等学校数学系列教材

概率论教程

■ 主　编　赵喜林　余　东

■ 副主编　张　强　李春丽　丁咏梅　何晓霞

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

高等学校数学系列教材

概率论教程

■ 主 编 赵喜林 余 东

■ 副主编 张 强 李春丽 丁咏梅 何晓霞

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论教程/赵喜林,余东主编.—武汉:武汉大学出版社,2018.5
21世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-20089-0

Ⅰ.概…　Ⅱ.①赵…　②余…　Ⅲ.概率论—高等学校—教材
Ⅳ.O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第055086号

责任编辑:胡　艳　　　责任校对:汪欣怡　　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:12.75　字数:307千字　插页:1
版次:2018年5月第1版　　2018年5月第1次印刷
ISBN 978-7-307-20089-0　　定价:35.00元

前　言

概率论是一门研究随机现象的基础课程。本书的编写初衷是为高等院校信息与计算科学和统计类等专业提供一本内容难度稍高于一般工科专业的概率论教材,希望使用该教材时老师好教、学生易学。根据编者多年的教授经验,精心选择和组织本书内容,力求深入浅出,简明易懂地阐述概率论的基本概念、基本方法和基本理论。

全书共分为六章,分别是随机事件与概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律与中心极限定理,随机模拟。书中配备了丰富的例题和习题,习题分节设立,所选题目难易适中,具有启发性、趣味性和应用性。随着计算机技术的迅猛发展,随机模拟的应用也越来越广泛,本书在传统概率论内容基础上增加了“随机模拟”这一章,介绍了随机模拟的一些初步内容。本书可作为对概率论要求稍高于一般工科专业的其他专业的概率论教材,或类似课程的参考书。

本书由余东、赵喜林策划并担任主编,具体分工如下:第一章张强编写,第二章李春丽编写,第三章丁咏梅编写,第四章何晓霞编写,第五、六章赵喜林编写,全书由赵喜林、余东统稿。

限于编者水平,书中不当之处在所难免,恳请读者提出宝贵意见,我们将进一步改进。

编者

2018 年 3 月

目 录

第1章 随机事件与概率

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机事件

1. 随机现象

自然界中存在的现象可以分为两类:一类是在一定条件下必然发生的现象,称为**确定性现象**或**必然现象**;另一类是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象,称为**偶然性现象**或**随机现象**.

比如:在一个标准大气压下,100℃ 的纯水必然沸腾;带异性电荷的小球必然相互吸引等,都是必然现象. 向上抛掷一枚硬币,落地结果可能是正面朝上,也有可能是反面朝上,因此"正面朝上"是随机现象;向某一目标射击一次,目标被击中可能发生,也可能不发生,故目标被击中是随机现象.

我们把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学实验,统称为一个**试验**.如果这个实验"在相同条件下可以重复进行",而且每次试验的结果事前不可预知,就称它为一个**随机试验**,记作试验 E.

随机试验具有以下三个特点:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确实验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

比如:

E_1:抛一枚硬币,观察出现正反面的情况;

E_2:掷一颗骰子,观察出现的点数;

E_3:某种型号的电视机的寿命.

以上都是随机试验.

2. 样本空间

对于随机试验 E,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合,称为随机试验 E 的**样本空间**,记作 Ω.

样本空间里面的每个元素,即随机试验 E 的每个结果,称为**样本点**.

例 1.1.1 写出随机试验 E_1, E_2, E_3 的样本空间.

(1) E_1 的样本空间 $\Omega_1 = \{H, T\}$, H 表示出现正面, T 表示出现反面;

(2) E_2 的样本空间 $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$;

(3) E_3 的样本空间 $\Omega_3 = \{t \mid t \geqslant 0\}$;

注意,随机试验的样本空间并不是唯一的,可以根据观察需要而确定. 比如,例 1.1.1 中随机试验 E_2,如果我们感兴趣的是骰子出现奇数点还是偶数点,则可设样本空间为 $\Omega = \{$奇数点,偶数点$\}$.

3.随机事件

一般地,随机试验 E 的样本空间 Ω 的某些子集称为**随机事件**,简称为**事件**,可以用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示. 比如实验 E_2 中, Ω_2 的子集 $A = \{1,3,5\}$ 表示出现奇数点, $B = \{1,2\}$ 表示出现的点数为 1 或 2,都是随机事件.

在一次试验中,如果事件 A 中所含的一个样本点 ω 发生,就称**事件 A 发生**.

由一个样本点构成的单点集合,称为**基本事件**.

4.必然事件与不可能事件

样本空间 Ω 是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称 Ω 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何一个样本点,它作为样本空间的子集,在每次试验中都不发生,故事件 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

在实验 E_1 中, $\Omega_1 = \{H, T\}$ 是必然事件,表示"抛出的硬币出现正面或反面"; $\varnothing$ 不含样本点,表示"既不出现正面,也不出现反面",是不可能事件.

