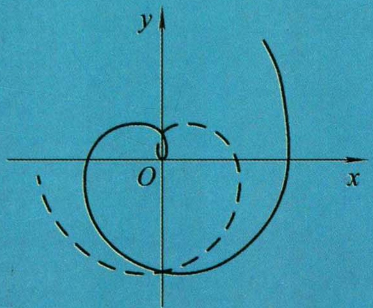
21世纪高等继续教育精品教材

公共基础系列

HIGHER MATHEMATICS

高等数学

储志俊　张世唯　编著



$r=a\theta$

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

21 世纪高等继续教育精品教材　公共基础系列

高 等 数 学

储志俊　张世唯　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书依据全国高校网络教育考试委员会办公室所组编的高校网络教育部分公共基础课全国统一考试“高等数学”考试大纲而编写，主要有函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程初步，多元函数微积分，无穷级数等内容.

本书可作为高校网络教育、电视(开放)大学、自学考试及职工大学等读者的教材或学习参考书，也可作为普通高等学校本科各专业学生的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/储志俊，张世唯编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2015.11
21世纪高等继续教育精品教材 公共基础系列
ISBN 978-7-5606-3894-2

Ⅰ. ① 高… Ⅱ. ① 储… ② 张… Ⅲ. ① 高等学校—成人高等教育—继续教育—教材 Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 248214 号

策　　划　高　樱
责任编辑　买永莲
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2015年11月第1版　2015年11月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张 20
字　　数　475千字
印　　数　1～10 000册
定　　价　30.00元
ISBN 978-7-5606-3894-2/O

XDUP 4186001-1

前　　言

高等数学是高等教育中理工科及经济管理等学科读者必修的基础课程之一，是培养读者运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、综合运用所学知识分析和解决问题的能力的课程，是读者学习后续课程和进一步获得近代科学技术知识的必备基础．

现代远程网络教育相对于传统的教学模式、学习习惯及获取知识的途径都有很大的不同．对于每个在网络教育学院学习的读者来说，学习的途径只有网络课堂、网上答疑、课程光盘、教材资料及很少的面授等方式；学习的方式则以自学为主．另一方面，高校网络教育、电视（开放）大学、自学考试及职工大学等都属于继续（业余）教育范畴，其学生的学习特点相近，目前国家有统一归类管理的趋势．结合以上所述，本书在处理上有以下特点：

一、非常注意中学数学与高等数学的衔接，在这方面本书多处做了相应的处理．本书语言自然，内容深入浅出，例题数量众多，可以更好地帮助读者理解基本概念，掌握解题思路与方法．

二、考虑到网络教育的发展及读者的学习兴趣，经慎重考虑，本书除了覆盖全国高校网络教育考试委员会办公室组编的高校网络教育部分公共基础课全国统一考试“高等数学”考试大纲（高中起点本科）所涉及的内容外，还增加了一些选学内容（带星号）及有关级数的介绍（第 8 章）．

三、为明确起见，书后附录中给出了部分公共基础课全国统一考试“高等数学”考试大纲（高中起点本科）．

另外，建议专科的教学范围仅限在一元函数的微积分，并且在与本科相重叠的部分其要求应比本科的要求低一些．带星号的例题和习题对读者不做要求．

本书第 1～6 章由储志俊编写，第 7、8 章由张世唯编写，全书的插图由张世唯描绘．储志俊对全书进行了统稿和审阅．

本书在编写的过程中得到了编者所在单位江南大学理学院的大力支持和帮助，江南大学继续教育与网络教育学院为确保本书的顺利编写与出版，专门成立了自编教材建设工作小组．王洪新院长，俞晓诺、孙力副院长多次对本书

的编写思路、深度、适用范围等提出了宝贵的意见，张宁、鲁云霞、梁仁青、黄娅芳等老师做了大量的组织协调工作，保证了本书的顺利进行，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中不足之处在所难免，诚请广大读者批评指正.

编者

2015 年 7 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学. 初等数学的内容包括算术、初等代数、初等几何和三角函数等，即在小学和中学里我们已学过的那些内容. 初等数学研究的对象基本是不变的量，也即常量. 本章我们开始学习高等数学，它以变量为研究对象，主要内容有函数、极限与连续，它们是高等数学中微积分的基础.

1.1　走进高等数学

从哪儿走进高等数学呢？我们从下面的两个例子说起.

引例 1　谁的数字大.

某小学一年级有两个要好的小朋友，一天他俩之间发起了一场“比谁说的数字大”的比赛. 甲说一百，乙说一百零一；甲说一万，乙说一万零一；甲说一亿，乙说一亿零一；……说了一阵之后，其中一个特别聪明的小朋友觉得这不是个取胜的办法，灵机一动，说了一句“我的数总比你的数大 1”，随即宣布自己胜利了.

