

TURING 图灵新知

# 「超」入門微分積分

学校では教えてくれない「考え方のコツ」

Introduction to  
Calculus

简单  
微积分

Masahiro Kaminaga

学校未教过的  
超简易入门技巧

（日）神永正博  
李慧慧

译

著

中国工信出版集团

人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

*Introduction to  
Calculus*

Masahiro Kaminaga

[日]

神永正博

著

李慧慧

译

学校未教过的  
超简易入门技巧

简单微积分

人民邮电出版社  
北京

## 图书在版编目(CIP)数据

简单微积分: 学校未教过的超简易入门技巧 / (日) 神永正博著; 李慧慧译. -- 北京: 人民邮电出版社, 2018.7 (2018.10重印)

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-48507-6

I. ①简… II. ①神… ②李… III. ①微积分—普及读物 IV. ①O172-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第108661号

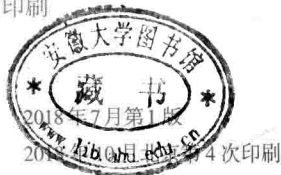
## 内 容 提 要

本书为微积分入门科普读物, 书中以微积分的“思考方法”为核心, 以生活例子通俗介绍了微积分的基本原理、公式推导以及实际应用意义, 解答了微积分初学者遭遇的常见困惑。本书讲解循序渐进、生动直白, 没有烦琐计算、干涩理论, 是一本只需“轻松阅读”便可以理解微积分原理的入门书。

◆ 著 [日] 神永正博  
译 李慧慧  
责任编辑 武晓宇  
装帧设计 broussaille 私制  
责任印制 周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号  
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本: 880×1230 1/32  
印张: 7  
字数: 117千字  
印数: 7 501-11 500册



著作权合同登记号 图字: 01-2017-2043号

定价: 49.00元

读者服务热线: (010)51095186 转 600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字 20170147号

## 前言

如书名所示，本书是一本微积分入门书。虽然是入门书，不过写到后面，却发现内容已经相当有深度。

这样的话，或许你会想：“是不是先得准备纸和铅笔？”

不用，我们不需要纸和铅笔。本书是一本只需要“读”的微积分入门书。请轻松地来阅读吧。

说起微积分，大家有什么印象？想必很多人会联想到棘手的计算吧。甚至还会有人想到这种情景——在学校的考试中，只是因为计算稍稍出错，就被大幅扣分，凄惨至极。



微积分的要点难道不就是“背诵和计算”吗？背诵公式，然后计算得出答案，这不就行了吗？

哎呀，这位姑娘似乎认为解决微积分问题，只要套用背诵的公式就足够了。这就是那种在学校的考试中掌握了应试要领的典型人物。



直白来说，在制造、设计等实际情况中应用微积分时，根本不用操心复杂的计算，因为有优秀的数值计算软件帮忙。

不过，对于如何看待微积分，还存在像上面这位博士一样的一类人，他们的看法在某种意义上略显偏激。这种人在学校里可能难以被认可，不过在社会中似乎能生存下去。

本书讲解微积分选择的是这位博士的立场。因为我认为，虽然会计算微积分更好，但最开始学习微积分时，重点并不在计算上。

数学家是擅长数学的人，所以他们也很擅长计算吧？不，不一定是这样的。令人意外的是，数学家不仅会有不少单纯的计算失误，而且也常常会在思路上出现错误。

创立了组合拓扑学的天才数学家亨利·庞加莱也是经常犯错误的，据说就连他的论文中也存在不少错误。

但是，庞加莱思考的方向在本质上是准确无误的。只要思考的方向正确，即使稍微出点儿差错，对整体而言也并不是致命的。在学校，考试之所以依据计算结果的正确与否来确定成绩，是因为根据思路来给分数比较困难。

我喜欢南方的国家，2010年曾在印度生活了一年。在金奈（Chennai，旧称 Madras）的一所数理科学研究所做研究时，深深吸引我的不仅是印度这个国家，还有印度人的研究方法。

其中令人惊讶的是，印度的研究者不怎么计算。当然，并不是完全不计算，而是与计算相比，他们在思考上花费的时间更长。我甚至怀疑他们这样是不是为了节约纸。“只要有纸和铅笔就能够做研究”是数学家的口头禅，但是印度人可能会笑道：“难道最重要的不是用脑子吗？”在印度的经历让我切身体会到，数学研究中使用的是头脑。

