



列车-结构耦合作用的 随机振动分析方法

赵 岩 张亚辉 林家浩◎著

Random Vibration Analysis Method for
Dynamic Interaction of Train and Structures



科学出版社

列车-结构耦合作用的随机振动分析方法

赵 岩 张亚辉 林家浩 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统介绍随机振动虚拟激励法在车辆工程中的应用。全书内容主要包括:线性结构随机振动的虚拟激励法;移动荷载作用下结构响应的精细积分方法;虚拟激励法在车轨耦合系统随机振动中的应用;车轨耦合系统灵敏度分析及平顺性优化;虚拟激励法在车桥耦合系统随机振动中的应用;地震作用下车桥耦合系统随机响应;移动随机荷载作用下连续体随机振动分析;移动随机荷载作用下结构-弹性半空间耦合随机振动分析;具有不确定参数结构系统随机振动分析。

本书可作为车辆工程领域科研人员和工程技术人员,以及相关专业高年级本科生、研究生、教师参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

列车-结构耦合作用的随机振动分析方法 / 赵岩, 张亚辉, 林家浩著.
—北京: 科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-058450-2

I. ①列… II. ①赵… ②张… ③林… III. ①列车振动-随机振动-分析方法 IV. ①U260.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 177504 号

责任编辑: 杨慎欣 / 责任校对: 郭瑞芝
责任印制: 师艳茹 / 封面设计: 无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

河北鹏润印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张: 20

字数: 512 000

定价: 136.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

本书由

大连市人民政府资助出版

**The published book is sponsored
by the Dalian Municipal Government**

序

从 1905 年爱因斯坦探讨布朗运动开始,对随机动力现象的研究正式进入了学术界的视野。在航空、航天等实际工程的推动下,随机荷载环境下结构动力学行为机制的相关研究获得了快速的发展,并于 20 世纪 50 年代形成随机振动这门技术学科。由于传统的国外计算方法过于繁琐,在很长一段时间里随机振动理论在工程界的应用受到了很大限制。随机振动的虚拟激励法源于海洋工程动力分析的需求,自 1985 年正式发表以来,经三十多年的发展,从计算力学的角度对随机振动传统算法进行了系统更新,其高效和精确的特性使得这一系列算法在我国工程界得到了日益广泛的传播和应用。

虚拟激励法作为我国科技工作者提出和发展的算法系列与我们国家工程建设的环境背景密切相关。改革开放以来,我国土木工程建设获得日新月异的发展,大跨度生命线工程结构的抗震安全得到了学术界和工程界的极大关注,虚拟激励法在工程结构抗震领域获得了应用和发展,在国际上首先实现了大跨度结构在多点非均匀随机地震作用下高效三维平稳/非平稳随机振动分析,具有极大的学术贡献,相关研究成果也被我国桥梁抗震工程细则推荐,表现出了良好的工程应用价值。

近二三十年,随着我国经济和科技的快速发展,高速铁路作为现代化交通工具建设非常迅速。随着列车运行速度的提高,由轨道表面不平度产生的车辆随机振动会对车辆乘坐的舒适性、车辆本身的疲劳寿命等产生很大的影响。传统的基于确定性的设计方法已经远远不能满足实际的应用需求,必须依靠现代计算力学理论进行系统的优化设计与安全评估。该书的研究课题正是在此背景下被提出,针对我国高速铁路工程中的关键科学问题,基于虚拟激励法和辛数学方法,在车辆-轨道-桥梁随机动力学研究上取得了一系列进展。这些研究成果不仅有助于提高我国高速铁路设计的水平,同时也促进了随机振动理论与数值方法的广泛应用和深入发展。

该书对于工程技术人员和理论研究者是一本有价值的参考著作。

钟万勰

2018 年 3 月

前 言

轨道不平顺具有本质的随机性,由其诱发的随机振动是影响列车运行舒适性、安全性和可靠性的重要因素。随机振动传统算法的不足使得随机振动理论成果在实际工程中的应用远没有得到有效发挥。虚拟激励法是精确、高效且应用非常方便的结构随机振动分析算法系列。它适用于结构受到单点或多点、平稳或非平稳、部分相干或完全相干的随机激励。经过多年发展,虚拟激励法作为随机振动的快速算法很好地解决了计算瓶颈问题,将虚拟激励法引入铁路交通工程随机振动问题的研究对于列车、线路设计和运营维护具有很好的意义,并逐渐成为我国许多工程和研究领域人员在发展高速铁路动力学数值仿真技术中广为采用的有效方法。与此同时,列车与结构耦合随机振动分析的一些特有力学行为也促进了随机振动理论与数值方法的进一步发展。