分析：用一个具体、不变而看上去很大的数确实是不能充当“比谁都大”这个角色的，所以我们必须用一个变化的数来充当“比谁都大”这个角色. 通常所说的“大”，实际上是人为规定的；而“比谁说的数字大”中的“大”实际上是“无穷大”的意思，后面我们将在数学上严格定义“无穷大”.

总之，这个聪明的小朋友实际上已经有了变化的思想，会用变化的思想认识事物，而且有了“你变我也变”的思想. 历史上首先出现的类似的认识，正是数学发展中的转折点，而“你变我也变”的依赖关系就是函数的本质，函数是微积分的基本概念.

引例 2　圆的面积.

以直线段为边的多边形的面积容易求得，而以曲线段为边围成的图形的面积怎样求得呢？比如说半径为 R 的圆的面积，前人是如何去求得的？在已知圆周长为 $2\pi R$ 的情况下，其中 π 是圆周率，前人用下述方法求得了圆的面积.

如图 1-1-1 所示，用圆的内接正 n 边形的面积来代替圆的面积当然有误差，但直观上很明显，当圆的内接正 n 边形的边数越来越多时，误差会越来越小. 具体地，正 n 边形的面积为

$$S_n = \frac{n}{2}R_nL_n \tag{1}$$

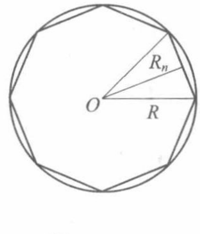


图 1-1-1

其中，L_n为正 n 边形的每一边的长度，R_n为边心距. 当 n 越来越大时，nL_n越来越接近于 $2\pi R$，边心距 R_n越来越接近于圆的半径R，用下述符号记为

$$当\ n\to\infty\ 时，S_n=\frac{n}{2}R_nL_n\to\frac{1}{2}R2\pi R=\pi R^2 \tag{2}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}R_nL_n=\pi R^2 \tag{3}$$

对于上述结果，大家都容易理解，然而这种用极限思考的方法在当时是具有划时代意义的，在后面我们会知道极限方法是微积分的基本分析方法. 不过，对于“直观上很明显”这样下结论的方式虽然“容易理解”，但是数学上必须有严格的定义来描述极限存在与否.

上面两个例子使我们触碰到了微积分的大门，下面就让我们真正进入高等数学的奇妙世界吧!

习题 1-1

1. 若两个没有负数概念但已经认识小数的小朋友之间发起一场“比谁说的数字小”的比赛，会和“比谁说的数字大”的比赛有哪些不同?

2. 上边为曲边(曲线方程 $y=f(x)>0$)的梯形(底边在 x 轴上)为曲边梯形，试用极限方法求曲边梯形的面积。具体步骤：① 将底边($a\leqslant x\leqslant b$)等分成 n 小段，也就将曲边梯形分成了 n 个小曲边梯形；② 每小段上面的曲边用直边(以曲边的左端点作底边的平行线段)代替，对应的面积用小矩形代替；③ 底边每个小段上都类似处理，作和，写出大曲边梯形面积的近似值；④ 当 n 越来越大时，误差越小，近似程度越好，直观上很明显，极限值就是大曲边梯形的面积. 试画出图形，写出式子.

1.2 函　　数

上面提到的变化的数，也就是变化着的量、可以变动的量，说得更详细一点，就是在一个过程中可以取不同值的量.

正如把静止看成运动的特例一样，我们也把常量看成一种特殊的变量，即在所考察的过程中，始终只取同一数值的变量.

变量的每一个取值都是一个数，所有这些数所构成的数集，称为这个变量的变域.

在许多情形中，变量的变域也即变量的取值范围都是一个区间，但并不是任何变量的变域都是一个区间. 例如上节讲的计算圆的面积的过程中，圆内接正多变形的边数 n 就是一个变量，它的变域并不是一个区间，而是所有不小于 3 的自然数所组成的数集. 不言而喻，变量的变域还可以是其他的更为复杂的数集.

下面我们一般性地来讨论集合.

1.2.1 集合

1. 集合的概念

集合是数学中一个原始的概念，就是说它不能用更简单的概念来定义，我们先通过例子说明这个概念. 比如，一个书店里的书构成的集合，一个学校里的学生构成的集合，全体实数构成的集合，等等.

一般地，所谓集合(或简称集)是指具有特定性质的一些事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素(或简称元).

