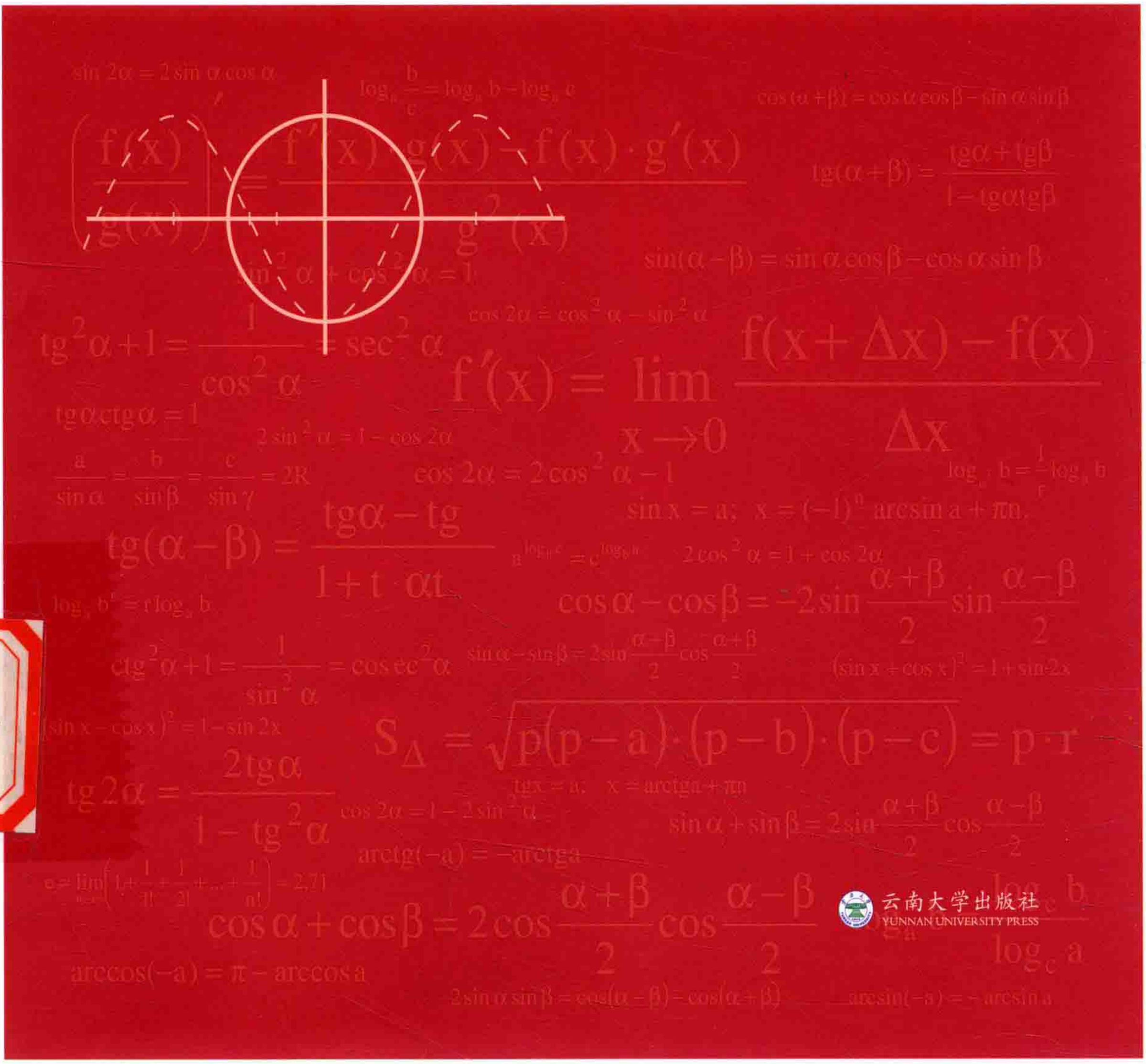
初等数学解题教学研究

（上册）

CHUDENG SHUXUE JIETI JIAOXUE YANJIU

潘继军 编著



云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

滇西科技师范学院资助出版

初等数学解题教学研究

（上册）

CHUDENG SHUXUE JIETI JIAOXUE YANJIU

潘继军　编著

云南大学出版社
YUNNAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

初等数学解题教学研究 ：全2册 / 潘继军编著. —
昆明 ：云南大学出版社，2016
ISBN 978-7-5482-2774-8

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①潘… Ⅲ. ①中学数学课－教学研究
Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第212671号