本书系统介绍虚拟激励法在车辆工程中的应用。全书共 9 章:第 1 章介绍线性结构随机振动的虚拟激励法;第 2 章介绍移动荷载作用下结构响应的精细积分方法;第 3 章介绍虚拟激励法在车轨耦合系统随机振动中的应用;第 4 章介绍车轨耦合系统灵敏度分析及平顺性优化;第 5 章介绍虚拟激励法在车桥耦合系统随机振动中的应用;第 6 章介绍地震作用下车桥耦合系统随机响应;第 7 章介绍移动随机荷载作用下连续体随机振动分析;第 8 章介绍移动随机荷载作用下结构-弹性半空间耦合随机振动分析;第 9 章介绍具有不确定参数结构系统随机振动分析。

相对于土木工程受地震作用或者海洋平台受波浪荷载的随机振动,车辆与结构的耦合随机振动具有明显区别。前者随机振动行为由随机荷载输入引起,后者由相对运动体系接触不平顺引起;由此两者相关的分析理论与数值手段也具有差异性。本书最主要特色是将虚拟激励法和辛数学方法作为主要技术手段贯穿全书始终,探讨了车轨耦合随机振动、车桥耦合随机振动以及移动随机荷载引起的环境振动问题等,并发展了较为系统的分析理论与方法。

在本书的相关研究和写作过程中,钟万勰院士始终给予了多方面的指导和热情的鼓励和支持。在钟万勰院士的关心和支持下,作者克服了许多困难,使得这项研究成果逐步完善。

吕峰、张志超、徐文涛、张有为、张健、朱丹阳、项盼和司理涛博士,孙维、谢齐、王凤阳和赵银庆硕士分别结合他们的学位论文参加了本书相关内容的研究,本书的写作过程得到了他们的大力支持和帮助。

本书的研究成果得到国家自然科学基金面上项目“基于非介入策略的参数不确定车辆-结构耦合系统随机振动研究”(项目编号:11772084)、“随机参数结构的中频段声振高效分析方法研究”(项目编号:11172056)、“高速列车-轨道-桥梁耦合随机振动分析和控制的虚拟激励-辛方法研究”(项目编号:10472023)、“多点地震作用下车桥耦合系统随机动力性态研究”(项目编号:10972048)、“复合系统耦合随机动力学及其基本问题研究”(项目编号:10502011)的资助,还得到了国家自然科学基金重点项目“显式几何描述下考虑非概率不确定性的连续体结构拓扑优化研究”(项目编号:11732004)、“十一五”国家科技支撑计划“中国高速列车关

键技术研究及装备研制”课题（2009BAG12A04）及国家重点基础研究发展计划（973 计划）项目“复杂装备研发数字化工具中的计算力学和多场耦合若干前沿问题”课题（2010CB832704）的资助。此外，本书获得大连市人民政府资助出版。作者在此一致表示衷心感谢。

限于时间和作者水平，书中难免出现疏漏和不足，敬请专家学者提出宝贵意见和建议，以便进一步补充和完善。

作 者

2018 年 3 月

目 录

序

前言

第 1 章 线性结构随机振动的虚拟激励法	1
1.1 线性时不变系统的虚拟激励法	1
1.1.1 平稳随机振动	1
1.1.2 非平稳随机振动	6
1.2 线性时变系统的虚拟激励法	12
1.2.1 结构受单点平稳随机激励	12
1.2.2 结构受多点完全相干平稳随机激励	13
1.2.3 结构受多点部分相干平稳随机激励	15
1.3 随机波在周期子结构中传播的虚拟激励法	16
1.3.1 周期子结构链的频域方程	16
1.3.2 周期子结构链的辛本征值及简谐波传播	18
1.3.3 平稳随机波在周期子结构链中的传播	21
参考文献	21
第 2 章 移动荷载作用下结构响应的精细积分方法	24
2.1 精细积分方法	24
2.1.1 结构运动方程的状态空间形式	24
2.1.2 指数矩阵的精细计算	25
2.1.3 常用的精细积分格式	27
2.2 移动荷载作用下桥梁结构动力响应	28
2.2.1 移动荷载作用下结构运动方程	29
2.2.2 移动荷载模拟及分解	29
2.2.3 结构响应的精细积分	31
2.3 移动质量作用下桥梁结构动力响应	34
2.3.1 移动质量作用下桥梁运动方程	34
2.3.2 耦合作用力的连续动态分解	36
2.3.3 精细积分求解格式	38
参考文献	44
第 3 章 虚拟激励法在车轨耦合系统随机振动中的应用	46
3.1 二维车轨耦合系统随机振动分析	46
3.1.1 垂向车轨耦合系统动力学方程	47

