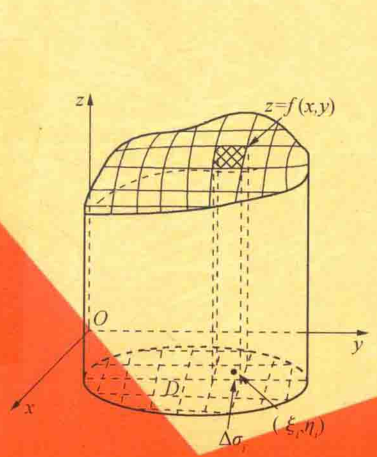
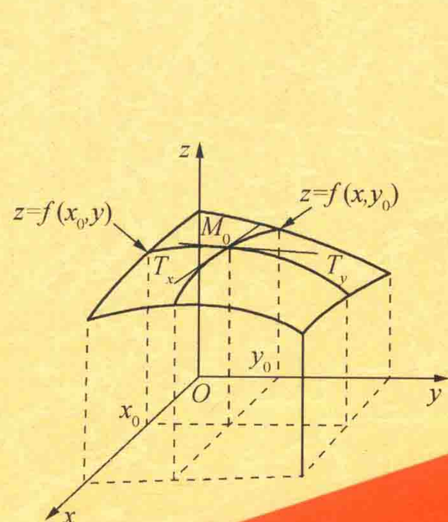
21世纪应用型本科院校规划教材

微积分

CALCULUS

主编 方 芬 毛陵陵





南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

微积分

主　编　方　芬　毛陵陵
副主编　汪　平　路体超　吴祝慧

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 方芬，毛陵陵主编. 一南京:南京大学出版社，2018.2

(21 世纪应用型本科院校规划教材)

ISBN 978 - 7 - 305 - 19857 - 1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①方… ②毛… Ⅲ. ①微积分一高等学校一教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 012735 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 微积分
主　　编 方　芬　毛陵陵
责任编辑 刘　琦　　编辑热线 025 - 83593947

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 南京鸿图印务有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 18.75 字数 419 千
版　　次 2018 年 2 月第 1 版 2018 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 19857 - 1
定　　价 42.00 元

网　　址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025)83594756

前　言

这本书为大学微积分课程而编写。本书按照 2013 年—2017 年教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会修订的《大学数学课程教学基本要求》，并依据我们多年来教授微积分的经验，系统地介绍了函数的微分、积分以及有关概念的理论知识和应用。本书可作为普通高等院校应用型本科文科类教材。

本书编写注重理论联系实际。我们通过实际例子引入理论知识，使学生对微积分的概念有直观性的把握，进而再推广和抽象化，最后将这些理论相应地应用于实际问题尤其是经济类的问题中，且注重实际问题的时效性。

本书每一章节配备的课后习题都做了详尽的分层设计：(1) 基础题，目的是夯实理论基础；(2) 延伸拓展有一定难度的习题，用以拓展学生的视野；(3) 结合当今实际的应用题，以培养学生使用所学理论知识解决实际问题的能力。

本书第一章和第二章由汪平编写，第三章和第四章由毛陵陵编写，第五章和第六章由吴祝慧编写，第七章和第八章由方芬编写，第九章和第十章由路体超编写。本书编写过程中参考了大量优秀的国内外教材。南京大学出版社对此书的出版给予了极大的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，教材中必定存在不妥之处，恳请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2017 年 8 月于南京

目　录

第一章　函　数

大学之前所学习过的数学，习惯上被我们称为初等数学，而这些初等数学知识早在17世纪之前已经被人们进行了广泛而深入地研究，研究的对象通常是常数或者常量与规则的、不变的几何形体之间的关系，研究方法主要采用孤立的、静止的方法. 到了17世纪，人们开始通过联系的、动态的研究方法，将变数或者变量与不规则的、变化的几何形体联系起来进行研究. 在这个年代，史上最杰出的英国科学家艾萨克·牛顿(Isaac Newton)和德国数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz)独立地创立了微积分(Calculus)，也正是由于微积分的创立，数学学科迎来了人类历史上重大的转折点，开始实现学科发展的重大飞跃. 本书以微积分为主要内容，通过极限的方法，对函数进行广泛的、深入的研究. 本章首先给出集合的概念和运算，这也是学习微积分的必备基本知识，然后给出函数的定义以及讨论函数的一些简单性质，最后通过几个实际问题来建立变量与变量之间的函数关系，并介绍极坐标的相关知识.