出 品 人：吴 云
策划编辑：张丽华
责任编辑：张 松
装帧设计：郑明娟

初等数学（上册）
解题教学研究

CHUDENG SHUXUE JIETI JIAOXUE YANJIU

潘继军 编著

出版发行：云南大学出版社
印　　装：昆明鹰达印刷有限公司
开　　本：787mm × 1092mm　1/16
总 印 张：28
总 字 数：717千
版　　次：2016年12月第1版
印　　次：2016年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5482-2774-8
总 定 价：70.00元（全2册）

社　　址：昆明市一二一大街182号（云南大学东陆校区英华园内）
邮　　编：650091
发行电话：0871-65033244 65031071
网　　址：http://www. ynup. com
E-mail：market@ynup. com

本书若发现印装质量问题，请与印厂联系调换，联系电话：0871-63646096。

前　言

本书是依据《全日制义务教育数学课程标准》及《初中数学课程标准》《高中数学课程标准》，力求适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革实践要求，结合国内“初等数学研究”的发展趋势而编写的。

本人通过多年对“初等数学研究”课程的教学研究与实践，认识到目前大部分师范类学校均针对培养数学教育专业的学生开设了“初等数学研究”，但该课程的教材只注重课程理论体系的完善和纯理论与方法的研究，与现实中的中学数学内容和要求有着相当大的差别，教材针对性、实用性不强，课程观念存在问题，教学方式、方法落后，不利于培养师范生的教学实践能力和创新思维能力，无法适应新形势下的教育教学工作。因此，本人根据自己20多年在一线讲台上的初等数学的教学研究与实践的心得体会，编写了《初等数学解题教学研究》。本书围绕高、初中新课标，以创新解题思路为切入点，从中学数学的教学需要出发，根据中学数学的内容和知识结构，把初等数学的一些基本问题分别组成若干专题，在内容上适当延伸和充实，在理论、观点和方法上予以提高。对各个专题的教学，都注重基本思维方法和基本技能技巧的训练。且对每种方法的特点、应用、注意事项进行了条理有序的说明，实现了数学知识和解题方法的有机结合。该书结构严谨、叙述简明、易教易学，并具有较强的科学性、实用性和可操作性，不仅对正在学习的师范生具有重要的参考作用，对在读的高中生、初中生也具有重要的指导作用。

本书不仅对初等数学的数学思想与方法进行了深入细致的研究，而且还对初等数学的解题方法、教学方法、教材分析进行了重点研究。

本书共分7章，内容包括初等数学解题法介绍、数与式解题教学法研究、方程与不等式解题教学研究、函数解题教学研究、数列解题教学研究、三角函数解题教学研究、解析几何解题教学研究。本书在阐述理论内容的同时，结合中学教学内容，特别是近几年高考、中考、各种竞赛试题等，给出具体的例子，并做出详细的分析解答。

本书既可作为高等师范院校数学教育专业本科、专科“初等数学研究”课程的教材，也可以作为中学数学教师继续教育以及其他各级、各类数学教育教学工作者的教学科研参考书。

编　者

2015年10月10日

目录

绪言：对数学教学方法改革的思考

数学教学的内容包括数学知识、数学方法和数学思维三个方面。

长期以来，中学数学教学只强调对教材上的定理、概念、例题等基础知识的传授和反复应用，而忽视了教学方法与数学思维能力的训练，这是当前中学数学教学质量不能得到普遍提高的问题所在。但这个问题在很多的中学数学教师的教学中尚未引起足够的重视。甚至有人认为数学教学最简单的方法是把大量的复习资料抛给学生，搞“题海战术”，让学生在解题中自我领悟，教师只需评判结果、对对答案。笔者认为这是一种不负责任的教法，实践也证明，这是一种收获甚微的低水平教学，是应该摒弃的。目前国内外许多的经验表明：对数学教学中的知识、方法与思维进行综合研究，并从整体上重新布局数学的教学过程，对提高数学教学质量是十分重要的。

一、对数学知识、方法与思维的认识

1. 数学教学的任务

数学是研究现实世界的空间形状和数量关系的一门科学。通过数学的学习，要使学生掌握一定的数学知识，在学习有关知识的过程中掌握解决数学问题的基本方法，从而提高运算能力、空间想象能力、逻辑思维能力及非逻辑思维能力。简言之，即要在学生掌握知识的基础上，具备发现问题、解决问题的能力。

数学方法是前人经验的总结。学生掌握了方法就能借鉴前人的成果充实自己，是迅速提高数学能力的一个重要方面。初中阶段，应该掌握的方法主要是配方法、换元法、消元法、反证法、分析法、综合法；高中阶段还需要掌握同一法、比较系数法、参数法、判别式法、放缩法、复数法、特殊值法、归纳法等。在较全面地掌握了这些方法后才能认为是进入了数学知识的领域。