3.1.2 垂向车轨耦合系统中的随机振动的虚拟激励法	53
3.2 三维车轨耦合系统随机振动分析	61
3.2.1 弹性车轨耦合系统分析模型	62
3.2.2 有限元车轨耦合系统随机振动的虚拟激励法	68
3.3 基于随机振动方法的列车运行舒适性评估	74
3.3.1 车辆运行舒适性评价的常用准则	75
3.3.2 影响车辆运行舒适性的主要因素	81
参考文献	87
第4章 车轨耦合系统灵敏度分析及平顺性优化	89
4.1 基于虚拟激励法的参数灵敏度分析	89
4.1.1 结构平稳随机响应的一阶灵敏度分析	89
4.1.2 结构平稳随机响应的高阶灵敏度分析	91
4.1.3 基于振型叠加法的随机响应灵敏度分析	93
4.2 具有不确定参数车轨耦合系统随机振动灵敏度分析	95
4.2.1 耦合系统动力学方程	96
4.2.2 车轨耦合系统随机振动的灵敏度分析	100
4.3 基于有限元车轨耦合系统的车辆平顺性优化	105
4.3.1 刚柔混合车轨耦合系统运动方程及运行舒适度分析	105
4.3.2 车辆悬挂系统平顺性优化设计	108
参考文献	114
第5章 虚拟激励法在车桥耦合系统随机振动中的应用	116
5.1 车桥耦合系统垂向随机振动分析	116
5.1.1 垂向车桥耦合系统运动方程	117
5.1.2 虚拟激励法求解车桥耦合系统的垂向随机响应	119
5.2 三维车桥耦合系统随机振动分析	125
5.2.1 车桥系统耦合运动方程	126
5.2.2 PEM-PIM 求解三维车桥耦合系统随机响应	132
5.3 车桥耦合系统振动分析的预估免迭代方法	139
5.3.1 车桥耦合系统运动方程	140
5.3.2 预估格式的车桥耦合问题精细积分法	143
5.3.3 轨道不平顺下的随机振动分析	148
参考文献	155
第6章 地震作用下车桥耦合系统随机响应	156
6.1 地震输入功率谱模型及其空间效应	156
6.1.1 地面运动功率谱模型	156
6.1.2 地面运动的空间效应	157
6.2 一致地震作用下车桥耦合系统随机响应	160
6.2.1 地震作用下车桥耦合系统运动方程	160

6.2.2	PEM-PIM 求解车桥耦合系统随机地震响应	161
6.2.3	非平稳随机响应最大值估计	162
6.3	考虑行波效应的车桥耦合系统随机地震响应	169
6.3.1	考虑行波效应地震作用下车桥系统耦合运动方程	169
6.3.2	车桥耦合系统随机地震响应求解	172
6.4	多点随机地震作用下车桥耦合系统随机响应分析	177
6.4.1	考虑地震作用的车桥耦合系统运动方程	178
6.4.2	虚拟激励法在车桥多点地震分析中的应用	182
	参考文献	190
第 7 章	移动随机荷载作用下连续体随机振动分析	192
7.1	移动随机荷载作用下 Kelvin 地基上无限长梁的随机振动分析	192
7.1.1	结构动力学模型及控制微分方程	192
7.1.2	结构非平稳随机响应的功率谱分析	193
7.1.3	移动荷载临界速度分析	196
7.2	移动随机荷载作用下弹性半空间体随机振动分析的 Green 函数法	202
7.2.1	随机振动分析及系统 Green 函数	202
7.2.2	半空间体在移动随机线源均布荷载作用下的响应	207
7.3	移动随机荷载作用下弹性半空间体动力响应的积分变换方法	213
7.3.1	系统的动力学控制方程	213
7.3.2	随机振动分析的积分变换方法	215
	参考文献	230
第 8 章	移动随机荷载作用下结构-弹性半空间耦合随机振动分析	231
8.1	考虑相干效应移动随机激励作用下连续体随机振动分析	231
8.1.1	连续体多点平稳激励分析的虚拟激励法	231
8.1.2	连续体非平稳随机振动分析	233
8.2	移动随机荷载作用下梁-地基土随机振动分析的混合方法	240
8.2.1	动力学模型及控制方程	240
8.2.2	非平稳随机振动演变功率谱闭合解	241
8.3	哈密顿体系下移动荷载致地面非平稳随机振动的虚拟激励法	251
8.3.1	移动荷载作用下线性系统非平稳随机响应	251
8.3.2	移动坐标系下系统运动方程及多点激励的虚拟激励方法	253
8.3.3	求解波传播运动方程的精细积分算法	255
	参考文献	264
第 9 章	具有不确定参数结构系统随机振动分析	265
9.1	平稳随机振动的高阶摄动分析方法	265
9.1.1	平稳随机响应的一阶摄动方法	265
9.1.2	平稳随机响应的高阶摄动方法	266

