大学数学同步辅导与考研指导用书

高等数学试题分析

(2018)

东南大学大学数学教研室 编

★ 历年试题精讲

★ 典型习题精练

★ 权威专家精析

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学试题分析(2018)

东南大学大学数学教研室　编

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

内 容 提 要

本书收录了东南大学近二十年来的高等数学(工科专业)试题,并按内容进行了分类,对其中的大部分试题作了详尽的分析和解答,部分题目还给出了多种解法;另有一部分试题被选作习题,供读者练习.本书在附录中对习题给出了参考答案或提示.另外,附录中还收录了东南大学近三年的高等数学期中、期末试卷和近十二年高等数学竞赛试卷,并对竞赛试题进行了解析.

本书内容丰富,题型多样,可作为高等学校理工科专业的学生学习高等数学课程和参加高等数学竞赛的参考书,也可用作工科研究生数学入学考试的复习用书,还可用作教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题分析. 2018 / 东南大学大学数学教研室编. — 南京 :东南大学出版社,2018.8(2018.10 重印)

ISBN 978-7-5641-7922-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①东… Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)182944 号

高等数学试题分析(2018)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(联系电话:025—83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	虎彩印艺股份有限公司
开　　本	700mm×1000mm 1/16
印　　张	18.75
字　　数	368 千字
版　　次	2018 年 8 月第 1 版
印　　次	2018 年 10 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-7922-9
定　　价	40.00 元

前　言

高等数学是一年级大学生必修的重要基础课。为了使同学们更好地理解和掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，培养自学能力和分析问题、解决问题的能力，提高数学素养，我们选编了这本《高等数学试题分析》。

本书中的题目是从我校近二十年的期中、期末试题中挑选出来的，按内容分为函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，复变函数等九个章节，每一章节又一般包含填空题、选择题、计算题、证明题、应用题、综合题及练习题等七种类型题目。对每道例题，一般都进行了适当的分析，着重说明解题的基本思路和方法，给出了主要解题过程和答案。有的题目有多种解法，书中只列出了一至两种，书中给出的解法也未必是最好的，只是希望能起到启迪思维、开阔思路的作用。

本书在 2017 年版的基础上进行了修订，替换了一部分例题，增加了一部分练习题；在附录中增加了 2017 级的高等数学期中、期末考试的试题，并对试题的格式进行了适当调整；对所有的习题（包括期中、期末考试卷中的试题）给出了参考答案或提示；本书还新增了东南大学 2018 年的高等数学竞赛试题，并对题目进行了详细的解析，以方便同学们参考。

本书是东南大学大学数学教研室对高等数学进行教学改革取得较好成绩的反映。虽然本书内容选自东南大学试卷，但对所有学习该门课程的学生和报考硕士研究生的学生都有一定的参考价值。

本书由黄骏主编，陈文彦、张勤、贺丹、陈和等老师协助整理、打印和校对书稿。教研室的许多老师都对本书的出版提出了宝贵意见，在此一并对他们表示感谢。本书中缺点和错误在所难免，欢迎同学们批评指正。

作者电子邮箱：jhuang_math@163.com。

编　者

2018 年 6 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　试题分析

1.1.1　填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ________.

解　应用等价无穷小因子代换和关于 e 的重要极限，则

$$原式 = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}\cdot\frac{2^x-1}{2x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{2x}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{2x}\right) = \sqrt{2}$$

2. 设 a,b,c 均为正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} =$ ________.

解　这是利用夹逼定理求极限的题目.

令 $d=\max\{a,b,c\}$，则 $d\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\leqslant\sqrt[n]{3}\,d$. 令 $n\to\infty$，注意到 $\sqrt[n]{3}\to 1$，由夹逼定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = \max\{a,b,c\}$$

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)$ 的间断点为________.

解　因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$g(x)$ 的间断点为 $x=1$，所以由连续函数的性质知 $x=1$ 是 $f(x)+g(x)$ 的间断点.

或者先写出 $f(x)+g(x)$ 的解析表达式：

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 2x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

然后再检验分段点 $x=0$ 与 $x=1$ 是否是间断点. 例如对 $x=1$，因为

$$\lim_{x\to 1^-}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3,\quad \lim_{x\to 1^+}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 1^+}2x=2$$

可见 $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+g(x))$ 不存在，所以 $x=1$ 是 $f(x)+g(x)$ 的间断点.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{3}{2-\dfrac{2}{x}}$ 的间断点分别是________，类型分别为________.

解 本题主要考查连续的定义及间断点的分类.

由于在分母为零处 $f(x)$ 无定义，所以 $f(x)$ 的间断点分别是 $x=0$ 和 $x=1$. 由于$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点；由于$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点.

5. 当 $x\to0$ 时，无穷小量 $x^2-\sin x$ 是 x 的____ 阶无穷小.

解 根据无穷小量阶的比较的概念及重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 即可得结论.