为了运用已掌握的知识及方法去解决所遇到的各式各样的数学问题和实际问题，必须让学生具有数学思维能力，才能在变式(具体的问题)中寻找解答的定式方向，这需要有较强的模拟辨认的能力，这种能力是数学能力的精华所在。近几年全国的高考题就很注意对考生数学思维能力的考查。虽然一些试题的原型均在教材上可以找到，但经过适当的变更条件和拼接，云南省的部分考生就不适应，这反映出在数学模式教学上未抓牢，在模式的基础上加强变式训练也不足，所以在教学中加强数学思维的研究是极其重要的一环。

数学思维的实质是什么呢？我们知道，数学是一门抽象的学科，抽象和概括是数学的实质，因此，数学思维是研究抽象和概括的思维，它的形式是逻辑思维与非逻辑思维，即直觉思维、类比思维、发现思维等。非逻辑思维的特点是对大量的数学问题，通过模拟辨认来识别新的一类问题。在解题中要注意“先模仿再灵活”的原则，这样就可以改变当前在教学中的

题海战术、大运动量的教学方式，从而起到事半功倍的作用。

2. 现代数学教学的特点

如果把数学概念的抽象概括、定理的证明也看成“题”的话，那么，数学教学每日每课都是在“解题”。因此，解题教学是现代数学教学的核心，学生解题能力的高低就意味着教师教学能力的高低，所以解题教学在数学教学中的地位是极其明显的，在解题教学中应注意的事项如下：

①教师的示范作用：问题导出的结论，前人所经历过的思想过程。

②如何思考一道题：如何从具体问题中过渡到解题模式中去，把不熟悉的问题转化为熟悉的问题。

③对一组问题进行概括抽象推理，让学生把此类问题升华到一般情况。

④让学生自己修正错误，解题教学要精、要巧、要活、要具代表性，必须破除题海战术，努力做到既减轻学生负担，又提高教学质量。

二、解题教学的实施

解题教学中一方面要培养学生严谨的作风，即据已有的知识进行判断推理，做到言之有据，另一方面要鼓励大胆的猜想，培养开拓性的作风。教师要特别注意方法的指导，揭示解决问题的思维过程，这是数学方法、数学思维教学的中心环节。在具体处理上要特别强调：①方程观点：由已知探求未知；②映射观点：通过代换，把一个不熟悉的问题转化到熟悉的领域中去解决；③归纳观点：由特殊推广到一般的思想。

在解题教学中注意思维的启迪。数学学习的思维分为发现思维与整理性思维，其中前者以直觉、归纳、类比为主体，后者以演绎为主体。所以数学思维教学课型，可分为以下6种。

1. 类比思维课

类比思维是根据两事物A和B之间的某些相似，推断出它们的另一些性质也相似。

例如，在平面几何中可以用面积之比来研究线段之比，那么在立体几何中也可以考虑用体积之比来研究其面积(或线段)之比。

2. 发现思维课

发现思维是指结论尚未建立前的思维，带有明显的想象和搜索的性质，受一定的认识目标所支配。

3. 归纳思维课

所谓归纳，就是把局部的性质上升为整体的性质。归纳思维满足多样的统一的原则。

4. 直觉思维课

直觉思维往往含有归纳和类比，实际上是自觉或不自觉地由全体、直接、无阶段寻求着某种统一。

5. 发散思维课

发散思维是一种创造性思维，它可从一点出发，运用所学过的基础理论进行放射联想，追求多种多样的解题方法和答案，并可以由此及彼、由表及里，触类旁通，活跃学生的思维，拓宽学生的思路，在问题的深度和广度上进行挖掘。这对于培养学生分析问题和解决问题的能力有很大帮助。

6. 概括思维课

数学的抽象性导致其有极大的概括性，它是指从具体内容摆脱出来，并在各种对象、关系和运算的结构中，抽取出相似的、一般的和本质的东西的思维过程，是浓缩知识、方法与思维的过程，是知识的结晶与知识系统化、条理化的过程。

除此之外，在数学教学中还要注意数学美的追求。所谓数学美，它的原则是在数学的发现思维中寻求多样的、统一的原则。多样统一是数学美的体现。一方面，能刻画某一群现象的理论，越简单越美；另一方面，如果有一个确定的理论，那么它所说明的事实越多，就越美。

1 初等数学解题法介绍

1.1 解题规律的探讨

1.1.1 探索解题规律

解题是一种创造性的思维活动，解题的教学要以科学的解题理论做指导，按照课程标准、教材所规定的内容和要求来进行，让学生了解解题的要素，掌握解题的规律，学会解题后的推广和引申，适时总结解题的经验，不断提高解题能力，让学生养成良好的解题习惯，这对提高教学质量和开拓学生的思维具有重要的意义。为此，在平时的教学中，重视和加强例题、习题的教学，要善于总结解题规律。