9.2	悬挂参数具有不确定性的车轨耦合系统的舒适度评价	272
9.2.1	舒适度评价指标	273
9.2.2	改进摄动法	273
9.2.3	具有不确定参数舒适度指标	277
9.3	复合随机振动分析的混沌多项式-虚拟激励方法	283
9.3.1	连续函数的正交多项式逼近	283
9.3.2	随机函数的混沌多项式展开	286
9.3.3	不确定参数系统复合随机振动分析	287
9.4	非高斯随机参数车轨耦合系统随机振动分析	296
9.4.1	广义混沌多项式	296
9.4.2	耦合系统复合随机振动分析	299
	参考文献	304

第 1 章 线性结构随机振动的虚拟激励法

功率谱分析是随机振动理论在工程应用中最基本的内容,即由输入功率谱求出结构响应功率谱。线性随机振动分析中这方面理论已相当成熟,计算公式也十分简洁。但这些已建立的理论成果在工程领域中并没有得到充分应用,例如,在地震工程领域中,普遍认为按照概率性的随机振动理论进行结构的抗震分析比较合理(特别是对于大跨度结构),分析理论也早已建立,但在工程抗震设计中还是很少被应用。计算的复杂性是造成这一现象的根本原因,为避免计算的复杂性,在以往的随机振动分析中往往将计算模型取得十分简单或借助精度颇成问题的近似。虚拟激励法将平稳随机振动的计算转化为稳态简谐响应计算,将非平稳随机振动的计算转化为普通逐步积分计算,实现了用最基本的结构动力学方法来处理一般的平稳和非平稳随机响应分析问题,在许多工程领域获得广泛应用^[1-30]。本章介绍线性时不变系统和线性时变系统虚拟激励法的基本思想,给出单点随机荷载和多点随机荷载作用下,应用虚拟激励法进行结构随机振动功率谱分析的算法格式。同时,也给出结合虚拟激励法与辛方法进行周期子结构随机波动分析的基本方法。

1.1 线性时不变系统的虚拟激励法

1.1.1 平稳随机振动

1. 结构受单点平稳激励

结构随机振动功率谱分析的主要目的是计算关心位置的位移、应力等响应量的功率谱密度,之后计算相应的谱矩。根据结构响应的功率谱和谱矩,就可以计算各种直接应用于工程设计的概率统计量,例如导致结构首次超越破坏的概率或疲劳寿命,以及评价列车运行平顺性的控制指标等。显然,改进结构响应功率谱密度的计算方法,使其计算方便、高效,对于推进随机振动成果的实用性具有重要意义,虚拟激励法就是为达到此目的而发展起来的计算方法。下面由单激励问题阐述其基本原理。

假定外部激励是一个服从正态分布的平稳随机过程 $f(t)$, 其自功率谱密度函数为 $S_{ff}(\omega)$ 。对于线性时不变系统, 响应 $y(t)$ 的自功率谱 $S_{yy}(\omega)$ 可以表示为

$$S_{yy}(\omega) = |H|^2 S_{ff}(\omega) \quad (1.1.1)$$

此关系如图 1.1.1 (a) 所示。其中频率响应函数 H 的意义如图 1.1.1 (b) 所示, 即当随机激励被单位简谐激励 $e^{i\omega t}$ 代替时, 相应的简谐响应为 $y(t) = He^{i\omega t}$ 。显然, 若在激励 $e^{i\omega t}$ 之前乘以常数 $\sqrt{S_{ff}(\omega)}$, 即构造虚拟激励