因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=-1\neq0$，所以当 $x\to0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的一阶无穷小.（或填“同”）

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ________.

解 显然，当 $x\neq0$ 时 f 连续，又由 f 在 $x=0$ 处连续的定义知 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$，而

$$a=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=2+2a$$

所以 $a=-2$.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & 0<x\leqslant1\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

解 因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{a\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{2ax(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=2a$$

由函数在 $x=0$ 处连续知 $b=2a=2$，所以 $a=1,b=2$.

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 在 $x=$ ________ 处间断，其类型是

________ 间断点.

解　这是用极限定义的函数，极限值依赖于 x 的取值. 由

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ x^2, & x>0\end{cases}$$

易知 $x=0$ 是第一类间断点.

9. 函数 $f(x)=\left[\dfrac{1}{1+|x|}\right]$的间断点________ 是第 ________ 类间断点.

解　由取整函数的定义知

$$f(x)=\left[\frac{1}{1+|x|}\right]=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

易知 $x=0$ 是第一类间断点.

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}, & x>0,\\ ae^x, & x\leqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

解　首先考查 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，接着考查 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，再注意到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}}=e^2$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ae^x=a$$

于是 $a=e^2$.

11. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+1}{x^{2n}+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的间断点是 $x=$ ________，该间断点是第 ________ 类间断点.

解　这是用极限定义的函数，极限值依赖于 x 的取值. 由

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & -\infty<x\leqslant -1, 1<x<+\infty\end{cases}$$

易知 $x=1$ 是间断点，且是第一类间断点.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x=$ ________.

解　利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，即得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(a+b)x-ab}{(x-a)(x-b)}\right)^{\frac{(x-a)(x-b)}{(a+b)x-ab}\cdot\frac{(a+b)x^2-abx}{(x-a)(x-b)}}=e^{a+b}$$

1.1.2 单项选择题

1. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ ( )

(A) 不存在 (B) 等于 5 (C) 等于 3 (D) 等于 0

解 利用已知极限$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$及极限的四则运算法则,有

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{4\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}{\dfrac{4}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-\dfrac{1}{x}}=4+1=5$$

或者利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$及连续函数求极限的法则可得

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+4}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{\frac{5x}{x-1}}\\&=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-1}}=\ln\mathrm{e}^5=5\end{aligned}$$

2. 设$f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ b, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}-a, & x<0\end{cases}$在$x=0$处连续,则 ( )

(A) $a=b=\mathrm{e}$ (B) $a=b=\mathrm{e}^{-1}$

(C) $a=-b=\mathrm{e}^{-1}$ (D) $a=-b=-\mathrm{e}^{-1}$

解 本题考查连续的概念. 根据题意,有

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}-a\right)=-a=b=f(0)$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}=b=f(0)$$

故应当选(D).

3. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$,其中$a,b,c,d$为常数,$a^2+c^2\neq 0$,则必有 ( )

(A) $a=-4c$ (B) $a=4c$ (C) $b=-4d$ (D) $b=4d$

解 此题是已知函数f的极限值,要确定f中所含常数的关系,利用常用的一些重要极限和极限的运算法则即可解决. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{a\dfrac{\tan x}{x}+b\dfrac{1-\cos x}{x}}{c\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+d\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}}$$

$$= \frac{a+0}{-2c+0} = \frac{a}{-2c} = 2$$

所以 $a = -4c$.

4. 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+1}{x^{2n}+1} (n \in \mathbf{N}^*)$，则 $f(x)$　(　　)

(A) 不存在间断点　(B) 存在间断点 $x = 1$

(C) 存在间断点 $x = -1$　(D) 存在间断点 $x = 0$

解　写出 $f(x)$ 的表达式，即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \\ 1, & x = 1, \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

可知 $x = 1$ 是间断点.

5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$g(x)$ 有间断点，则　(　　)

(A) $g(f(x))$ 必有间断点　(B) $[g(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f(g(x))$ 必有间断点　(D) $\frac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点

解　当 f 的值域中不含 g 的间断点时，$g(f(x))$ 连续，故(A) 不对；当

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

时，$[g(x)]^2 = 1$ 连续，所以(B) 也不对；当 f 为常值函数时，$f(g(x))$ 连续，因此(C) 不对；(D) 是对的，可用反证法证明，留给读者.

6. 设当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是无穷小($\beta(x) \neq 0$)，则当 $x \to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小量的是　(　　)

(A) $\frac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$　(B) $\alpha^2(x) + \beta^2(x)\sin\frac{1}{x}$

(C) $\ln(1 + \alpha(x) \cdot \beta(x))$　(D) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

解　可取 $\alpha(x) = x$，$\beta(x) = x^3$，易知选(A).