通常用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 只含有有限个元素的集合称为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

通常有两种方法表示集合，一种是列举法，另一种是描述法. 顾名思义，列举法就是把集合的全体元素一一列出来. 例如，由元素 a_1，a_2，…，a_n组成的集合 A，可表示为

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

而描述法是按元素具有的性质来列举元素，如集合 B 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，则可表示成

$$B=\{x\,|\,x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，集合 C 是方程 $x^2-4=0$ 的解集，就可表示为

$$C=\{x\,|\,x^2-4=0\}$$

一般地，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

全体整数的集合为

$$\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

有时用"$+$"来表示除去 0 与负数的集合，用"$*$"表示除去 0 的集合. 所以有

$$\mathbf{Z}^+=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

$$\mathbf{Z}^*=\{\cdots, -n, \cdots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{Z}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^*$ 为非零实数集，$\mathbf{R}^+$ 为正实数集.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 例如，设

$$D=\{-2, 2\},\ C=\{x\,|\,x^2-4=0\}$$

则 $C=D$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集.

不含任何元素的集合称为空集. 例如：

$$\{x\,|\,x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x^2+4=0\}$$

是空集，因为满足条件 $x^2+4=0$ 的实数是不存在的. 空集记作$\varnothing$，且规定空集$\varnothing$是任何集合的子集. 如$\varnothing$是集合 A 的子集，则$\varnothing\subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算有并($\cup$)、交($\cap$)、差($\setminus$).

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集(简称交)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集(简称差)，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

有时，我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其它集合 A 都是 I 的子集. 此时，我们称集合 I 为全集或基本集，称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，也记作 A^{c}. 例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的余集就是

$$A^{c}=\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>1\}$$

设 A、B、C 为任意三个集合，则其并、交、余运算满足下列法则：

(1) 交换律：

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

(2) 结合律：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$$

(3) 分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup (B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap (B\cup C)$$

(4) 对偶律：

$$(A\cup B)^{c}=A^{c}\cap B^{c}$$
$$(A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$$

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证. 下面我们给出一个例证，其余留给读者自己完成.

【例 1-2-1】 由集合相等的定义验证 $(A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$.

证 $x\in (A\cap B)^{c}\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^{c}$ 或 $x\in B^{c}\Rightarrow x\in (A^{c}\cup B^{c})$

所以

$$(A\cap B)^{c}\subset A^{c}\cup B^{c}$$

反之

$$x\in (A^{c}\cup B^{c})\Rightarrow x\in A^{c} \text{ 或 } x\in B^{c}\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in (A\cap B)^{c}$$

即

$$A^{c}\cup B^{c}\subset (A\cap B)^{c}$$

所以

$$(A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$$

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡尔(Descartes)乘积. 设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x, y)，把这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x, y) \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

例如：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $y\in\mathbf{R}\}$ 即 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$. 例如：

$$M=\{(x, y)\mid x^2+y^2=R^2, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$$

代表了 xOy 平面上以原点为中心、半径为 R 的圆周上点的全体所组成的集合.

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}$$

其中，a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点，这里 $a\notin(a, b)$，$b\notin(a, b)$.

数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

其中，a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点，这里 $a\in[a, b]$，$b\in[a, b]$.

类似地可说明：

$$[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

$$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-2-1(a) 与 (b) 所示. 此外还有所谓的无限区间，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），可类似地表示无限区间. ∞ 通常表示 $\pm\infty$. 例如：

$$[a, +\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$

$$(-\infty, b)=\{x\mid x<b\}$$

这两个无限区间在数轴上分别如图 1-2-1(c) 与 (d) 所示.

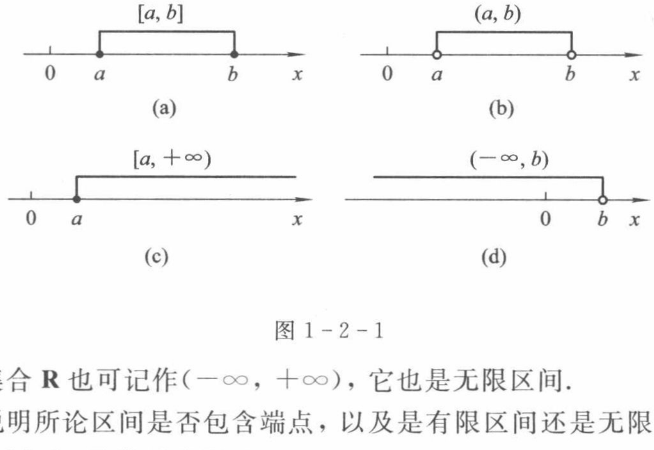


图 1-2-1

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.

以后在无需说明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径(见图 1-2-2).

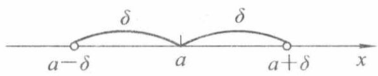


图 1-2-2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a, \delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如：

$$[a, b]\times[c, d]=\{(x, y) \mid x\in[a, b], y\in[c, d]\}$$

即 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a, b]$ 和闭区间 $[c, d]$.

1.2.2 函数

前面，我们在“谁的数字大”的游戏中，提到“你变我也变”的思想，这是函数的本质. 下面我们将全面讨论其概念和特性，以及函数出现的各种形式.