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.2)$$

则其响应量亦应乘以同一常数, 如图 1.1.1 (c) 所示。仍用 $\#$ 代表变量 $\#$ 的相应虚拟量, 由

图 1.1.1 (c) 可知

$$\tilde{y}^* \tilde{y} = |\tilde{y}|^2 = |H|^2 S_{ff}(\omega) = S_{yy}(\omega) \quad (1.1.3)$$

$$\tilde{f}^* \tilde{y} = \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{S_{ff}(\omega)} H e^{i\omega t} = S_{ff}(\omega) H = S_{fy}(\omega) \quad (1.1.4)$$

$$\tilde{y}^* \tilde{f} = \sqrt{S_{ff}(\omega)} H^* e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{i\omega t} = H^* S_{ff}(\omega) = S_{yf}(\omega) \quad (1.1.5)$$

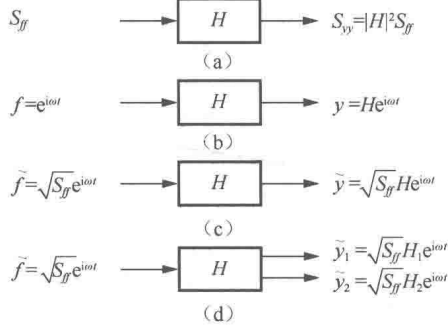


图 1.1.1 虚拟激励法的基本原理

如果在上述系统中考虑两个虚拟响应量 $\tilde{y}_1$ 与 $\tilde{y}_2$ ，见图 1.1.1 (d)，不难验证

$$\tilde{y}_1^* \tilde{y}_2 = H_1^* \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{-i\omega t} \cdot H_2 \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{i\omega t} = H_1^* S_{ff}(\omega) H_2 = S_{y_1 y_2}(\omega) \quad (1.1.6)$$

$$\tilde{y}_2^* \tilde{y}_1 = H_2^* S_{ff}(\omega) H_1 = S_{y_2 y_1}(\omega) \quad (1.1.7)$$

利用以上诸式可得关于功率谱矩阵的下列算法格式：

$$S_{yy}(\omega) = \tilde{\mathbf{y}}^* \cdot \tilde{\mathbf{y}}^T \quad (1.1.8)$$

$$S_{fy}(\omega) = \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot \tilde{\mathbf{y}}^T \quad (1.1.9)$$

$$S_{yf}(\omega) = \tilde{\mathbf{y}}^* \cdot \tilde{\mathbf{f}}^T \quad (1.1.10)$$

如果对应力 σ 、应变 ε 感兴趣，则按虚拟激励式 (1.1.2) 求得上述各量的虚拟简谐响应 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\varepsilon}$ 后即可直接得到它们的自谱密度

$$S_{\sigma\sigma}(\omega) = |\tilde{\sigma}|^2, \quad S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |\tilde{\varepsilon}|^2 \quad (1.1.11)$$

或任意的互谱密度，例如

$$S_{\sigma\varepsilon}(\omega) = \tilde{\sigma}^* \tilde{\varepsilon}, \quad S_{y_f}(\omega) = \tilde{\mathbf{y}}^* \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.1.12)$$

等。显然，上述虚拟激励法用起来十分方便，计算自谱互谱都有简单而统一的公式。只要响应与激励之间的关系是线性的，虚拟激励法就能应用。不论在自谱还是互谱计算中，虚拟简谐激励因子 $e^{i\omega t}$ 与其复共轭 $e^{-i\omega t}$ 总是成对出现并最终相乘而抵消的。这反映了平稳问题的自谱互谱非时变性。

对于复杂自由度结构体系，可以采用振型叠加法实现方程的降阶进一步提高计算效率。离散化结构受均匀地面激励时的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\mathbf{e}\ddot{x}_g(t) \quad (1.1.13)$$

式中， $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别为系统的质量阵、阻尼阵和刚度阵； $\mathbf{e}$ 为惯性力指示向量； $\ddot{x}_g(t)$ 为地面加速的激励，其自谱为 $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$ 。

构造虚拟地面加速度激励 $\ddot{x}_g(t) = \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t}$ ，并代入上述运动方程，有

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -Me\sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.14)$$

求出结构前 q 阶特征对 Φ 及 Ω^2 ， $q \ll n$ ，它们满足正交归一条件

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2, \quad \Phi^T M \Phi = I \quad (q \text{ 阶单位阵}) \quad (1.1.15)$$

之后将结构位移响应 y 按 Φ 分解：

$$y = \Phi u = \sum_{j=1}^q u_j \phi_j \quad (1.1.16)$$

将式 (1.1.16) 代入运动方程 (1.1.14)，并利用正交归一条件 (1.1.15)，有

$$\ddot{u} + \bar{C}\dot{u} + \Omega^2 \tilde{u} = -\Phi^T M e \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.17)$$