(1)要了解解题规律

据目前成功的经验来看，解题规律的探索可分为四个步骤：

①必须弄清楚问题：未知是什么？已知是什么？附加条件是什么？

②找出已知与未知之间的联系，拟订解题策略，并根据可行的策略制订计划。

③实现解题计划：解题过程中的每一步都必须做到言之有据，才能保证每一步的正确性。

④验证所得的解：检验解的正确性，考虑能否有更简便的方法得出这个结果，能否把这个结果推广，或者得出更一般的结果。

(2)要学会推广引申

推广引申，就是在解题完毕后，对原题的条件、结论、题型和解题方法做进一步的思考，引申出新题和新解法。学会推广引申不但能加深对原题的理解，而且对于扩大解题效果、提高解题能力、培养发散思维、激发创造精神，都有不可忽视的积极作用。推广引申一般有如下四种情况：

①把条件开拓引申。

条件在题目里居于主导地位，结论或问题是由条件决定的，如果题目的条件改变了，那么题目的结论或问题就可能随之变化。改变条件的方法有以下几种：

A. 把特殊条件一般化：放宽对条件的限制，使特殊条件一般化，从而推出更具有普遍性的结论。

B. 把一般条件特殊化：把一般条件加以限制，使它变为特殊条件，从而获得新的结论。

C. 特殊条件与一般条件交替变化：题目的变化有时是“特殊”与“一般”交替进行的。

②把结论开拓引申。

有的题目，在条件不改变的情况下，可以把结论开拓引申，使问题深化。

③把题型开拓引申。

同一个题目给予不同的提法，可以变成不同的题型，俗称为“一题多变”，但其解法类似

或相同，可谓殊途同归。按其解法而言，又可称为“多题一解”。

作为一名中学教师，在讲例题时，选择一些题目，将其作为一题多变的示范教学，或作为单元复习题布置给学生自己去发挥，可以激发学生的学习兴趣，加深其对知识的理解。

④把方法开拓引申。

一道数学题，从不同角度、不同方位去考虑，可以有不同的思路、不同的解法。考虑得越广泛越深刻，获得的思路就越开阔，解法就会更加多样。通过“一题多解”的训练，能开阔思路，增强综合运用数学知识的能力，能充分调动学生的积极性，也有利于提升学生的创新能力。

(3)要善于积累解题经验

解题能力由知识、能力和经验等多种因素构成，要提高解题能力，除了要加强基础知识教学和基本能力培养外，还要有目的、有计划地指导学生总结解题方法，领悟解题规律，归纳解题策略，从各个不同的角度积累解题经验。要积累一定的解题经验，须把握好三个环节：

①要善于总结解题方法。

解题方法有不同的层次。演绎法、归纳法、类比法、构造法、数形结合方法等是较高层次的解题方法；同一法、反证法、数学归纳法、配方法、待定系数法、判别式法、换元法、递推法、比较法、解析法、三角法、复数法、向量法、平移法、对称法、旋转法、位似法、等积法、坐标法、交轨法、参数法等是中间层次的解题方法；而十字相乘法、拆项法等方法，则属于层次较低的方法。

总结解题方法，就是在解题实践的基础上，全面总结各种不同层次的解题方法的原理、特点、适用范围以及使用时的注意事项和技能、技巧。

②要善于领悟规律。

数学题的解题方法虽然各不相同，但就解题思路而言，常常是有规律可循的。因此，我们在解题思路上要用心领悟带有规律性的东西，这样有助于活跃学生的思维，丰富学生的联想，能较快地让学生找到解题线索。

解题中规律性的东西很多，如作辅助线的规律、应用定理和公式的规律、图形变换的规律、递推的规律等，都可以在解题实践的基础上引导学生用心领会，不断总结。

③要善于归纳解题策略。

解题策略是指主体解题时宏观上采取的方针、原则和方法。善于归纳解题策略，有利于全方位、多角度思考问题，在总体上把握解题的方向。

归纳解题策略有多种途径，教学中要从如下关系中指导学生总结归纳解题策略：陌生与熟悉的关系、复杂与简单的关系、一般与特殊的关系、抽象与具体的关系、局部与整体的关系、直接与间接的关系等。

(4)要加强例题教学

例题是教师讲课时用以阐明数学概念、数学命题及其初步应用的题目，它是数学知识转化为基本技能的载体，体现教材的深度和广度，揭示解题的思路和方法，同时，也为学生提供解题的格式和表述的规范。

例题教学的主要任务，是使学生通过对例题的学习，理解和巩固数学基础知识，掌握基本概念、定义、定理、公式等的应用，形成数学基本技能；把所学的理论与实践结合起来，掌握理论的用途和用法；学会解题的书写格式和表述方法，提高分析和解决问题的能力。

