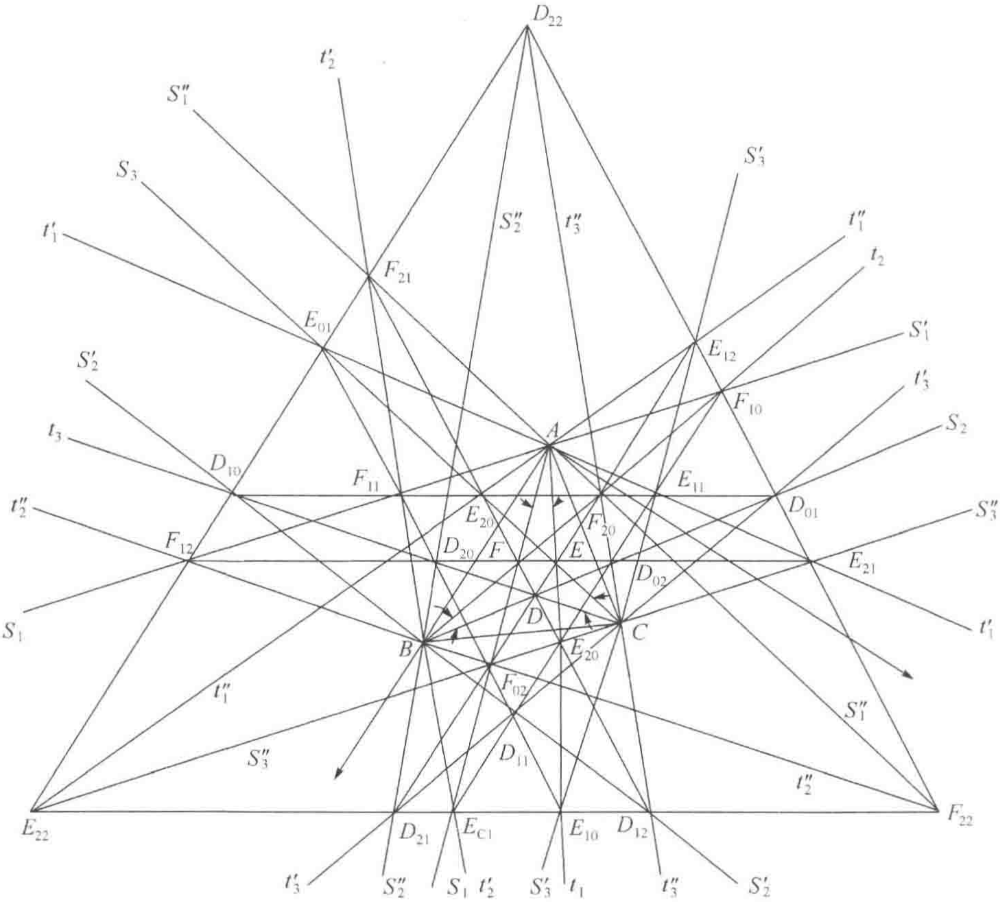

图 1-1

我们先以 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,u_3)$来推导每条 t、s 的点斜式方程（即给出点及直线与 x 轴夹角），求出 27 个点关于u_1、α、β、u_2、u_3的坐标表达式，再用$u_2=\dfrac{u_1\cos3\alpha\sin3\beta}{\sin3(\alpha+\beta)}$，$u_3=\dfrac{u_1\sin3\alpha\sin3\beta}{\sin3(\alpha+\beta)}$代入，得出以$u_1$、$\alpha$、$\beta$ 为参数的 27 个点坐标表达式。

1.1.1　$t_i,s_i,t'_i,s'_i,t''_i,s''_i$的直线方程

$t_1:y=x\tan2\alpha$，　　$t'_1:y=x\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha\right)$，　　$t''_1:y=x\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha\right)$，

$s_1:y=x\tan\alpha$，　　$s'_1:y=x\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$，　　$s''_1:y=x\tan\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