1.1.2 随机事件的关系与运算

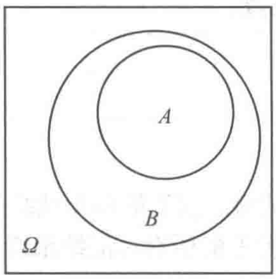
事件是一个集合,因而事件间的关系和运算可按照集合间的关系和运算来处理. 下面给出事件间关系和运算在概率论中的描述.

1.事件的关系

事件的关系主要有以下三种:

1) 包含关系

如果事件 A 和 B 这两个集合有 $A \subset B$,则称**事件 B 包含事件 A**,或者称**事件 A 含于事件 B**,表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 如图 1.1.1 所示.



$A \subset B$

图 1.1.1

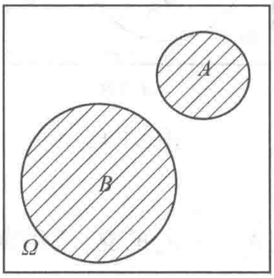
$A \subset B$ 的一个等价说法是,如果事件 B 不发生,则事件 A 必然不发生.

2) 相等关系

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,即 $A = B$,则称事件 A 与事件 B **相等**(或等价).

3) 互不相容性

如果 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**,或**互斥的**,如图 1.1.2. 如果 A,B 互斥,指事件 A 与 B 不能同时发生. 比如,从一个班级任抽一名学生,A 表示抽中的是男生,B 表示抽中的是女生,则 A,B 互不相容. 基本事件是两两互不相容的.



$A \cap B = \phi$

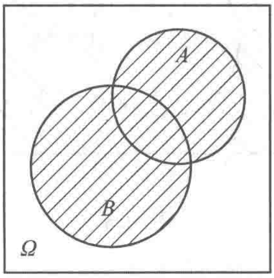
图 1.1.2

2. 事件的运算

事件的基本运算有四种:并、交、逆和差,它们对应集合的并、交、余和差.

1) 事件 A 与 B 的并

集合 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的**并**或**和事件**,也记作 $A + B$,如图 1.1.3 所示. $A \cup B$ 表示 A、B 中至少有一个发生.



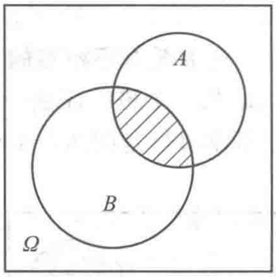
$A \cup B$

图 1.1.3

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**并(或和事件)**,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的**并(或和事件)**.

2) 事件 A 与 B 的交

集合 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的**交或积事件**，也记作 AB，表示 A、B 同时发生，如图 1.1.4.所示.



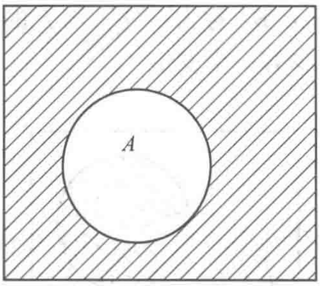
$A \cap B$

图 1.1.4

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**交(或积事件)**，表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生；称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的**交(或积事件)**.

3）对立事件

如果 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**，或**对立事件**. 对每次试验而言，若 A, B 互为对立事件，则事件 A、B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记作 $\overline{A}$. 如图 1.1.5 所示，$A, \overline{A}$ 互为对立事件，阴影部分表示 $\overline{A}$.



$A, \overline{A}$

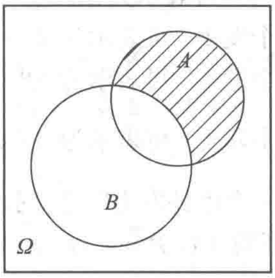
图 1.1.5

4）事件 A 与 B 的差

集合 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，表示 A 发生而 B 不发生，如图 1.1.6 所示.

对于对立事件，有 $\overline{A} = \Omega - A$.

比如：在掷一颗骰子试验中，事件 A =“出现奇数点” $= \{1,3,5\}$，事件 B =“出现点数不超过 3” $= \{1,2,3\}$，则事件 A 与事件 B 的差为 $A - B = \{5\}$，而事件 B 与事件 A 的差为 $B - A = \{2\}$，这是两个不同的差事件.