第一节　集　合

一、集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，所谓**集合**指的是具有某种特定性质的事物的全体，组成这个集合的每一个事物个体称为该集合的**元素**.

通常用大写字母 $A,B,M,N,\cdots$ 来表示集合，而用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素. 如果元素 x 是集合 A 中的元素，就称 x **属于** A，记为 $x\in A$；如果元素 x 不是集合 A 中的元素，就称 x **不属于** A，记作 $x\notin A$ 或 $x\ \overline{\in}\ A$.

集合的表示方式一般有两种：一种是列举法，就是把集合中的所有元素一一列举出来表示. 例如，由元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的集合 X，记作

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\};$$

另一种是描述法，若具有某种特定的性质 P 的元素 x 的全体构成了集合 Y，则记作

$$Y=\{x \mid x\text{具有某种特定的性质}P\}.$$

通常**数集**表示元素都是数的集合. 常用的数集有如下几种:

(1) 全体**自然数**(即非负整数)**的集合**,记作 $\mathbf{N}$;

(2) 全体**整数的集合**,记作 $\mathbf{Z}$;

(3) 全体**有理数的集合**,记作 $\mathbf{Q}$;

(4) 全体**实数的集合**,记作 $\mathbf{R}$;

(5) 全体**复数的集合**,记作 $\mathbf{C}$.

如果没有特别声明,本书提到的数全部都是实数.

若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的**子集合**(简称**子集**),记作 $A\subset B$(读作:A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作:B 包含 A). 例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$. 例如:$\mathbf{N}^+=\mathbf{Z}^+$.

不包含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 我们规定:空集为任意集合的子集. 即对于任意的集合 A,有 $\varnothing\subset A$.

二、集合的运算

集合间常见的基本运算方式有三种:并"+"、交"·"、差"-".

定义 假设 A,B 是两个集合,则

$$A+B=A\cup B=\{x \mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

$$A\cdot B=A\cap B=\{x \mid x\in A\text{且}x\in B\}$$

$$A-B=A\backslash B=\{x \mid x\in A\text{且}x\notin B\}$$

分别称为集合 A 和 B 的并集、交集和差集.

在研究某些问题的时候,我们会将特定的研究对象的全体称为**全集**,用 Ω 来表示,并把差集 $\Omega-A$ 称为 A 的**补集**或**余集**,记作$\overline{A}$. 例如集合 $A=\{x|x\geqslant 2\}$,则它的补集$\overline{A}=\{x|x<2\}$.

集合间的并、交、差满足下列的运算法则.

定理 1 **设 A,B,C 为三个任意的集合,则下列运算法则成立:**

(1) **交换律** $A+B=B+A$

(2) **结合律** $(A+B)+C=A+(B+C)$ $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

(3) **分配律** $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$ $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$

(4) **对偶律** $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

三、区间

区间是较为常用的一类数集. 假设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,则数集

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

称为**开区间**. 数集

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**. 同理可以定义以 a、b 为端点的**半开半闭区间**：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

上述这些区间都统称为**有限区间**，其中 a,b 称为这些**区间的端点**，$b-a$ 称为这些区间的**区间长**. 此外，我们还可以定义如下**无限区间**：

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

开区间、闭区间、半开半闭区间统称为区间，记作 I.

四、邻域

邻域也是微积分的重要的概念之一. 设 a,δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$（即开区间 $(a-\delta,a+\delta)$）称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

其中，a 称为邻域 $U(a,\delta)$ 的**中心**，δ 叫作邻域 $U(a,\delta)$ 的**半径**. 从几何意义上来看，$U(a,\delta)$ 就是一维数轴上，与点 a 的距离小于 δ 的所有点 x 的集合. 另外，我们称集合

$$\{x\mid a-\delta<x<a\}=(a-\delta,a)$$

为**点 a 的左 δ 邻域**，称集合

$$\{x\mid a<x<a+\delta\}=(a,a+\delta)$$

为**点 a 的右 δ 邻域**.

假若 $U(a,\delta)$ 去掉中心，我们称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

在谈及邻域概念时，若不在意邻域半径的大小，可用 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$ 分别表示以点 a 为中心的邻

域和点 a 为中心的去心邻域.