$t_2:y=(x-u_1)\tan(-\beta)$，　　$t'_2:y=(x-u_1)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\beta\right)$，　　$t''_2:y=(x-u_1)\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}-\beta\right)$，

$s_2:y=-(x-u_1)\tan2\beta$，　　$s'_2:y=-(x-u_1)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+2\beta\right)$，　　$s''_2:y=-(x-u_1)\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\beta\right)$，

$$t_3:y-u_3=(x-u_2)\tan\left(\alpha-2\beta-\frac{\pi}{3}\right),\qquad t_3':y-u_3=(x-u_2)\tan(\alpha-2\beta),$$

$$t_3'':y-u_3=(x-u_2)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha-2\beta\right),$$

$$s_3:y-u_3=(x-u_2)\tan\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right),\qquad s_3':y-u_3=(x-u_2)\tan(2\alpha-\beta),$$

$$s_3'':y-u_3=(x-u_2)\tan\left(2\alpha-\beta-\frac{\pi}{3}\right)。$$

1.1.2　27 个点

27 个点用(t,s)表示 t 与 s 的交点。其中E_{00}即 E，F_{00}即 F，D_{00}即 D（见表 1-1）。

表 1-1　27 个点

$E_{00}(t_1,s_3)$ $F_{00}(t_2,s_1)$ $D_{00}(t_3,s_2)$	$E_{10}(t_1,s'_3)$ $F_{10}(t_2,s'_1)$ $D_{10}(t_3,s'_2)$	$E_{20}(t_1,s''_3)$ $F_{20}(t_2,s''_1)$ $D_{20}(t_3,s''_2)$
$E_{01}(t'_1,s_3)$ $F_{01}(t'_2,s_1)$ $D_{01}(t'_3,s_2)$	$E_{11}(t'_1,s'_3)$ $F_{11}(t'_2,s'_1)$ $D_{11}(t'_3,s'_2)$	$E_{21}(t'_1,s''_3)$ $F_{21}(t'_2,s''_1)$ $D_{21}(t'_3,s''_2)$
$E_{02}(t''_1,s_3)$ $F_{02}(t''_2,s_1)$ $D_{02}(t''_3,s_2)$	$E_{12}(t''_1,s'_3)$ $F_{12}(t''_2,s'_1)$ $D_{12}(t''_3,s'_2)$	$E_{22}(t''_1,s''_3)$ $F_{22}(t''_2,s''_1)$ $D_{22}(t''_3,s''_2)$

由 t、s 的直线表达式可解出 27 个点的坐标表达式：

$$E_{00}:\begin{cases}x=\dfrac{\cos2\alpha}{\sin(\overline{\pi/3}^{①}-\beta)}\left(u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)-u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right)\\[2ex] y=\dfrac{\sin2\alpha}{\sin(\overline{\pi/3}-\beta)}\left(u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)-u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right)\end{cases}$$

$$F_{00}:\begin{cases}x=\dfrac{u_1\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\\[2ex] y=\dfrac{u_1\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\end{cases}$$

$$D_{00}:\begin{cases}x=\dfrac{-u_1\sin2\beta\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)+u_2\sin(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\cos2\beta+u_3\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\cos2\beta}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha)}\\[2ex] y=\dfrac{(u_1-u_2)\sin(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\sin2\beta-u_3\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\sin2\beta}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha)}\end{cases}$$

① $\overline{\pi/3}$表示$\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\overline{2\pi/3}$表示$\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$，以下同。

$$E_{10}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\beta}(u_3\cos(2\alpha-\beta)-u_2\sin(2\alpha-\beta)) \\ y=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\beta}(u_3\cos(2\alpha-\beta)-u_2\sin(2\alpha-\beta)) \end{cases}$$

$$F_{10}:\begin{cases} x=\dfrac{-u_1\sin\beta\cos(\overline{\pi/3}-\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha-\beta)} \\ y=\dfrac{u_1\sin\beta\sin(\overline{\pi/3}-\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha-\beta)} \end{cases}$$