$A-B$

图 1.1.6

根据差事件和对立事件的定义,显然有

$$A - B = A\overline{B} \tag{1.1.1}$$

3.事件的运算规律

设 A,B,C 为事件,则它们的运算规律有:

交换律:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

结合律:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

分配律:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

注:分配律可推广到有限个或可列无穷个事件情形:

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i), A \cup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i), A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup B_i)$$

德摩根律:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

注:德摩根律可推广到有限个或可列无穷个事件:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i$$

例 1.1.2 设 A,B,C 是某个试验中的三个事件,则

(1) 事件“A 与 B 发生,C 不发生”可表示为 $AB\overline{C}$;

(2) 事件“A,B,C 中至少有一个发生”可表示为 $A \cup B \cup C$;

(3) 事件“A,B,C 中至少有两个发生”可表示为 $AB \cup BC \cup AC$;

(4) 事件“A,B,C 中恰好有两个发生”可表示为 $\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$;

(5) 事件“A,B,C 中有不多于一个事件发生”可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

例 1.1.3 若 A,B 为两事件,证明 $A \cup B = A \cup (B - A)$.

证明 $A \cup (B - A) = A \cup (B\overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup B$.

1.1.3 事件域

事件作为集合是样本空间 Ω 的子集,但有时候我们不需要把样本空间的所有子集都作为事件. 把作为事件的样本空间子集组成的集合类称为**事件域**,记为 $\mathscr{F}$.

$\mathscr{F}$ 中应该包含哪些子集呢?一般应该包含我们感兴趣的子集,以及由这些子集相互运算得到的集合(即事件域内对前面所定义的运算并、交、差、对立封闭).

根据德摩根律,有

$$AB = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \tag{1.1.6}$$

由式(1.1.1) 和式(1.1.6) 知,差和交的运算可通过并与对立来实现.

因此,并与对立是最基本运算,只要对这两种运算封闭,就能对并、交、差、对立封闭,于是有:

定义 1.1.1 设 Ω 为一样本空间,$\mathscr{F}$ 为 Ω 的某些子集所组成的集合类,如果 $\mathscr{F}$ 满足:

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$,则对立事件 $\overline{A} \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1,2,\cdots$,则可列并 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 为一个事件域,又称为 **σ 域或者 σ 代数**.

例 1.1.4 常见的事件域:

(1) $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ 是最简单的事件域;

(2) 设事件 $A \subset \Omega$,则 $\mathscr{F} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ 是事件域;

(3) 若样本空间含有 n 个样本点 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$,则由样本空间 Ω 的所有子集构成的集合类是事件域 $\mathscr{F}$,$\mathscr{F}$ 由空集 $\varnothing$,n 个单元素集,$\binom{n}{2}$ 个双元素集,$\binom{n}{3}$ 个三元素集,$\cdots$,以及 Ω 组成,共有 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ 个事件.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 一个正方体各面分别涂以红、黄、蓝、白、黑、绿六种颜色,任意抛掷一次,观察其朝上一面的颜色;

(2) 讨论某电话交换台在单位时间内收到的呼叫次数,并设 $i=\{$收到的呼叫次数$\}$;

(3) 测量某地区河水温度,并设 $t=\{$测量水的温度$\}$;

(4) 同时掷 3 枚均匀的硬币,观察其正反面向上的情况.

2. 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分);

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数;

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,如连续查出了 2 件次品就停止检查,或检查了 4 件产品就停止检查,记录检查的结果;

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

3. 向指定目标射击三枪,分别用 A_1,A_2,A_3 表示第一、第二、第三枪击中目标,试用 A_1,A_2,A_3 表示以下事件:

(1) 只有第一枪击中;

(2) 至少有一枪击中;

(3) 至少有两枪击中;

(4) 三枪都未击中.

4. 请叙述下列事件的对立事件:

(1) $A=$“掷两枚硬币,皆为正面”;

(2) $B=$“射击三次,皆命中目标”;

(3) $C=$“加工四个零件,至少有一个合格品”.

5. 已知 A,B 是样本空间 Ω 中的两个事件,且 $\Omega=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A=\{b,d,f,h\}$, $B=\{b,c,d,e,f,g\}$,试求:

(1) $\overline{AB}$; (2) $\bar{A}\cup B$; (3) $A-B$; (4) $\overline{\bar{A}\,\bar{B}}$.

6. 指出下列事件等式成立的条件:(1) $A\cup B=A$;(2) $A\cap B=A$.

7. 已知 A,B 是样本空间 Ω 中的两个事件,且 $S=\{x\mid 1<x<9\}$, $A=\{x\mid 4\leqslant x<6\}$, $B=\{x\mid 3<x\leqslant 7\}$,试求:

(1) $\overline{AB}$; (2) $\bar{A}\cup B$; (3) $A-B$; (4) $\overline{\bar{A}\,\bar{B}}$.

8. 证明:事件的运算公式:(1) $A=AB\cup A\bar{B}$;(2) $A\cup B=A\cup \bar{A}B$.