初等数学中的例题，一般分为两类：一类是引入新知识的实际例子；另一类是为加深理

解、巩固有关概念和命题，熟悉其用途和方法而设立的例题。教学中，对于不同类型的例题，要选择不同的教法。

为把握好例题的教学，要熟悉例题的特点，注意例题的类比，重视例题的应用。

①要熟悉例题的特点。

教材中的例题，大致包括为加深理解和巩固新知识的例题；为阐明新知识用途和用法的例题；围绕有关数学知识，为形成一定的技能的例题；有关新旧知识结合运用的例题；为能有多种解法而设立的例题；等等。

为加强例题教学的针对性，发挥例题所提供的典范作用，教学中必须根据例题的性质和编排原则，掌握每一个例题的特点和教学目的，弄清例题与例题、例题与相应的习题之间的关系。

②注意例题的类比。

讲解例题时，只给出标准的解题过程是不够的，还要注意对例题的类比，即总结解决此类问题的思路、方法、技巧，以及有关的注意事项，使学生在掌握相关解题思路以后，能举一反三，触类旁通。

③要重视例题的应用。

要让学生解答一些同类型习题，以强化对学过的例题的理解和灵活运用学过的解题能力。可以通过改变例题的条件或结论，采用一题多问、一题多解等形式，引导学生进行审题和寻求解题思路为重点的练习。

(5)要重视习题教学

学生要获得知识和提高能力，只靠听老师讲课，一般是难以达到目的的。重要的是要通过自己动手去有针对性地解题。因此，要重视习题的教学。

学生通过解答习题，可进一步理解与巩固所学的数学知识，培养数学的基本能力，掌握解决实际问题所需的技能和技巧，发展思维的灵活性和创造性，提高分析问题和解决问题的能力。

(6)要养成良好的解题习惯

在解题教学的实施过程中，要始终注意培养学生的严谨作风，养成良好的解题习惯。首先，必须认真审题，分清条件和结论；其次，寻求正确的解题方法，并付诸实践，得到答案后，还必须对答案进行验证，去伪存真，并注意对解题过程进行简化。

通过这一过程的训练能发展学生独立思考和创造性的思维能力，有效地激发学生学习数学的兴趣，增强信心。为在教学中强化这一过程，就需要不断让学生明确如下观点：

①方程观点：由已知探求未知。

②映射观点：通过变换把一个不熟悉的问题转化到熟悉的领域中去解决。

③归纳观点：由特殊推广到一般等方法。

下面通过例题的求解和评述介绍上述的方法与思想。

例 1 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<a)$上有一点 P，其焦点为 F_1、F_2，$\angle F_1PF_2=\theta$，求焦点$\triangle F_1PF_2$ 的面积。

思路 (1)如图 1.1，把题设与图形结合起来，找出已知条件$\angle F_1PF_2=\theta$及隐含条件$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c(c>0)$。未知条件是$S_{\triangle F_1PF_2}$。

(2)所求 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta$，

故必须求出 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的值。

(3)由已知条件列出方程：

$$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a & ①\\ |PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\theta=4c^2 & ②\\ S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta & ③\end{cases}$$

$①^2-②$得：$|PF_1|\cdot|PF_2|(1+\cos\theta)=2(a^2-c^2)=2b^2$，故

$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$，代入③得：

$$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$$

这说明椭圆的焦点三角形的面积只与短轴长有关。

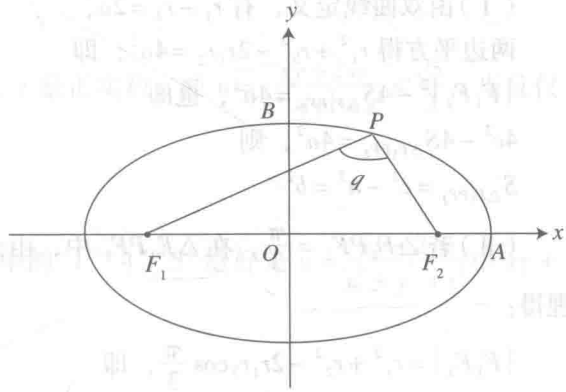


图 1.1

(4)验证：所列方程均符合有关公式、定义，正确无疑，再采用特殊值法检验；若 P 点与 B 重合，则

$S_{\triangle F_1PF_2}=2S_{\triangle OPF_2}=2\times\frac{1}{2}|OB|\cdot|OF_2|=$

$2\times\frac{1}{2}|OB|\cdot|OB|\cdot\tan\frac{\theta}{2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$