$$D_{10}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\overline{\pi/3}+2\beta)\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)-u_2\sin(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\cos(\overline{\pi/3}+2\beta)-u_3\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\cos(\overline{\pi/3}+2\beta)}{\sin\alpha} \\ y=\dfrac{-(u_1-u_2)\sin(\overline{\pi/3}+2\beta)\sin(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)+u_3\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\sin(\overline{\pi/3}+2\beta)}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$E_{20}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos 2\alpha\times(u_2\sin(\overline{\pi/3}-2\alpha+\beta)+u_3\cos(\overline{\pi/3}-2\alpha+\beta))}{\sin(\overline{\pi/3}+\beta)} \\ y=\dfrac{\sin 2\alpha\times(u_2\sin(\overline{\pi/3}-2\alpha+\beta)+u_3\cos(\overline{\pi/3}-2\alpha+\beta))}{\sin(\overline{\pi/3}+\beta)} \end{cases}$$

$$F_{20}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin\beta\cos(\overline{\pi/3}+\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha+\beta)} \\ y=\dfrac{u_1\sin\beta\sin(\overline{\pi/3}+\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$D_{20}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\overline{\pi/3}-2\beta)\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)+u_2\cos(\overline{\pi/3}-2\beta)\sin(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)+u_3\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\cos(\overline{\pi/3}-2\beta)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha)} \\ y=\dfrac{-(u_1-u_2)\sin(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)\sin(\overline{\pi/3}-2\beta)+u_3\sin(\overline{\pi/3}-2\beta)\cos(\overline{\pi/3}-\alpha+2\beta)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha)} \end{cases}$$

$$E_{01}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos(\overline{\pi/3}+2\alpha)}{\sin\beta}\left(-u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right) \\ y=\dfrac{\sin(\overline{\pi/3}+2\alpha)}{\sin\beta}\left(-u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right) \end{cases}$$

$$F_{01}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\overline{\pi/3}-\beta)\cos\alpha}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha-\beta)} \\ y=\dfrac{u_1\sin(\overline{\pi/3}-\beta)\sin\alpha}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha-\beta)} \end{cases}$$

$$D_{01}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin 2\beta\cos(\alpha-2\beta)+u_2\sin(\alpha-2\beta)\cos 2\beta-u_3\cos(\alpha-2\beta)\cos 2\beta}{\sin\alpha} \\ y=\dfrac{(u_1-u_2)\sin(\alpha-2\beta)\sin 2\beta+u_3\cos(\alpha-2\beta)\sin 2\beta}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$E_{11}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos(\overline{\pi/3}+2\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\beta)}(u_3\cos(2\alpha-\beta)-u_2\sin(2\alpha-\beta)) \\ y=\dfrac{\sin(\overline{\pi/3}+2\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\beta)}(u_3\cos(2\alpha-\beta)-u_2\sin(2\alpha-\beta)) \end{cases}$$

$$F_{11}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\overline{\pi/3}-\beta)\cos(\overline{\pi/3}-\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha+\beta)} \\ y=\dfrac{-u_1\sin(\overline{\pi/3}-\beta)\sin(\overline{\pi/3}-\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$D_{11}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\overline{\pi/3}+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)+u_2\cos(\overline{\pi/3}+2\beta)\sin(\alpha-2\beta)-u_3\cos(\overline{\pi/3}+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha)} \\ y=\dfrac{(u_1-u_2)\sin(\alpha-2\beta)\sin(\overline{\pi/3}+2\beta)+u_3\cos(\alpha-2\beta)\sin(\overline{\pi/3}+2\beta)}{\sin(\overline{\pi/3}+\alpha)} \end{cases}$$

$$E_{21}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos(\overline{\pi/3}+2\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}-\beta)}\left(u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha+\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha+\beta\right)\right) \\ y=\dfrac{\sin(\overline{\pi/3}+2\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}-\beta)}\left(u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha+\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha+\beta\right)\right) \end{cases}$$