式中，

$$\bar{C} = \Phi^T C \Phi \quad (1.1.18)$$

暂仍假定 C 是比例阻尼矩阵，则方程 (1.1.17) 可以分解为 q 个互相独立的单自由度方程

$$\ddot{u}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{u}_j + \omega_j^2 \tilde{u}_j = \gamma_j \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t}, \quad j=1, 2, \dots, q \quad (1.1.19)$$

这是单自由度简谐振动方程，易得其稳态解为

$$\tilde{u}_j = \gamma_j H_j \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.20)$$

式中，

$$H_j = (\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_j \omega_j \omega)^{-1} \quad (1.1.21)$$

因此

$$\tilde{y}(t) = \sum_{j=1}^q \tilde{u}_j \phi_j = \sum_{j=1}^q \gamma_j H_j \phi_j \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.22)$$

将式 (1.1.22) 右端的计算结果代入式 (1.1.8) 就得到所需要的响应功率谱矩阵 S_{yy} 。可将式 (1.1.8) 右端展开，得

$$S_{yy} = \tilde{y}^* \tilde{y}^T = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \gamma_j \gamma_k \phi_j \phi_k^T H_j^*(\omega) H_k(\omega) S_{\ddot{x}_g}(\omega) \quad (1.1.23)$$

它的右端与传统完全二次组合 (complete quadratic combination, CQC) 算法计算精度是完全一样的，但由式 (1.1.8) 计算效率却获得极大提升。

2. 结构受多点完全相干平稳激励

结构受多点完全相干激励的情形在工程实际中广泛存在。火车在轨道上运行时，同一条轨道上的任意两个车轮可以认为受到相同的轨道不平顺激励，但其间存在某一时间差。大跨度桥梁的抗震分析一直是工程界极为关注的问题，现在人们已普遍认识到对这类结构考虑不同地面节点的运动相位差 (即所谓行波效应) 是很重要的。导管架海洋平台各个支腿受到的随机波浪力之间也必须考虑相位差。对于这类问题，按传统的随机振动方法计算时工作量极大，是随机振动工程应用的一个主要障碍。上述问题皆可视为广义的单激励问题，推广结构受单点平稳激励的虚拟激励法即可方便地解决。

设 n 自由度的弹性结构受 m 点 ($m \leq n$) 异相位平稳随机激励，为

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 f(t-t_1) \\ a_2 f(t-t_2) \\ \vdots \\ a_m f(t-t_m) \end{Bmatrix} \quad (1.1.24)$$

$\mathbf{f}(t)$ 各输入分量有相同的形式, 但存在时间滞后, 即作用时间上相差一个常因子。这里 a_j ($j=1,2,\dots,m$) 是实数, 代表各点的作用强度。

假定式 (1.1.24) 中所有 a_j 和 t_j 皆为已知常数, 则 $\mathbf{f}(t)$ 可视为广义的单激励。设 $\mathbf{f}(t)$ 的自谱密度 $S_{ff}(\omega)$ 为已知, 则按式 (1.1.2), 相应的虚拟激励为

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.25)$$

显然, 与 $f(t-t_1)$ 相应的虚拟激励为 $\tilde{f}(t-t_1) = \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{i\omega(t-t_1)}$, 而与前面式 (1.1.24) 相应的虚拟激励为

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \begin{Bmatrix} a_1 e^{-i\omega t_1} \\ a_2 e^{-i\omega t_2} \\ \vdots \\ a_m e^{-i\omega t_m} \end{Bmatrix} \sqrt{S_{ff}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (1.1.26)$$

在此虚拟激励 $\tilde{\mathbf{f}}(t)$ 作用下, 结构运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{f}}(t) \quad (1.1.27)$$

式中, $\mathbf{E}$ 为 $n \times m$ 维常量矩阵, 表征外力分布状况。问题归结为求解简谐运动方程。当 n 很大时, 仍用振型叠加法对方程 (1.1.27) 降阶。并仍令 $\mathbf{y}(t) = \Phi \tilde{\mathbf{u}}(t) = \sum_{j=1}^q \tilde{u}_j \boldsymbol{\varphi}_j$, 代入上式, 同时将 Φ^T 左乘以式 (1.1.27) 各项, 得

$$\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{\Omega}}^2 \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (1.1.28)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi, \quad \bar{\mathbf{f}} = \Phi^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.1.29)$$