适合结论的一般情况。

(5)简化：为书写方便，令 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$。

(6)推广：由于面积含有变量$\frac{\theta}{2}$，所以当知道 θ 的变化范围时，就可求得最值，于是问题可推广为另一种情况(例 2)。

例 2　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<a)$的焦点为 F_1、F_2，P 为这个椭圆上一点，且满足$\frac{\pi}{3}\leqslant\angle F_1PF_2\leqslant\frac{\pi}{2}$，求$\triangle F_1PF_2$ 面积的最值。

解　引入参数，使$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$，由于$\frac{\pi}{3}\leqslant\angle F_1PF_2\leqslant\frac{\pi}{2}$，故$\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，而 $y=\tan\frac{\theta}{2}$ 在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，因此，$\frac{\sqrt{3}}{3}b^2\leqslant S_{\triangle F_1PF_2}\leqslant b^2\tan\frac{\pi}{4}=b^2$，所以 $S_{\triangle F_1PF_2\text{最大}}=b^2$，$S_{\triangle F_1PF_2\text{最小}}=\frac{\sqrt{3}}{3}b^2$。

(7)类比：双曲线中的焦点三角形的面积是否也只与虚轴长有关？可通过探究下面问题(例 3)得出结论。

例 3　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$上有一点 P，其焦点为 F_1、F_2。

(Ⅰ)若$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$，求焦点$\triangle F_1PF_2$的面积。

(Ⅱ)若$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$时，$\triangle F_1PF_2$的面积是多少？若$\angle F_1PF_2=\dfrac{2}{3}\pi$时，$\triangle F_1PF_2$的面积又是多少？

(Ⅲ)观察以上结果，你能看出随$\angle F_1PF_2$的变化，$\triangle F_1PF_2$的面积是否只与虚轴长有关。试证明你的结论。

解 设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$ $(r_1>r_2)$。

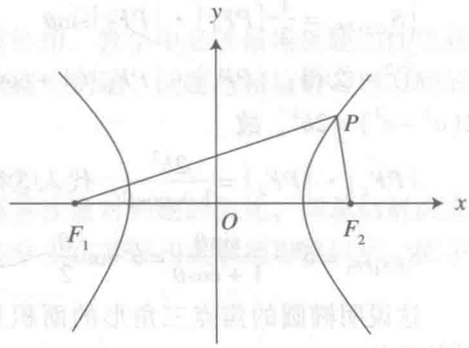


图 1.2

(Ⅰ)由双曲线定义，有$r_1-r_2=2a$，

两边平方得${r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2=4a^2$，即

$|F_1F_2|^2-4S_{\triangle F_1PF_2}=4a^2$，也即

$4c^2-4S_{\triangle F_1PF_2}=4a^2$，则

$S_{\triangle F_1PF_2}=c^2-a^2=b^2$

(Ⅱ)若$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得：

$|F_1F_2|={r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos\dfrac{\pi}{3}$，即

${r_1}^2+{r_2}^2-r_1r_2=4c^2$ ①

又由双曲线定义得：

${r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2=4a^2$ ②

①-②得：

$r_1r_2=4(c^2-a^2)=4b^2$，而$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\dfrac{\pi}{3}$，所以$S_{\triangle F_1PF_2}=\sqrt{3}b^2$。

同理，要求得$\angle F_1PF_2=\dfrac{2}{3}\pi$时，$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b^2$。

(Ⅲ)由以上结果可见，$\triangle F_1PF_2$的面积只与虚轴长有关。证明如下：

令$\angle F_1PF_2=\theta$，则$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\theta$。

由双曲线定义及余弦定理，得：

$$\begin{cases}{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos\theta=4c^2 & ③\\ {r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2=4a^2 & ④\end{cases}$$

③-④得：$r_1r_2=\dfrac{2(c^2-a^2)}{1-\cos\theta}=2b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$，所以$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$，即$\triangle F_1PF_2$的面积只与虚轴长有关。

例 4 （对一道最值问题的变式和引申——2009 年山东聊城 2 月高考模拟考试题）设x、y、z是正实数，则$\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值为多少？

评述 这道高考模拟考题主要考查学生灵活利用均值不等式求最值的能力，而利用均值不等式求最值是中学数学中常用的重要方法之一，也是历年来高考的热点内容之一。利用均值不等式求最值往往有一定的技巧。本文通过对这道高考模拟题的变式和引申进一步提升学

生灵活利用均值不等式求最值的能力。

解 令 $u=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$，若 u 存在最大值，则必有 $x^2+y^2+z^2\geqslant t(xy+2yz)(t>0)$（$t$ 为待定系数），对 y^2 进行拆项，将分母变为 $\left(x^2+\dfrac{1}{5}y^2\right)+\left(\dfrac{4}{5}y^2+z^2\right)$，则

$$\left.\begin{aligned}x^2+\frac{1}{5}y^2=x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}y\right)^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}xy\\ \frac{4}{5}y^2+z^2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2+z^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}yz\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{5}y^2\right)+\left(\frac{4}{5}y^2+z^2\right)\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz)$$