印度数学家是在头脑中计算的吗？毕竟他们可是一群能够背诵  $20 \times 20$  的乘法口诀表的人。你可能会认为，他们用心算来计算肯定是小菜一碟。

但是，事实并非如此。印度的数学家会凭感觉来思考。在进行最后计算之前，他们首先用感觉思考，寻找正确的解题思路，这个阶段非常重要。如果能在思考阶段找到正确思路，之后总会有办法解决计算问题。

同样，本书的侧重点也放在了“思考的要领”上，我认为这是微积分的本质。比如，第1章中几乎没有出现积分符号。你可能会

担心，不用积分符号的话是否能够真正理解相关内容。其实，先在第1章中接触微积分的本质内容，第2章之后出现的公式、算式将会意外地变得易于理解。

略微谈点儿抽象的内容，其实微积分的本质在于方法。简单说，如果抓住思考的“要领”，那么就能轻而易举地理解复杂算式。思考的方向找对了，之后只要根据需求掌握计算技术就可以了。相反，如果不能掌握思考要领，直接从计算技术入手的话，微积分的学习便如同咀嚼沙子一般变成了苦涩的修行。

即便你对计算不是特别明白，也没必要在意；或者一点儿也不明白，也没有关系。让我们放松下来，轻松地探索微积分的本质吧！

# 目录

## 第 1 章 积分是什么 ~1

积分的存在意义 ~2

积分应用的基础 ~2

所有图形都与长方形相通 ~5

近似的方法 ~8

和变为了积分 ~13

何为“接近精确值” ~18

两个思想实验 ~20

椭圆的面积 ~20

地球的体积 ~25

切口的秘密 ~32

卡瓦列利原理 ~32

三分之一的原理 ~37

圆锥的体积 ~45



球的体积 -48

球的表面积 -54

### 感觉和逻辑 -59

初中入学考试中的积分 -59

像小学生那样求圆环体体积 -67

把甜甜圈变成蛇的方法 -69

帕普斯 - 古尔丁定理 -73

## 第 2 章 微分是什么 -77

### 微分存在的意义 -78

分析钻石的价格 -78

“亮出指数”的理由 -86

乘积的微分公式 -94

从未知到已知 -97

商的微分公式 -100

再次扩展幂函数的微分公式 -102

### 丰富多彩的函数世界 -105

山峰和山谷 -105

了解切线 -109

根据单调性表画函数图像 -113

最大值和最小值、极大值和极小值 -117

手绘函数图像的意义 -119

存在休息平台的函数 -121

有预谋地使用微分 -128

理想的冰激凌蛋卷筒 -128

“忽略”与“不可忽略”的界线 -138

### 第3章 探寻微积分的可能性 -141

1800年后的真相 -142

反军队式学习法 -142

伟大的发现会成为未来的常识 -144

基本定理的使用方法 -152

填坑 -160

自然常数从何而来 -160

无限接近于精确的值 -164

关键在于根号 -166

转换思路能行得通吗 -169

指数函数出现了 -175

让关系更清晰 -178

唯一一个微分后不会发生变化的函数 -181

弯曲也没问题 -184

测量曲线的长度 -184

简洁的悬链线公式 -187

验证项链的长度 -194

微积分的真身 -199

微分的可能性 -199

微分相关的冒险 -202

近似和忽略 -205

后记 -207

尾注 -209

内文图版设计：フレア



第 1 章  
积分是什么

## 积分的存在意义

### 积分应用的基础



一般不是从微分开始学习吗？



从积分开始讲，是因为积分能够“图形化”。  
积分的基础是求面积、体积，所以更容易形象化。

小学所学的图形面积、体积的计算，实际上是与积分世界相连接的。积分并不是高中教材中突然半路杀出的“程咬金”，初等教育中相关内容的学习，已经为迈入积分世界做了充分的热身。