1.2 随机事件的概率

对于随机事件(除去必然事件和不可能事件),在一次试验中可能发生,也可能不发生.但是,不同的事件发生的可能性通常不同. 比如,我们去买彩票,中大奖的可能性比不中奖的可能性小. 我们希望知道事件在一次试验中发生的可能性的大小,用一个合适的数来表示这种大小,这个数就是概率.

1.2.1 事件的概率

定义1.2.1 设$\mathscr{F}$为样本空间Ω上的某些子集组成的事件域. 对任一事件$A \in \mathscr{F}$,定义在$\mathscr{F}$上的一个实值函数$P(A)$如果满足:

(1) 非负性:若$A \in \mathscr{F}$,则必有$P(A) \geqslant 0$;

(2) 正则性:$P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性:若$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$互不相容,即$A_iA_j = \varnothing(i \neq j, i,j = 1,2,\cdots)$,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) \tag{1.2.1}$$

则称$P(A)$为事件A的概率.

以上即是著名的**概率公理化定义**,是苏联数学家柯尔莫哥洛夫于1933年首次提出的. 在该定义出现之前,曾有过概率的古典定义、概率的统计定义、概率的主观定义. 这些定义各自适合特殊的随机现象. 概率的公理化定义,避免了之前概率定义的局限性和不完备性,揭示了概率的本质,即:概率是定义在事件域上的满足非负性、正则性和可列可加性的集合函数.该公理化定义的出现是概率论发展史上的一个里程碑,为现代概率论的发展奠定了基础.

在随机现象中,给定了样本空间Ω,选定Ω的子集构造了事件域$\mathscr{F}$,在$\mathscr{F}$上定义了概率P,由此确定的三元素$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间. 有了概率空间,就可以在概率空间的框架下研究随机现象.

1.2.2 古典概率

1.排列组合

首先介绍两个基本原理.

(1) 乘法原理:如果某件事情需要经过k个步骤才能完成,第一步有m_1种方法,第二步有m_2种方法……第k步有m_k种方法,则完成这件事情共有$m_1m_2\cdots m_k$种方法.

(2) 加法原理: 如果某件事情有k类方法完成,第一类方法又有m_1种方法,第二类方法又有m_2种方法……第k类方法又有m_k种方法,则完成这件事情共有$m_1 + m_2 + \cdots + m_k$种方法.

下面介绍排列组合基本计算公式.

(1) 排列:从n个不同元素中任取$r(r \leqslant n)$个元素排成一列(考虑元素的先后次序)共有

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

种排列方法.

(2) 重复排列:从n个不同元素中每次取出一个,放回后再取下一个,如此连续取r次所得的排列共有n^r种.

(3) 组合:从n个不同元素中任取$r(r \leqslant n)$个元素形成一组(不考虑元素的先后次序),这样的组合共有

$$\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

种组合方法. $\binom{n}{r}$ 也记为 C_n^r.

(4) 重复组合:从 n 个不同元素中每次取出一个,放回后再取下一个,如此连续取 r 次所得的组合共有 $\binom{n+r-1}{r}$ 种组合方法.这里的 r 可以大于 n.

(5) 分组:n 个不同元素分成 $r(r\leqslant n)$ 组,第一组有 k_1 个元素,第二组有 k_2 个元素……第 r 组有 k_r 个元素,$k_1+k_2+\cdots+k_r=n$,共有

$$\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \cdots\ k_r!}$$

种分组方法.

2.古典概率

古典概率模型的基本特征如下:

(1) 样本空间 Ω 只含有限个样本点. 不妨设样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,其中,$n$ 为其样本点的个数.

(2) 每一个基本事件 $A_i=\{\omega_i\}$ 出现的可能性是相同的(简称为等可能性), 即为

$$P(A_i)=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.2.2}$$

一个样本空间的每个基本事件是否为等可能性的,通常凭借经验或进行逻辑分析确定.比如,抛掷一枚均匀硬币,没有理由认为其中一面出现机会比另一面更多一些,故认为出现正面和反面是等可能的;又如, 从一个班级里随机抽取一名学生,则抽到每一名学生也可认为是等可能的.

定义 1.2.2 对古典概率模型,若随机事件 A 含有 k 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的总数}}\tag{1.2.3}$$

用这种方法定义的概率称为**古典概率**,是概率论发展初期主要使用的方法.

性质 1.2.1 对于古典概率有:

(1) 设 A 为任一事件,则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

(3) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}P(A_i)$.

证明:(1) 因为任一事件 A 所含的基本事件数 k 总满足:

$$0\leqslant k\leqslant n$$

故有

$$0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1$$

(2) 由于必然事件由全部 n 个基本事件所组成,即必然事件 Ω 所包含的基本事件数 $k=$