



上海对外经贸大学金融著作丛书

Copula理论及其 在金融领域中的应用

方 艳◎著

 中国金融出版社

上海对外经贸大学金融著作丛书
本丛书得到上海对外经贸大学出版基金的资助

Copula 理论及其 在金融领域中的应用

方 艳 著



 中国金融出版社

责任编辑：丁 芊

责任校对：张志文

责任印制：陈晓川

图书在版编目 (CIP) 数据

Copula 理论及其在金融领域中的应用 (Copula Lilun Jiqi zai Jinrong
Lingyu Zhongde Yingyong) / 方艳著. —北京：中国金融出版社，2018.9
ISBN 978 - 7 - 5049 - 9708 - 1

I. ①C… II. ①方… III. ①时间序列分析—应用—金融学—研究
IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 198455 号

出版
发行

中国金融出版社

社址 北京市丰台区益泽路 2 号

市场开发部 (010)63266347, 63805472, 63439533 (传真)

网上书店 <http://www.chinafph.com>

(010)63286832, 63365686 (传真)

读者服务部 (010)66070833, 62568380

邮编 100071

经销 新华书店

印刷 保利达印务有限公司

尺寸 169 毫米×239 毫米

印张 9.75

字数 120 千

版次 2018 年 9 月第 1 版

印次 2018 年 9 月第 1 次印刷

定价 28.00 元

ISBN 978 - 7 - 5049 - 9708 - 1

如出现印装错误本社负责调换 联系电话 (010)63263947

上海对外经贸大学金融著作丛书

编委会

编委会主任：徐永林 贺学会

编委(按姓氏笔画为序)：

曲延英 应尚军 张铁铸 杨淑娥

陈 坚 凌 婕 翁小丹

总 序

上海对外经贸大学校长 孙海鸣

金融是现代经济的核心，而上海建立国际金融中心又是重要的国家战略，从这个意义上来说，在上海从事金融研究工作的专家是处于“中心”中的“中心”，得天时、地利、人和之便。《上海对外经贸大学金融著作丛书》的出版，正是此天时、地利、人和的产物，可喜可贺。

金融发展的重要性，怎么强调都不过分。金融是资源配置的先导，现代市场经济之间的竞争，在很大程度上就是金融的竞争。因此，过去20年来，上海对外经贸大学一直将金融学科列为重点发展的领域。这不仅体现了学校的战略眼光，更体现了时代发展的要求。

上海对外经贸大学作为我国对外经贸人才成长的摇篮，始终秉持“诚信、宽容、博学、务实”的校训精神，把改革作为学校发展的强大动力，在人才培养、科学研究、社会服务和文化传承创新等方面不断取得新的突破；始终坚持“以学生为本、以学术为魂”的办学理念，坚持将学科建设聚焦国际前沿、对接社会需求，以贡献求支持、以服务促发展，坚持将“创新、协调、绿色、开放、共享”的发展理念贯穿于学校改革发展的各项工作中，深化教育综合改革，认真谋划和扎实推动

“十三五”期间学校改革创新转型发展各项工作，全面落实党的教育方针，切实担负起立德树人的根本使命，坚定不移地推动学校建设成为高水平、国际化、特色鲜明的应用研究型大学。

近年来，学校紧密围绕国家和上海的迫切需求，主动对接上海“四个中心”、上海自贸区、国家“一带一路”以及全球科创中心等重大战略，着力破除制约学校发展目标实现的思想障碍和制度藩篱，形成多方参与、多元投入并与社会有机互动的办学机制，逐步构建院校协同发展、学术权力与行政权力相互支撑、充满活力的大学内部治理结构。其中一个重要的目标就是建立学术研究与决策咨询研究双轨并行、教学与科研协同发展的体制机制，为学科建设和学术研究夯实制度基础。学校鼓励各教研部门根据所属学科专业特点与定位目标，明确科研方向，制定各具特色的科研内容与方式。学校主动适应转型发展需要，打破传统的科研与教学相互分离局面，强化教学科研均衡发展意识，建立教学、科研、社会实践深度融合的体制机制，协调制定适应转型发展要求的制度体系，引导科研价值取向更加符合学校定位目标与社会发展需要。