而对于微分，大部分人都感觉不是很熟悉。说起微分，就会提到“切线斜率”“瞬时速度”“加速度”，这些内容怎么理解

都很难懂。这些东西我们无法直接用眼睛看到，很难直观上去把握。

从历史上来看，积分比微分要更早出现。

积分法的起源是“测量图形的大小”。古时候图形长度、面积、体积的计算方法，通过口传心授得以流传，经过历代人的智慧的锤炼，进而发展成为现在的积分法。

探寻积分法诞生的历史，大致可以追溯到公元前 1800 年左右。公元前 200 年的阿基米德时代<sup>1</sup>，在计算抛物线和直线围成的图形面积问题上，已经出现了与现在积分法十分相似的“穷竭法”。积分的历史，还真是悠久。

到了 12 世纪，印度的婆什迦罗二世提出了积分法的“前身”方法。进入 17 世纪，牛顿综合了微分法和积分法，尝试从万有引力理论来推导天体的运动规律。

总之，从积分出现到微分诞生，至少有长达 1300 年的间隔。

积分之所以会较早出现，是因为人类需要把握那些可见的东西，例如计算物体的面积、体积等。

初等教育中的图形计算，通常只针对长方形、圆形等规规矩矩的图形。而现实情况中，这些知识往往难以直接去应用。



说起来，我们为什么要去计算积分呢？



积分法存在的意义，在于测量长度、面积和体积。说来惭愧，我们手中能够方便计算面积、体积的工具，可以说是非常贫乏。

这是因为，现实世界中存在的物质，并非都是学校中学习的那些规则的形状。相反，那些规则的形状可以说只是例外或理想化的情况。所以，对人类而言，测量现实情况中各种复杂图形大小的技术非常必要。

日本小学的家政课会讲授乌冬面、土豆块<sup>2</sup>等简易料理的烹饪方法。之所以特地在学校中讲授这些内容，是因为这些都是烹饪中的基础方法。实际上我们自己做菜时，多会在商店中购买成品的乌冬面，也基本不会频繁烹制土豆块。但是，如果掌握了这些基础烹饪方法的话，就能够烹制出更多复杂的菜品。例如，乌冬面的烹饪方法可以运用到面包、比萨或者意大利面中，从土豆块中学到的方法可以拓展到土豆沙拉或者油炸饼中。

如果把在小学初中的长方形、圆形的知识比作乌冬面、土豆块，那么微积分就相当于面包、土豆沙拉等应用性料理。多亏有了积分法，人类才能够计算各种图形的面积和体积。使用积分，无论是多么奇怪的形状，只要下功夫就能够计算出结果，这真是巨大的进步。

将思考应用于实际，用自己的力量去推导面积、体积，这才是积分的乐趣，也是学习积分的真正意义。

### 所有图形都与长方形相通

#### 积分的要领

以长方形为基础来思考。

图形的种类繁多多样，其中面积计算最为简单的就是“长方形”了。

说到这里，大家是不是想起了小学时初学面积计算的情景？在图形面积计算中，三角形、平行四边形、梯形、圆形等图形都是放到长方形之后学习。长方形的面积仅用“长 $\times$ 宽”就可以计算，可以说是最简单、朴素的图形。顺便提一下，在数学世界中，正方形被看作是“一种特殊的长方形”。



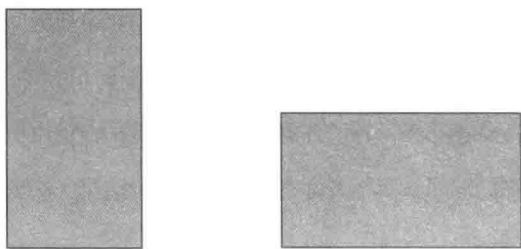


图 1 长方形

掌握长方形面积的计算方法后，就可以将其应用到三角形的面积计算中。反过来说，如果不知道长方形面积的计算方法，也就无法计算三角形的面积。

这是因为，三角形的面积可以看作是“以三角形的一条底边为边长、该边上的高为另一边的长方形面积的一半”。根据图 2 可知，三角形的面积正好是对应长方形面积的一半，也就是说“三角形的面积 = 底  $\times$  高  $\div 2$ ”。

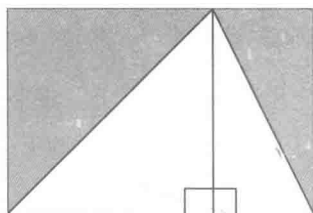


图 2 三角形的面积是对应长方形面积的一半