即 $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz)$，又由于 x、y、z 是正实数，故 $u=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，当且仅当 $\begin{cases}y=\sqrt{5}x\\ z=2x\end{cases}$ 时上式取等号，所以 $u_{\max}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

评析 对 y^2 进行拆项时，$y^2=\dfrac{1}{5}y^2+\dfrac{4}{5}y^2$ 中的“1”“4”“5”恰好是 $u=\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 中 $xy+2yz$ 的系数 1、2^2 和 $1+2^2$，而 $u_{\max}=\dfrac{\sqrt{1+2^2}}{2}$。

变式 1 设 a、b、c 是正实数，则 $u=\dfrac{ab+3bc}{a^2+b^2+c^2}$ 的最大值为__________。

分析 对 b^2 进行拆项，$b^2=\dfrac{1}{10}b^2+\dfrac{9}{10}b^2$，则

$$a^2+b^2+c^2=\left(a^2+\frac{1}{10}b^2\right)+\left(\frac{9}{10}b^2+c^2\right),$$

由

$$\left.\begin{aligned}a^2+\frac{1}{10}b^2=a^2+\left(\frac{1}{\sqrt{10}}b\right)^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{10}}ab\\ \frac{9}{10}b^2+c^2=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}b\right)^2+c^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot 3bc\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(a^2+\frac{1}{10}b^2\right)+\left(\frac{9}{10}b^2+c^2\right)\geqslant\frac{2}{\sqrt{10}}(ab+3bc)$$

即 $(a^2+b^2+c^2)\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{10}}(ab+3bc)$，因 a、b、c 是正实数，故 $u=\dfrac{ab+3bc}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，当且仅当 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{\sqrt{10}}b\\ c=\dfrac{3}{\sqrt{10}}b\end{cases}$ 时上式取等号，所以 $u_{\max}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$。

评析 对 b^2 进行拆项时，$b^2=\dfrac{1}{10}b^2+\dfrac{9}{10}b^2$ 中的“1”“9”“10”仍然是 $u=\dfrac{ab+3bc}{a^2+b^2+c^2}$ 中 $ab+3bc$ 的系数 1、3^2 和 $1+3^2$，而 $u_{\max}=\dfrac{\sqrt{1+3^2}}{2}$。

变式 2 设 a、b、c 是正实数，则 $u=\dfrac{3ab+4bc}{a^2+b^2+c^2}$ 的最大值为多少？

分析 因为 $u=\dfrac{3ab+4bc}{a^2+b^2+c^2}$ 中 $3ab+4bc$ 的系数为 3、4，由以上经验猜想当且仅当

$\begin{cases} a=\dfrac{3}{5}b \\ c=\dfrac{4}{5}b \end{cases}$ 时，u 取到最大值$\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{2}=\dfrac{5}{2}$。

解 因为 $b^2=\dfrac{9}{25}b^2+\dfrac{16}{25}b^2$，所以 $a^2+b^2+c^2=\left(a^2+\dfrac{9}{25}b^2\right)+\left(\dfrac{16}{25}b^2+c^2\right)$

由 $\left.\begin{array}{l} a^2+\dfrac{9}{25}b^2=a^2+\left(\dfrac{3}{5}b\right)^2\geqslant\dfrac{6}{5}ab \\ \dfrac{16}{25}b^2+c^2=\left(\dfrac{4}{5}b\right)^2+c^2\geqslant\dfrac{8}{5}bc \end{array}\right\}\Rightarrow\left(a^2+\dfrac{9}{25}b^2\right)+\left(\dfrac{16}{25}b^2+c^2\right)\geqslant\dfrac{2}{5}(3ab+4bc)$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{2}{5}(3ab+4bc)$，由于 a、b、c 是正实数，故 $u=\dfrac{3ab+4bc}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\dfrac{5}{2}$，当且仅当$\begin{cases} a=\dfrac{3}{5}b \\ c=\dfrac{4}{5}b \end{cases}$ 时上式取等号，所以 $u_{\max}=\dfrac{5}{2}$。

变式3 设 a、b、$c\in R$，且 $abc\neq0$ 则 $u=\dfrac{3ab-4bc}{a^2+b^2+c^2}$的最大值为多少？

解 因 $b^2=\dfrac{9}{25}b^2+\dfrac{16}{25}b^2$，故 $a^2+b^2+c^2=\left(a^2+\dfrac{9}{25}b^2\right)+\left(\dfrac{16}{25}b^2+c^2\right)$，