1. 函数的概念

在同一实际问题中，往往同时出现两个或两个以上的变量，这些变量依照一定的规律，有关联地变化着. 多于两个变量的情形我们将在第 7 章中讨论. 其余场合都是讨论两个变量的情形.

例如，在“谁的数字大”的游戏中，设一个小朋友说的数字为 x，另一个聪明的小朋友说的数字为 y，则有

$$y=x+1$$

再如，医学界有不少人利用统计的方法研究出许多理想体重计算公式，其中最简单的一个是关于成年男性的：

$$W=H-110$$

其中，H 为身高(cm)，W 为体重(kg)。如实际体重离理想体重越远(大于 20%)，则说明健康状况存在问题的可能性越大.

定义 1-2-1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域，f(是函数的英文单词 function 的第一个字母，也可用其它字母)为 x 和 y 之间的对应法则. 对于 x_0，则 $f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$在 x_0处的函数值. 当 x 取遍 D 上所有值时，集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 f 的值域.

在函数的定义中，对每一个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有不唯一的 y 与之对应，则称这种法则确定了一个多值函数.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 给定了对应法则，$x=\dfrac{1}{2}$ 则对应 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 事实上，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 给出了这个多值函数的两个单值分支. 我们讨论的情形大都是单值函数.

通常我们说函数有两个要素：一是定义域，二是对应法则. 若两个函数的定义域和对应法则都相同，则这两个函数是相等的，与所用字母无关.

例如，函数 $y=x^2$ 与 $s=t^2$ 是一样的.

关于函数的定义域，有自然定义域和实际定义域之分. 若无实际意义，则定义域都是自然定义域，即使函数的表达式有意义时，自变量取的一切实数所构成的集合. 而实际定义域是在实际问题下，自变量受限所取的一切实数所构成的集合.

例如，“谁的数字大”的游戏中，x 称为自变量，y 称为因变量，实际定义域 $D=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\}$(一年级学生只认识非负整数)，而自然定义域为$(-\infty,+\infty)$；“理想体重计算公式”中，$H$ 称为自变量，W 称为因变量，实际定义域 $D=\{H\,|\,H\geqslant 150\}$(推导公式时根据实际意义设定最低身高为 150 cm，而自然定义域为$(-\infty,+\infty)$).

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 的定义域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，函数 $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{2-x^2}}$ 的定义域为 $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$.

2. 函数的表示方法

函数的表示方法通常有三种：

(1) 表格法：将自变量的值与对应的因变量的值列成表格，如平方根表、对数值表和三角函数值表等.

(2) 图像法：在坐标系中用图形表示函数关系，如某城市某时间段的房价走势图、股指的分时走势图等.

(3) 公式法(也称为解析法)：用数学表达式(也称为解析表达式)表示自变量和因变量之间的关系. 若将公式法再分得细一点，则又有三种表示方法，即显函数法、隐函数法和分段函数法.

例如，前面提到的函数 $y=x+1$、函数 $W=H-110$ 和函数 $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{2-x^2}}$ 等都是显函数.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，这个隐函数可以从方程中解出来而成为显函数.

函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式，用以表示自变量和因变量之间的对应关系，这就是分段表示函数的方式.

【例 1-2-2】 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域为$[0,\ +\infty)$，如图 1-2-3 所示.

【例 1-2-3】 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $\{-1,\ 0,\ 1\}$，如图 1-2-4 所示. $y(0.5)=1$，$y(-10)=-1$，$y(0)=0$.

这里，sgn 相当于 f 的意思.

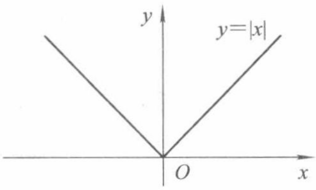


图 1-2-3

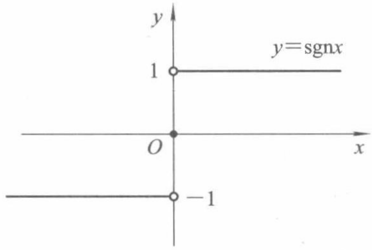


图 1-2-4

【例 1-2-4】 取整函数 $y=[x]$，表示 y 取不超过 x 的最大整数，显然定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 **Z**，如图 1-2-5 所示. $[9.1]=9$，$[-9.1]=-10$.

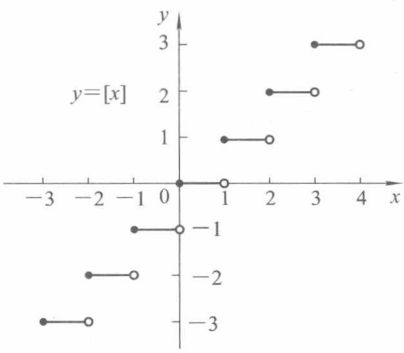


图 1-2-5