上海对外经贸大学金融学科的高速发展正体现了学校的这种发展思路。金融学院于1995年建院，迄今已逾20年，是一所既年轻又具有一定历史沉淀的学院。近年来，学院的发展更是速度惊人，学院的科研积极性得到空前的提升，科研成果不断涌现。学院学术研究与决策咨询等多种类型的研究实现良性互动，既提升了学术水平，又服务了国家战略，可谓一箭双雕，成效显著。更可喜的是，在这一过程中，一大批年轻学者迅速成长起来，成为国内金融学界的翘楚。本套丛书正是他们成长过程的见证。

《上海对外经贸大学金融著作丛书》既展示了我校近年来中青年金

融学人的主要学术成果，也彰显了我校的金融学科优势、学术研究特色和学术研究能力。从选题来看，本套丛书不仅较好契合国家全面改革开放战略，而且紧密对接上海自贸区建设和上海国际金融中心建设的新需要；从内容来看，本套丛书既密切追踪当今国际金融领域出现的新现象、新问题和新趋势，又深入研究国内金融领域进一步改革开放中的热点难点问题，具有专业性、学术性、实践性和前沿性等特点。

本套丛书的出版对于进一步推动我校学科建设和学术研究工作无疑具有重要的意义，希望能够激励更多的金融学人竞相迸发出更加强大的学术热情和创新动力，为我校早日建成高水平、国际化、特色鲜明的应用研究型大学贡献力量。同时，也期待更好更多的学术成果不断涌现，为金融学院的发展继续谱写全新的篇章。

2015 年 12 月 1 日于松江大学城

目 录

第一章 绪论	1
第一节 研究背景和意义	1
第二节 研究内容和目的	3
第三节 国内外研究现状	5
第四节 本书研究框架	10
第五节 本书创新点	11
第二章 Copula 函数简介	13
第一节 Copula 函数定义	13
第二节 Copula 函数分类	15
第三节 Copula 参数估计方法	22
第四节 Copula 模型的检验	23
第五节 小结	24
第三章 修正的高斯 pseudo - Copula 模型	26
第一节 背景和意义	26
第二节 修正的高斯 pseudo - Copula 模型性质	28

第三节	MG pseudo - Copula 函数的估计	34
第四节	案例分析	36
第五节	小结	41
第四章	基于 Copula 的 GARCH 模型	43
第一节	背景和意义	43
第二节	DDAC - GARCH 模型	45
第三节	案例分析	51
第四节	小结	63
第五章	基于 Copula 的计数数据相依性	64
第一节	研究背景和意义	64
第二节	离散 Copula 模型	66
第三节	基于贝叶斯方法的模型估计和预测	69
第四节	实证分析	73
第五节	小结	82
第六章	Copula 的拟合方法	83
第一节	研究背景和意义	83
第二节	Copula 函数基本理论	84
第三节	乘数 GOF 检验法	85
第四节	AIC 法	88
第五节	AIC 法和乘数 GOF 检验法比较的模拟分析	89
第六节	小结	93
第七章	基于混合 Copula 在结构性理财产品中的定价	95
第一节	理财产品定价的研究背景和意义	95

第二节 混合 Copula 函数	97
第三节 实证分析	100
第四节 小结	109
第八章 结论	110
附录一: pseudo - Copula 函数的简略证明	114
附录二: MG pseudo - Copula 模型模拟检验时的 R 代码	117
附录三: Ψ_t 是一个系数相关矩阵	118
附录四: AIC 法和乘数 GOF 检验法比较的模拟分析	119
参考文献	126
致谢	140

第一章 绪 论

第一节 研究背景和意义

随着金融全球化进程的不断加快，全球金融市场之间联系越加紧密，市场之间的相互关系也变得日益密切和日趋复杂。并且随着金融创新不断发展，各类金融衍生品及结构化产品不断涌现，其产品定价、套利等也逐渐成为研究的焦点，其中，资本市场间关系的刻画是定价的关键。因此，如何精确刻画这层关系已成为目前金融界研究的一个主要问题。