由 $\left.\begin{array}{l} a^2+\dfrac{9}{25}b^2=a^2+\left(\dfrac{3}{5}b\right)^2\geqslant\dfrac{6}{5}ab \\ \dfrac{16}{25}b^2+c^2=\left(-\dfrac{4}{5}b\right)^2+c^2\geqslant-\dfrac{8}{5}bc \end{array}\right\}\Rightarrow\left(a^2+\dfrac{9}{25}b^2\right)+\left(\dfrac{16}{25}b^2+c^2\right)\geqslant\dfrac{2}{5}(3ab-4bc)$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{2}{5}(3ab-4bc)$，又 a、b、$c\in R$，且 $abc\neq0$，故 $a^2+b^2+c^2>0$，$u=\dfrac{3ab-4bc}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\dfrac{5}{2}$，当且仅当$\begin{cases} a=\dfrac{3}{5}b \\ c=-\dfrac{4}{5}b \end{cases}$ 时上式取等号，所以 $u_{\max}=\dfrac{5}{2}$。

评述 以上变式1和变式2中的条件"a、b、c 是正实数"均可变为"a、b、$c\in R$，且 $abc\neq0$"。

引申1 设 a、b、$c\in R$，且 $abc\neq0$，则 $u=\dfrac{ab+mbc}{a^2+b^2+c^2}(m\in N^*)$的最大值为$\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{2}$。

分析 因为 $u=\dfrac{ab+mbc}{a^2+b^2+c^2}(m\in N^*)$ 中 $ab+mbc$ 的系数为 1、m，故猜想：当且仅当$\begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}b \\ c=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}b \end{cases}$ 时，u 取到最大值$\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{2}$。

证明 因为 $b^2=\dfrac{1}{1+m^2}b^2+\dfrac{m^2}{1+m^2}b^2$，所以

$a^2+b^2+c^2=\left(a^2+\dfrac{1}{1+m^2}b^2\right)+\left(\dfrac{m^2}{1+m^2}b^2+c^2\right)$

$$\text{由}\left.\begin{array}{l} a^2+\dfrac{1}{1+m^2}b^2=a^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}b\right)^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}\cdot ab \\ \dfrac{m^2}{1+m^2}b^2+c^2=\left(\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}b\right)^2+c^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}\cdot mbc \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left(a^2+\frac{1}{1+m^2}b^2\right)+\left(\frac{m^2}{1+m^2}b^2+c^2\right)\geqslant\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}(ab+mbc)$$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}(ab+mbc)$，而 b、$c\in R$，且 $abc\neq0$，故 $a^2+b^2+c^2>0$，所以 $u=\dfrac{ab+mbc}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{2}$。当且仅当 $\begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}b \\ c=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}b \end{cases}$ 时，u 取到最大值 $\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{2}$。

引申2 设 a、b、$c\in R$，且 $abc\neq0$，则 $u=\dfrac{mab+nbc}{a^2+b^2+c^2}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$。

证明 因为 $b^2=\dfrac{m^2}{m^2+n^2}b^2+\dfrac{n^2}{m^2+n^2}b^2$，所以

$$a^2+b^2+c^2=\left(a^2+\frac{m^2}{m^2+n^2}b^2\right)+\left(\frac{n^2}{m^2+n^2}b^2+c^2\right),$$

$$\text{由}\left.\begin{array}{l} a^2+\dfrac{m^2}{m^2+n^2}b^2=a^2+\left(\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}b\right)^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot mab \\ \dfrac{n^2}{m^2+n^2}b^2+c^2=\left(\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}b\right)^2+c^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot nbc \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left(a^2+\frac{m^2}{m^2+n^2}b^2\right)+\left(\frac{n^2}{m^2+n^2}b^2+c^2\right)\geqslant\frac{2}{\sqrt{m^2+n^2}}(mab+nbc)$$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{m^2+n^2}}(mab+nbc)$，而 b、$c\in R$，且 $abc\neq0$，故 $a^2+b^2+c^2>0$，$u=\dfrac{mab+nbc}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{m^2+n^2}}(mab+nbc)$。当且仅当 $\begin{cases} a=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}b \\ c=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}b \end{cases}$ 时，u 取到最大值 $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$。

引申3 设 a、b、$c\in R$，且 $abc\neq0$，则 $u=\dfrac{mabc^2+nbca^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$。

证明 将 u 中的分子、分母同时除以 $a^2b^2c^2$，得

$u=\dfrac{m\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}+n\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}$，由引申2知：当且仅当 $\begin{cases} \dfrac{1}{a}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{c}=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\dfrac{1}{b} \end{cases}$ 时，u 取到最大值 $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$。