$$F_{21}:\begin{cases} x=\dfrac{-u_1\sin(\overline{\pi/3}-\beta)\cos(\overline{\pi/3}+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \\ y=\dfrac{-u_1\sin(\overline{\pi/3}-\beta)\sin(\overline{\pi/3}+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$D_{21}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\overline{2\pi/3}+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)+u_2\cos(\overline{2\pi/3}+2\beta)\sin(\alpha-2\beta)-u_3\cos(\overline{2\pi/3}+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha)} \\ y=\dfrac{(u_1-u_2)\sin(\overline{2\pi/3}+2\beta)\sin(\alpha-2\beta)+u_3\sin(\overline{2\pi/3}+2\beta)\cos(\alpha-2\beta)}{\sin(\overline{\pi/3}-\alpha)} \end{cases}$$

$$E_{02}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos(\overline{2\pi/3}+2\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\beta)}\left(u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)-u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right) \\ y=\dfrac{\sin(\overline{2\pi/3}+2\alpha)}{\sin(\overline{\pi/3}+\beta)}\left(u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)-u_2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right) \end{cases}$$

$$F_{02}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\pi/3+\beta)\cos\alpha}{\sin(\pi/3+\alpha+\beta)} \\[2ex] y=\dfrac{u_1\sin(\pi/3+\beta)\sin\alpha}{\sin(\pi/3+\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$D_{02}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin2\beta\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)+u_2\cos2\beta\sin(\pi/3+\alpha-2\beta)-u_3\cos2\beta\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)}{\sin(\pi/3+\alpha)} \\[2ex] y=\dfrac{\sin2\beta}{\sin(\pi/3+\alpha)}\left[(u_1-u_2)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha-2\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha-2\beta\right)\right] \end{cases}$$

$$E_{12}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos(2\pi/3+2\alpha)}{\sin(\pi/3-\beta)}[-u_2\sin(2\alpha-\beta)+u_3\cos(2\alpha-\beta)] \\[2ex] y=\dfrac{\sin(2\pi/3+2\alpha)}{\sin(\pi/3-\beta)}[-u_2\sin(2\alpha-\beta)+u_3\cos(2\alpha-\beta)] \end{cases}$$

$$F_{12}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(\pi/3+\beta)\cos(\pi/3-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \\[2ex] y=\dfrac{-u_1\sin(\pi/3+\beta)\sin(\pi/3-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$D_{12}:\begin{cases} x=\dfrac{u_1\sin(2\pi/3-2\beta)\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)-u_2\cos(2\pi/3-2\beta)\sin(\pi/3+\alpha-2\beta)+u_3\cos(2\pi/3-2\beta)\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)}{\sin(\pi/3-\alpha)} \\[2ex] y=\dfrac{(u_1-u_2)\sin(\pi/3+\alpha-2\beta)\sin(2\pi/3-2\beta)+u_3\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)\sin(2\pi/3-2\beta)}{\sin(\pi/3-\alpha)} \end{cases}$$

$$E_{22}:\begin{cases} x=\dfrac{\cos(2\pi/3+2\alpha)}{\sin\beta}\left[-u_2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right] \\[2ex] y=\dfrac{\sin(2\pi/3+2\alpha)}{\sin\beta}\left[-u_2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)+u_3\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\alpha-\beta\right)\right] \end{cases}$$

$$F_{22}:\begin{cases} x=u_1\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)\times\dfrac{\cos(\pi/3+\alpha)}{\sin(\pi/3-\alpha-\beta)} \\[2ex] y=u_1\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)\times\dfrac{\sin(\pi/3+\alpha)}{\sin(\pi/3-\alpha-\beta)} \end{cases}$$

$$D_{22}:\begin{cases} x=\dfrac{-u_1\sin(\pi/3-2\beta)\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)+u_2\sin(\pi/3+\alpha-2\beta)\cos(\pi/3-2\beta)-u_3\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)\cos(\pi/3-2\beta)}{\sin\alpha} \\[2ex] y=\dfrac{-(u_1-u_2)\sin(\pi/3+\alpha-2\beta)-u_3\cos(\pi/3+\alpha-2\beta)}{\sin\alpha}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\beta\right) \end{cases}$$