然而，现有关于金融变量相依性模型（譬如广义线性回归模型、多元泊松分布等）一般都是基于随机效应的参数模型，或者基于高斯误差的回归模型。然而，这些传统的模型都建立在理想的假设条件之上，譬如正态性、对称性等，但是现实情况中这些条件很难得到满足，致使相依性度量有失准确性而导致偏差。而其他相关性度量方法，譬如秩（Rank）相关性（主要包括 Kendall's τ 和 Spearman ρ ），其不仅在单调变化下具有不变化的特征，还能明确地表达完美的相关性，但它们都是基于矩的相关性且不具备传统线性相关性中方差、协方差性质。总

之，基于传统相关系数上建立的一系列模型以及由此衍生的一系列风险计量方法都存在很大的缺陷。要对金融变量相依性度量取得突破性进展，引入和发展新的计量方法和统计工具是关键。因此，研究金融变量之间的相互依赖关系及相关程度，寻找更有效的相依性度量和分析技术，以弥补传统金融计量分析技术的一些不足和局限，探索新的计量分析工具，为金融变量相依性的刻画和模拟起到补充和完善的作用。

Copula 模型作为一种新兴的多元统计分析方法，近年来被广泛地应用到各行各业。其优良性质主要体现在变量之间的相依结构和变量的边缘分布可以独立地建模，即相依结构一般通过 Copula 函数来刻画，而这个函数的选择对于边缘分布的建模没有任何影响。该方法克服了传统线性相关性理论和 Granger 理论的不足，较好地捕获变量间的非线性相依关系，充分地保持变量转换前后相依结构的一致性，正确、灵活地刻画变量间的依赖程度。已有许多文献证明了 Copula 方法可以构造更加灵活的多元分布，从而简化了实际问题的建模。同时，Copula 模型的二分建模也有助于对变量相依本质的理解。这不仅为构建多市场金融风险的联合研究提供了理论基础，而且也为金融市场分析提供了一种分析思路与方法。此外，Copula 函数导出的一致性和相关性测度的不变性 (Invariant) 也拓宽了问题研究的范围，增强了理论的实用性，从而为金融变量相依性的研究提供了新思路。

自从 Copula 理论由 Sklar (1959) 提出以后，已被广泛运用到金融多变量相依性的度量和分析中，譬如，金融风险管理、资本资产定价、保险精算以及金融危机的传染等方面。该理论不仅是一种定性 with 定量分析相结合的统计分析方法，还可以定量刻画金融市场以及金融产品，从而可以为金融市场的发展和认识提供科学事实，为实际金融投资与决策提供理论依据。因此，全面系统地探讨 Copula 函数及其在金融研究中

的应用非常必要。

第二节 研究内容和目的

20 世纪 90 年代以来,“金融全球化”一直是各界关注的热点话题。金融全球化是指金融业跨国发展,金融活动按全球同一规则运行,同质的金融资产价格趋于等同,巨额国际资本通过金融中心在全球范围内迅速运转,从而形成金融全球化的趋势。金融全球化导致了各国金融市场的开放程度不断加深,资本在全球范围内大量、快速和自由流动,同时也带来了金融波动和金融风险。由于金融全球化,世界各国(地区)之间的经济与金融市场间的相互依赖性变得越来越强,任何金融市场的局部波动将会迅速蔓延、传染以及波及其他市场。

然而,随着金融全球化、金融创新步伐的加快,金融市场的联系也日益密切,金融市场间的相关性分析、投资组合分析、风险管理、波动传导和溢出、资产定价等许多金融问题都牵涉市场相关性分析。因而,准确理解与描述金融市场间的这种互相关性,不仅将有利于市场参与者与监管者捕捉市场信息以及制定经济政策,还将有助于理解金融资产价格的形成机理,对金融资产的优化配置与风险管理具有重要的实践指导意义。另外,当金融市场出现极端情形,如金融危机出现时,金融市场的价格协同运动明显增强,金融危机从一个市场迅速扩散到另一个市场,甚至产生“多米诺骨牌”效应,蔓延到全球金融市场,这也是一种典型的多元相关模式。

但金融市场内个体之间的相互作用是复杂变化的,从而导致了金融市场的内外运行机制与规律难以准确地描述与刻画。作为研究变量相依性的新方法,Copula 函数可以全面刻画金融市场的非确定性,因此,基于 Copula 技术的金融相依性度量模型不仅可以用于相关性分析中,还