第二节 函 数

一、常量与变量

在各种自然现象或人类社会实践活动中,人们常常会遇到很多量,而这些量有的会发生变化,有的不发生任何变化.若当一个量或一些量不断发生变化的时候,另一个量也随之发生变化.这些量与量之间的关系就是我们数学研究中所说的函数关系.

定义 1 在自然界的某一变化过程中,取值始终保持不变的量称为常量,而取值会发生变化的量称为变量.

一般的,常量用字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示,变量用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 来表示.

例 1 在使用某打车软件打出租车过程中,出租车行驶的里程为 s 公里,司机通过某手机支付系统接收到的服务性收费为 P 元,政府规定的出租车每公里的运营收费标准为 a 元,则 P 和 s 之间的对应关系就是 $P=as$.其中,P 和 s 是变量,而 a 是常量,实际上,当 s 在闭区间 $[0,S]$ 任意取一个数值时,按照上式,P 就有唯一确定的数值与之对应.

例 2 深圳某科技公司每年最多生产 5 万台平衡车,固定成本为 200 万元,每生产 1 台平衡车,成本增加 1 000 元,则每年生产平衡车的总成本 C 万元与年产量 x 台之间的关系为

$$C=200+0.1x, 0\leqslant x\leqslant 50\,000.$$

其中,C 和 x 为变量,固定成本为常量.当 x 取 0 到 50 000 之间的任何一个数值时,上式 C 同样有唯一确定的数值与 x 对应.

当然,一个量到底是常量还是变量,这是相对的,不是绝对的,主要取决于变化过程中的具体情况.例如:商品的价格,在计划经济时代是常量;而在市场经济时代则是变量.

二、函数的定义

函数是大学数学最基本的概念之一,从本质上来说,函数其实就是研究各变量之间确定性依赖关系的数学模型.德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)曾经提出了如下传统的函数概念.

定义 2 设 x 与 y 是两个变量,D 是一个非空的实数集合.若对于任意的 $x\in D$,按照一定的对应法则 f,变量 y 总有唯一确定的数值与之对应,则称变量 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x), x\in D,$$

其中,x 称为自变量,y 称为因变量,集合 D 则称为函数的定义域.

当自变量每取一个数 $x_0\in D$ 时，其所对应的因变量 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$. 当自变量 x 取遍定义域 D 中所有数值的时候，对应的全体函数值构成的集合，称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 $W(f)$ 或 $f(D)$，即

$$W(f)=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

注 函数最重要的**两个要素**是函数的**定义域 D** 与**对应法则 f**，而不是自变量和因变量选取的字母. 即两个函数只要定义域相同、对应法则也相同，它们就是同一个函数.

例 3 判断下列每组函数是否是同一函数.

(1) $f(x)=x+1,x\in\mathbf{R},g(t)=t+1,t\in\mathbf{R}$；

(2) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

解 (1) 两个函数定义域相同，对应法则相同，是同一函数.

(2) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)=\sec^2x-\tan^2x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，即两个函数的定义域不同，不是同一函数.

函数的定义域的确定主要分为两种情形：一，在各类现实问题中，函数的定义域应根据具体问题中自变量 x 的实际意义来确定. 二，对于抽象地用算式表达的函数，它的定义域就是使得整个算式有意义的自变量 x 的取值范围.

需要注意的是，在上述函数定义中，一般都要求对于每一个自变量 $x\in D$，按照对应法则 f，与之对应的 y 是唯一确定的，这种函数即所谓的"**单值函数**". 但我们也会经常遇到这样的情况，对每一个 $x\in D$，按照对应法则 f，变量 y 有两个或者两个以上的数值与之对应，这时不符合函数的定义，应该不属于函数的范畴，但很多时候，由于科学研究的需要，我们也会把一个自变量 $x\in D$，对应多个 y 值的关系称为函数，即**多值函数**. 例如：$y^2=x$ 就是一个多值函数. 一般关于多值函数，只要对它的因变量附加一些条件，就可以将其化为单值函数. 例如：多值函数 $y^2=x$，若 $y>0$，则可确定一个单值函数 $y=\sqrt{x}$；又若 $y<0$，则可以确定另一个单值函数 $y=-\sqrt{x}$. 在本书中，若无特别声明，所有函数指的都是单值函数.

一般来说，我们会把二维平面上的点集 $M=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的**几何图形**，其在平面上显示的为一条曲线.

中学里我们曾经学习了函数常见的三种表示方式，即**解析法**、**列表法**和**图像法**，本书将不再复述.

在表示函数的时候，一般以解析法居多，其他两种方法结合使用.