不论 $\mathbf{C}$ 是否为正交阻尼阵, 方程 (1.1.28) 的 $\tilde{\mathbf{u}}$ 总可按求解代数方程的方法解出。再按式 (1.1.22) 求得位移向量 $\tilde{\mathbf{y}}$, 进而求得感兴趣的内力向量 $\tilde{\mathbf{n}}$, 等等。然后应用虚拟激励法得到各种自谱互谱, 例如

$$\mathbf{S}_{yy} = \tilde{\mathbf{y}}^* \tilde{\mathbf{y}}^T, \quad \mathbf{S}_{fn} = \tilde{\mathbf{f}}^* \tilde{\mathbf{n}}^T \quad (1.1.30)$$

顺便指出, 式 (1.2.24) 给出的平稳随机激励向量 $\mathbf{f}(t)$ 的激励谱矩阵亦可如此求出, 即

$$\mathbf{S}_{ff}(\omega) = \tilde{\mathbf{f}}^* \tilde{\mathbf{f}}^T = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 e^{i\omega(t_1-t_2)} & \dots & a_1 a_m e^{i\omega(t_1-t_m)} \\ a_2 a_1 e^{i\omega(t_2-t_1)} & a_2^2 & \dots & a_2 a_m e^{i\omega(t_2-t_m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m a_1 e^{i\omega(t_m-t_1)} & a_m a_2 e^{i\omega(t_m-t_2)} & \dots & a_m^2 \end{bmatrix} S_{ff}(\omega) \quad (1.1.31)$$

上述激励谱矩阵也可由相关函数矩阵 $\mathbf{R}_{ff}(\tau) = E[\mathbf{f}(t) \mathbf{f}^T(t+\tau)]$ 作傅里叶变换, 并利用

维纳-辛钦关系而得到。但不如这里所给出的方法简便。

本节中涉及的功率谱矩阵都可以由两个向量相乘而得到，显然其秩一定为1。

3. 结构受多点部分相干平稳激励

大跨度桥梁在地震荷载作用下，除了必须考虑不同地面节点的运动相位差（行波效应）外，还应考虑地震波并非严格出自一点，以及因土壤介质不均匀而造成各点激励之间相干性的损失；阵风作用于建筑物上时，同一迎风面的不同点处所受的随机阵风荷载之间也是有部分相干性的。处理这类问题比之处理多点完全相干问题更为困难^[31,32]。从虚拟激励法的角度来分析，这类问题可以分解为有限个完全相干问题的叠加。

设 n 自由度的线性结构受多点（ m 点）部分相干平稳随机激励 $\mathbf{f}(t)$ 作用，其 $m \times m$ 维功率谱矩阵 $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ 已知。它一般不能分解为类似式（1.1.31）由两个向量相乘的形式。但由于功率谱矩阵必定是一个 Hermitian 矩阵，所以它可被表达成下列形式：

$$\mathbf{S}_{ff}(\omega) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \boldsymbol{\psi}_j (\boldsymbol{\psi}_j^*)^T \quad (1.1.32)$$

式中，上标*与 T 代表取复共轭及矩阵（向量）转置； λ_j 及 $\boldsymbol{\psi}_j$ 则是该 Hermitian 矩阵的特征对，它们满足以下关系式：

$$\mathbf{S}_{ff} \boldsymbol{\psi}_j = \lambda_j \boldsymbol{\psi}_j \quad (1.1.33)$$

$$(\boldsymbol{\psi}_i^*)^T \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1.1.34)$$

因此，只要用每一阶特征对构造下列虚拟激励：

$$\tilde{\mathbf{f}}_j = \boldsymbol{\psi}_j^* \sqrt{\lambda_j} e^{i\omega t} \quad (1.1.35)$$

就可以将 $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ 表达为以下形式：

$$\mathbf{S}_{ff}(\omega) = \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{f}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T \quad (1.1.36)$$

一般情况下， $\boldsymbol{\psi}_j$ 是复向量，而 λ_j 为非负实数。 $\mathbf{f}_j$ 与式（1.1.24）在结构上完全一致，其相应的虚拟响应求解可按上节的方式进行。首先按下式计算虚拟响应

$$\tilde{\mathbf{y}}_j = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{f}}_j \quad (1.1.37)$$