可以运用于分布函数相关的其他金融分析中（譬如资产定价、信用风险分析、VaR 计算等）。因而，运用 Copula 理论来解决现代金融市场中存在的相依型问题无疑为构建更多的金融计量模型提供了一种新思路。

为此，本书将在已有的 Copula 模型基础上将其进行拓展，并将其与金融时间序列分析相结合，从而推广 Copula 函数在金融及经济方面的运用。本书主要内容包括以下几个部分：

第一，基于高斯 Copula 函数的拓展研究。众所周知，目前常用的 Copula 函数有椭圆 Copula 和阿基米德 Copula 函数两大类。然而，椭圆 Copula 函数的径向对称性导致变量上尾和下尾的相依性完全相同，从而使得其在金融或经济领域上常出现的尾部相依性应用中受到挑战。另外，尽管阿基米德 Copula 函数具有明确计算变量相依性的表达式并在极值理论中有重要应用，但是它们很难扩展到超过二维的多维金融应用中。而在研究金融实际问题时，高维尾部相依性是常常面临的问题，为此，本书将基于传统高斯 Copula 函数基础上寻找一个既能够刻画尾部相依又能突破二维局限性的新的 Copula 模型。

第二，DCC - GARCH 模型的拓展。在金融时间序列分析中，DCC - GARCH 模型是一种常用来刻画多资本市场间动态关系的模型。然而，该模型的局限性在于其“理想性”的假设，譬如正态性、对称性等。为此，本书将在 Copula 基础上提出了一个既能刻画边缘分布又能反映联合分布，同时还能体现正负冲击所带来非对称性影响的时间序列模型，从而拓宽 DCC - GARCH 模型和 Copula 模型在金融领域的应用范围。

第三，Copula 在离散数据中的应用。尽管 Copula 函数在连续型变量上的应用研究已经相当广泛，但是其在计数数据上的应用比较匮乏。究其原因，可以发现问题主要源于 Copula 模型的参数估计上。尽管已

经有一些文献对离散 Copula 模型的估计做了相应的研究,但当模型维度较大时,离散 Copula 模型估计的有效性就受到一定的挑战。为了提高高维离散 Copula 模型的估计效率和精确度,本书基于贝叶斯方法提出新的模型估计法。

第四, Copula 模型拟合度的检验。在 Copula 模型的金融和经济应用中,选择正确合理的 Copula 模型是重中之重。模型的正确性是保证分析结论正确性的首要条件。因而,本书最后将现有的一些关于 Copula 模型拟合度检验方法进行比较分析,从而为读者在未来 Copula 模型选择中提供一定的参考建议。

第五,理财产品的出现及定价吸引了越来越多投资者的关注,其相依性度量是定价的关键。然而,单个 Copula 函数在处理变量相依性时存在一定的不足,而混合 Copula 函数则将不同的 Copula 函数混合在一起以提高变量相依性的度量。本书将深入探讨分析混合 Copula 函数在结构性理财产品定价中的应用。

第三节 国内外研究现状

Copula 模型理论的提出可以追溯到 Sklar 的理论 (Sklar, 1959)。Sklar 将多个随机变量的联合分布分解为两个部分:一部分是各随机变量的边缘分布,另一部分是 Copula 函数,用以刻画相依结构。如果边缘分布是连续的,则 Copula 是唯一确定的,否则, Copula 只在各边缘累积分布函数值域内是唯一确定的。Copula 的优良性质使它在统计中得到了广泛的应用。理论方面的参考文献有:Jeo (1997) 和 Nelson (1999) 比较系统地介绍了 Copula 函数的有关理论和性质,并给出了一些阿基米德 Copula 函数的形式和有关的性质;Frey 和 McNeil (2003) 给出了一般化的相关系数定义并使用 Copula 方法来分析尾部相依性;