下面举一些函数的例子：

例 4 函数 $y=\dfrac{1}{x}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它的图形如图 1-1 所示.

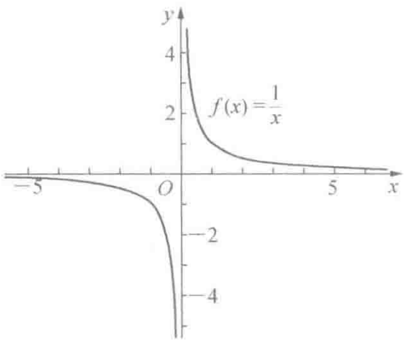


图 1 - 1

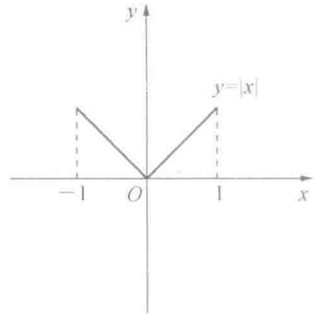


图 1 - 2

例 5 函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$，它的图形如图 1 - 2 所示，该函数被称为**绝对值函数**.

例 6 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1 - 3 所示，该函数被称为**符号函数**.

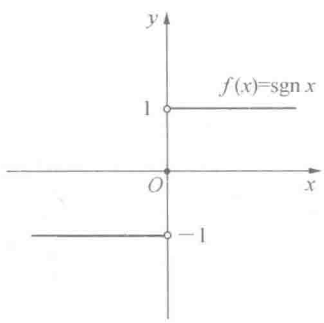


图 1 - 3

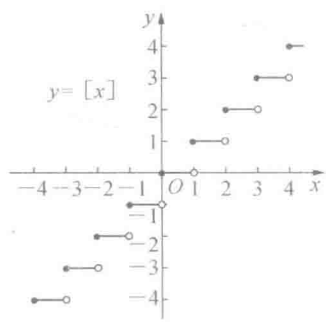


图 1 - 4

例 7 函数 $y=[x]$，$[x]$表示的是不超过 x 的最大整数，则它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为 $\mathbf{Z}$，它的图形如图 1 - 4 所示，该函数被称为**取整函数**.

例 8 函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$，这个函数把定义域全体实数分为两类，有理数的函数值为 1，无理数的函数值为 0，但是无法画出它的图形，该函数被称为狄利克雷(Dirichlet)函数.

例 9 设函数 $y=\ln\frac{x-1}{x}+\sqrt{x-2}$，求函数的定义域.

解 要让函数有意义，需要满足

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}>0,\\ x-2\geqslant 0,\end{cases} \quad 即\begin{cases}x>1 或 x<0,\\ x\geqslant 2,\end{cases}$$

故函数的定义域为 $[2,+\infty)$.

由上述例 5、例 6、例 7、例 8 可知，有些函数在其不同的定义域部分，对应法则的表达式有所不同，这类函数称为**分段函数**. 在日常生活中，我们也会经常会遇到分段函数，下面的快递资费函数就是一个典型的例子.

例 10 泰国某快递公司公布的寄往中国的国际快递的资费标准中，由曼谷快递货物到中国南京，当质量在 5 kg 以下，每次收费 1 000 泰铢；超过 5 kg，低于 10 kg，每增加 1 kg(不足 1 kg按照 1 kg 计算)收费为 200 泰铢；超过 10 kg，低于 40 kg，每增加 1 kg(不足 1 kg 按照 1 kg 计算)收费为 100 泰铢；超过 40 kg，每增加 1 kg(不足 1 kg 按照 1 kg 计算)收费为 50 泰铢. 这段话就确定了快递资费与货物重量之间的函数关系.

以 $P=P(x)$ 表示这个函数，其中 x 表示货物的质量(单位：kg)，$x\in\mathbf{N}^+$，P 表示资费(单位：元)，则 $P=P(x)$ 可表示如下：

$$P=P(x)=\begin{cases}1\,000, & 0<x\leqslant 5,\\ 1\,000+200(k+1), & 5+k<x\leqslant 6+k(k=0,1,2,3,4),\\ 2\,000+100(k+1), & 10+k<x\leqslant 11+k(k=0,1,\cdots,29),\\ 5\,000+50(k+1), & 40+k<x\leqslant 41+k(k=0,1,\cdots).\end{cases}$$

三、函数的几种特性

1. 奇偶性

设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，均有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 称为**偶函数**；若对任意的 $x\in D$，均有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**. 既不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数. 在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例 11 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故定义域关于原点对称，又

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\\&=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

例 12 判断函数 $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$的奇偶性.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,故定义域关于原点对称,又

$$f(-x)=\ln\frac{-x-1}{-x+1}=\ln\frac{x+1}{x-1}=-\ln\frac{x-1}{x+1}=-f(x),$$

故 $f(x)$为奇函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域是 D,若存在非零常数 T,使得对任意 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则函数 $f(x)$称为**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**,通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例 13 判断 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$ 的周期.