然后，不难证明下列算式成立：

$$\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{y}}_j^* \tilde{\mathbf{y}}_j^T = \mathbf{H}^* \left(\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{f}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T \right) \mathbf{H}^T = \mathbf{H}^* \mathbf{S}_{ff}(\omega) \mathbf{H}^T = \mathbf{S}_{yy}(\omega) \quad (1.1.38)$$

$$\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{f}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T = \left(\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{f}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T \right) \mathbf{H}^T = \mathbf{S}_{ff}(\omega) \mathbf{H}^T = \mathbf{S}_{fy}(\omega) \quad (1.1.39)$$

$$\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{y}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T = \mathbf{H}^* \left(\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{f}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T \right) = \mathbf{H}^* \mathbf{S}_{ff}(\omega) = \mathbf{S}_{yf}(\omega) \quad (1.1.40)$$

如果由 $\tilde{\mathbf{f}}_j$ 算得另一种量的虚拟响应为 $\tilde{\mathbf{z}}_j$ ，则不难证明两种响应 $\mathbf{y}$ 与 $\mathbf{z}$ 之间的互谱矩阵为

$$\mathbf{S}_{yz} = \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{y}}_j^* \tilde{\mathbf{z}}_j^T, \quad \mathbf{S}_{zy} = \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{z}}_j^* \tilde{\mathbf{y}}_j^T \quad (1.1.41)$$

对其第一式的证明如下, 记

$$\tilde{\mathbf{y}}_j = \mathbf{H}_y \tilde{\mathbf{f}}_j, \quad \tilde{\mathbf{z}}_j = \mathbf{H}_z \tilde{\mathbf{f}}_j \quad (1.1.42)$$

则

$$\sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{y}}_j^* \tilde{\mathbf{z}}_j^T = \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_y^* \tilde{\mathbf{f}}_j^* \tilde{\mathbf{f}}_j^T \mathbf{H}_z^T = \mathbf{H}_y^* \sum_{j=1}^m (\tilde{\mathbf{f}}_j^* \cdot \tilde{\mathbf{f}}_j^T) \mathbf{H}_z^T = \mathbf{H}_y^* \mathbf{S}_{ff}(\omega) \mathbf{H}_z^T = \mathbf{S}_{yz}(\omega) \quad (1.1.43)$$

这就证明了式(1.1.41)的第一式。其第二式的证明是同样的。式(1.1.38)的左端与式(1.1.41)就是按虚拟激励法计算各种自谱与互谱的算式。

式(1.1.32)~式(1.1.36)是用激励功率谱的特征值与特征向量来构造所用的虚拟激励。这并不是唯一的构造虚拟激励方法。例如, 可以将 Hermitian 矩阵 $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ 直接进行复三角(LDLT)分解, 也可将它表达成式(1.1.35)的形式, 而且效率比求复特征值高得多。只要能 将 $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ 分解成式(1.1.36)的形式, 将相应的 $\tilde{\mathbf{f}}_j$ (带有时间项 $e^{i\omega t}$) 按式(1.1.37)~式(1.1.41)进行同样的计算就可以了。

当 $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ 是降秩矩阵时, 其秩 r 小于 m , 故只需处理 r 个非零的虚拟激励。当 $r=1$ 时, 就退化到多点完全相干的情况。

1.1.2 非平稳随机振动

结构受地震、阵风之类的随机作用有时候持续时间很短, 以至于激励的平稳性假定不能成立。随着大型柔性结构(例如大跨度桥梁、水坝、超高层建筑等)的广泛建造, 一些结构的基本自振周期已长达 10~20s, 更使该矛盾日益突出。对于非平稳随机过程, Priestley 建议的演变功率谱密度模型^[33,34]在地震工程中尤其受到重视。这种具有演变功率谱密度的非平稳随机过程模型是以 Riemann-Stieltjes 积分的形式表达的(通常称为非均匀调制演变随机过程)。结构受到这类激励时, 对其进行随机响应分析曾遇到很大的困难。广泛采用的近似手段是忽略掉这类随机激励中振动能量随频率变化的非平稳性, 而成为均匀调制演变随机激励。这里介绍虚拟激励法应用于非平稳随机激励问题^[14-16], 可以看到在虚拟激励法的框架下, 其是平稳随机振动分析的自然推广。

1. 结构受单点非平稳激励

均匀调制演变随机激励具有下列形式:

$$f(t) = g(t)x(t) \quad (1.1.44)$$

初始静止的线性时不变体系在任意外力 $f(t)$ 作用下, 任意一种线性响应 $y(t)$ 可表示为如下 Duhamel 积分的形式:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (1.1.45)$$

如果外力是按式(1.1.44)给出的零均值演变随机激励, 则 $y(t)$ 的自相关函数为