Cherubini 等 (2004) 对 Copula 在金融数学及其衍生定价中的应用进行了详细的介绍; Nelsen (2006) 对 Copula 函数及其统计和数学基础进行了详细介绍; Kolev 等 (2005) 对 Copula 理论的最新研究进展进行了综述。另外, 在 Copula 函数的基础上, Patton (2002) 曾通过在分布中加入条件变量引入了条件 Copula 函数; Fermanian 和 Wegkamp (2004、2012) 提出了 Pseudo - Copula 的概念; 结合条件 Copula 函数和 Pseudo - Copula 函数的性质, Klein (2005) 提出了条件 Pseudo - Copula 函数; Fermanian (2017) 就 Copula 模型的最新进展进行了总结。

在各类 Copula 函数中, 椭圆 Copula 函数所对应的变量联合分布的轮廓近似为椭圆形, 因而该类分布常出现于统计学和计量经济学, 尤其是金融学中。其中, 最常用的椭圆 Copula 是高斯 Pseudo - Copula 函数 (Li, 2000) 或称为正态 Pseudo - Copula 函数, 以及 Student's t Pseudo - Copula 函数 (Embrechts 等, 2001; Fang 和 Fang, 2002; Demarta 和 McNeil, 2005)。

Copula 理论自创立以来, 从最初的应用于生存分析中生物统计学已逐渐拓展到其他领域, 如今 Copula 模型已经渗透到各行各业。例如, 金融方面 (Cherubini 等, 2004; McNeil 等, 2005; Neito - Barajas, 2008; Hu, 2010; Kume 和 Hashorva, 2012); 水文地理学方面 (Genest 等, 2007; Fatahi 等, 2012); 公共卫生方面 (Wang 和 Wells, 2000; He 等, 2012); 精算行业 (Frees 和 Valdez, 1998; Klugman 和 Parsa, 1999; Zhao 和 Zhou, 2010; Peters, 2014); 等等。

国内关于 Copula 模型的应用也比较多。例如, 张尧庭 (2002) 从理论上探讨了 Copula 在金融上应用的可行性; 韦艳华、张世英 (2004) 等用 Copula - GARCH 模型研究了上海证券市场中几个板块间的相依性; 段小兰和郝振纯 (2007) 探讨了 Copula 函数在水文事件尤其是水

文极值事件多变量分析中的必要性；孙彬、杨朝军和于静（2009）运用 Copula 函数分析国际证券市场的传染效应；胡心瀚、叶五一和缪柏其（2010）用 Copula - ACD 模型对股票连涨（连跌）收益率风险进行分析；马超群和王宝兵（2011）用 Copula - GARCH 模型研究外汇期货最优套期保值比率；明瑞星和谢铨（2013）用 Copula 函数分析我国商业银行各类操作风险之间的相依性；吴恒煜和胡根华（2014）用 Copula - GARCH 模型对市场之间的动态相依性进行分析。

而在金融运用方面，国内学者除了应用 Copula 函数研究变量之间的相依关系外，还将其用于风险管理和衍生品定价领域。

1. 风险管理

张明恒（2004）研究了多金融资产风险价值的 Copula 计量模型和计算方法；吴振翔等（2006）使用 Copula - GARCH 模型来分析投资组合风险；任仙玲和张世英（2007）利用多元阿基米德 Copula 捕捉多个金融资产间的相关结构，建立 Copula - Kernel 模型对中国股票市场的实际组合投资问题进行风险分析，并在风险最小原则下，给出不同置信水平下的最小 VaR 值及其对应的最优组合权重系数；徐志春（2008）运用 Copula 函数改进 Credit - Metrics 模型，实证结果表明传统的 VaR 方法低估了信用风险，而基于 t 分布的 Copula 方法能抓住组合收益分布的厚尾特征，因而更接近实际；白保中、宋逢明和朱世武（2009）用 Copula 函数建立资产组合中每个资产的收益率门槛值来模拟资产收益率情景，同时结合 Copula 函数影射出信用评级情景，度量我国商业银行资产组合的信用风险；赵喜仓、刘寅飞和叶五一（2011）利用 Copula 技术对我国开放式基金市场的投资组合进行了风险分析；周孝华、张保帅和董耀武（2012）应用 Copula - SV - GPD 模型并结合 Monte Carlo 模拟对投资组合的风险进行测度，发现 Copula - SV - GPD 的边缘分布模