解 这是一个周期函数,任何不等于零的有理数 l 都是它的周期,但它不存在所谓的最小正周期(因为不存在最小的正有理数).

3. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域是 D,且区间 $I\subseteq D$. 对任意的两点 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,若 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则函数 $f(x)$在 I 上**单调增加**(**单调减少**),如图 1-5、图 1-6 所示.

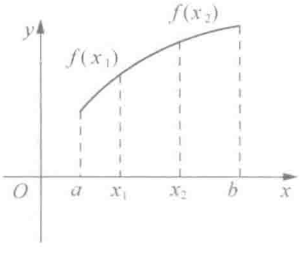


图 1-5

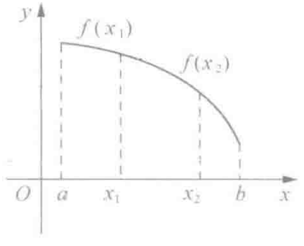


图 1-6

例如,函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,$y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上均为单调递减.

4. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域是 D,且区间 $I\subseteq D$. 若对于任意的 $x\in I$,存在正数 M,使$|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**,如图 1-7 所示.

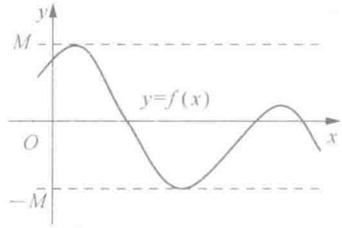


图 1-7

若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$在 I 上**无界**. 特别地,当函数 $f(x)$在定义域 D 上有界时,称函数 $f(x)$是**有界函数**,否则,称为**无界函数**. 例如,函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在

$(-\infty,+\infty)$上均为有界函数，而 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上则为无界函数.

第三节　反函数与复合函数　初等函数

一、反函数

定义 1　设函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 W，若对于任意的 $y\in W$，都有唯一确定的数值 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则变量 x 就是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in W$. 而函数 $y=f(x)$称为直接函数.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是一般将 $y=f(x)$的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. 图像上来看，函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

定理 1　若单调函数 $y=f(x)$的定义域是 D，值域是 W，则它存在反函数，且函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$ 具有完全相同的单调性.

例 1　求函数 $y=\cos x$ 在$[\pi,2\pi]$上的反函数.

解　已知函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数为 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，而$\forall x\in[\pi,2\pi]$，有 $2\pi-x\in[0,\pi]$，又因为 $\cos(2\pi-x)=\cos x$，故 $y=\cos(2\pi-x)$，从而 $2\pi-x=\arccos y$，$x=2\pi-\arccos y$，因此 $y=\cos x$ 在$[\pi,2\pi]$上的反函数为 $y=2\pi-\arccos x$.

二、复合函数

在考察江苏卫视某综艺节目收视率时，一般来说，收视率 P 是收视人数 Q 的函数，而收视人数 Q 又是收视时段 t 的函数，这样一来收视时段 t 就间接通过收视人数 Q 影响到综艺节目收视率 P 的变化，因此收视率 P 可以看作是收视时段 t 的函数.

定义 2　设函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$ 和函数 $u=g(x)$，$x\in D$ 且 $g(D)\cap D_1\neq\varnothing$，则 y 可以通过中间变量 u 成为 x 的函数，称此函数为 $y=f(u)$和 $u=g(x)$的复合函数，记作 $y=fog(x)=f[g(x)]$，其中 u 被称为中间变量，而 $u=g(x)$称为里层函数，$y=f(u)$称为外层函数.

例 2　下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=e^{x^2}$　　　　(2) $y=\ln(1-x^2)$

解　(1) 函数 $y=e^u$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，函数 $u=x^2$ 的值域为$[0,+\infty)$，这也是 $y=e^u$ 的定义域的子集，因此，$y=e^{x^2}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=x^2$ 复合而成.

(2) 函数 $y=\ln u$ 的定义域为 $u>0$，这也是 $u=1-x^2$ 的值域，即应满足 $u=1-x^2>0$，由此得 $-1<x<1$. 因此，$y=\ln(1-x^2)$由函数 $y=\ln u$ 和函数 $u=1-x^2$，$-1<x<1$ 复合而成.

注　两个函数构成复合函数是有条件的，即外层函数的定义域和里层函数的值域交集不

能为空集. 例如，$y=\sqrt{u}$和函数 $u=-1-x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$u=-1-x^2$ 均不在 $y=\sqrt{u}$的定义域内. 同理 $y=\arccos u$ 和 $u=2+x^2$ 也不能构成复合函数.

三、函数的四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域依次为 D_1，D_2，若 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义函数的**代数运算**.

(1) 和(差)$f\pm g$： $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

(2) 积 $f\cdot g$： $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

(3) 商$\dfrac{f}{g}$： $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in(D-\{x\,|\,g(x)=0\})$.

例 3 若函数 $f(x)$的定义域为$(-l,l)$，证明：在$(-l,l)$上，函数 $f(x)$一定可以表示为奇函数和偶函数之和.

解 令 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

显然，$g(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x)$，$g(x)$为偶函数，

$h(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-h(x)$，$h(x)$为奇函数，

$f(x)=g(x)+h(x)$，故函数 $f(x)$可表示为奇函数和偶函数之和.

四、初等函数

下列五类函数，我们均称为**基本初等函数**.

(1) 幂函数： $y=x^\mu$(μ 是常数)；

(2) 指数函数： $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)；

(3) 对数函数： $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)；

特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$. 这里 e 为无理数且 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$.

(4) 三角函数： $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(5) 反三角函数： $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

定义 3 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的、可以用一个解析式表示的函数统称为初等函数.

例如，$y=\ln(1+x^2)$，$y=\arccos(x^2-1)$，$y=x^2\cdot2^{\sin x}+\ln(x+\mathrm{e}^{x^2})$都是初等函数，而分段函数、取整函数则不是初等函数.

五、双曲函数

应用以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 可以生成工程学中常用的一类初等函数：**双曲**

函数和反双曲函数.

(1) **双曲正弦**：$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的奇函数，如图 1-8 所示.

(2) **双曲余弦**：$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,0)$上单调减少，在$(0,+\infty)$上单调增加，整个函数是偶函数，如图 1-9 所示.

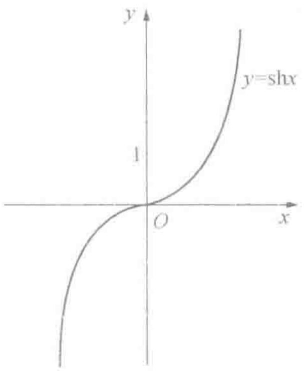


图 1-8

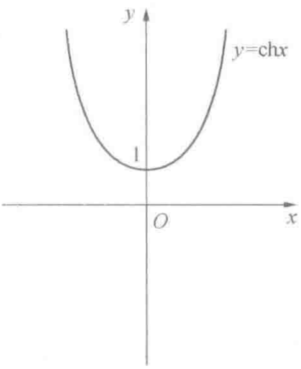


图 1-9

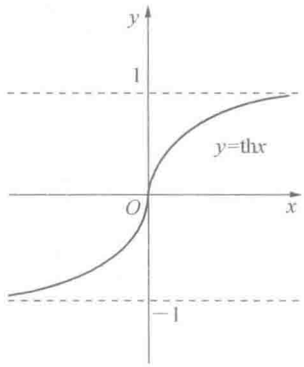


图 1-10

(3) **双曲正切**：$\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的奇函数，如图 1-10 所示.

双曲函数 $y=\mathrm{sh}x$，$y=\mathrm{ch}x(x\geqslant 0)$，$y=\mathrm{th}x$ 的反函数表述如下.

(4) **反双曲正弦**：$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的奇函数.

(5) **反双曲余弦**：$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，定义域为$[1,+\infty)$，在$[1,+\infty)$上单调增加.

(6) **反双曲正切**：$y=\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，定义域为$(-1,1)$，在$(-1,1)$上是单调增加的奇函数.

根据双曲函数的定义，可得如下恒等式.

(1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$；

(2) $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$；

(3) $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.