7. 设 $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{x^2 e^{t(x-2)} + ax - 1}{e^{t(x-2)} + 1}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，则常数 $a =$　(　　)

(A) 5　(B) 4　(C) $\frac{7}{2}$　(D) $\frac{5}{2}$

解　先求极限得到 $f(x)$ 的表达式，即

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>2,\\ \dfrac{3+2a}{2}, & x=2,\\ ax-1, & x<2\end{cases}$$

再由函数在 $x=2$ 处连续知 $a=\dfrac{5}{2}$.

8. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ ( )

(A) 不存在但不为 ∞　　(B) 等于 2

(C) 等于 0　　(D) 为 ∞

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,所以选(A).

9. 下列命题正确的是 ( )

(A) 任何两个无穷小量之比的极限必存在(极限值为有限实数或 ∞)

(B) 若数列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛,则数列 $\{a_n\}$ 必收敛.

(C) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛,数列 $\{b_n\}$ 发散,则数列 $\{a_nb_n\}$ 必发散.

(D) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加,数列 $\{b_n\}$ 单调减少,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

解 本题考查数列(函数)极限的有关性质. (A),(B),(C) 都是错的,反例如下:

(A) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$ 都是无穷小量,但 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sin\dfrac{1}{x}$,当 $x\to 0$ 时不存在极限;

(B) 设 $a_n=(-1)^n$,则 $\{a_n\}$ 不收敛,但 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 -1, $\{a_{2k}\}$ 收敛于 1;

(C) 设 $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n$,则 $a_nb_n=1$, $\{a_nb_n\}$ 收敛于 1.

而选项(D),由题设知 $\{a_n-b_n\}$ 单调增加,又 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,从而知 $a_n\leqslant b_n$,且 $a_n\leqslant b_1$, $b_n\geqslant a_1$,因而数列 $\{a_n\}$ 单增有上界,数列 $\{b_n\}$ 单减有下界,因而都收敛. 再由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ 得知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 故应选(D).

1.1.3 计算题

1. 计算 $\lim\limits_{t\to 0}(-\sin 3t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$.

分析 这是幂指函数 $[u(t)]^{v(t)}$ 的极限问题,由于 $\lim\limits_{t\to 0}u(t)=1$, $\lim\limits_{t\to 0}v(t)=\infty$,所以可利用第二个重要极限及复合函数求极限的法则计算.

解 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}[1+(\cos t-1-\sin 3t)]^{\frac{1}{\cos t-1-\sin 3t}\cdot\frac{\cos t-1-\sin 3t}{t}}$

$$= e^{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1 - \sin 3t}{t}} = e^{-3}$$

注　本题将来也可利用 L'Hospital 法则计算.

2. 求 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$ 的连续区间与间断点,并指出间断点的类型(要说明理由).

分析　对初等函数来说,根据"初等函数在其定义区间内连续"的基本结论,要求 f 的连续区间,只要求出 f 的定义区间,使函数 f 无定义的点即为其间断点,再根据间断点分类的知识判断其类型.

解　f 的连续区间为 $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$,间断点为 $x=-1,x=0$ 和 $x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\sin x}{-x(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$,故 $x=-1$ 是可去间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x+1)(x-1)}=\infty$,故 $x=1$ 是第二类(无穷)间断点;

因为

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}=-1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}=1\neq f(0+0)$$

所以 $x=0$ 是函数 f 的第一类间断点.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$,试求 $f(x)$ 的连续区间与间断点,并指出间断点的类型(要说明理由).

解　f 的间断点为 $x=0,x=1$;连续区间是 $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$,所以 $x=0$ 是 f 的第二类间断点;

因为

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}f(x)=0,\quad f(1+0)=\lim_{x\to1^+}f(x)=1\neq f(1-0)$$

所以 $x=1$ 是 f 的第一类间断点.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^x$.

解　因为

$$\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^x=\exp(x\ln(1+e^{\frac{1}{x}}))=\exp(x\ln e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}}))$$

$$=\exp(1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}}))$$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{-t})}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{te^t}=0\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)$$

所以$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^x = e$.

5. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解 应用等价无穷小因子代换,则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\exp\left(x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

6. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$.

解 记$a_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}$,则

$$\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\leqslant a_n\leqslant\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{3}{2}$$

因此,由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$.

1.1.4 证明题

1. 设$x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}\,(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求此极限.

分析 证明数列$\{x_n\}$收敛的方法通常有三个:一是用单调有界原理,二是用Cauchy收敛准则,三是用夹逼定理.由于本题的数列是用递推关系给出的,所以首先考虑用单调有界原理证明$\{x_n\}$收敛,再用递推关系求出极限.

解 因为$x_1=1>0$,由递推关系$x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}$,易知对一切$n\in\mathbf{N}^*$,$x_n>0$,而$x_2=\sqrt{1+x_1}=\sqrt{2}>x_1$,设$x_n>x_{n-1}$,则

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{1+x_n}-\sqrt{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x_{n-1}}}>0$$

由数学归纳法知,对一切n有$x_{n+1}>x_n$,即数列$\{x_n\}$单调增加.又$x_1=1<2$,设$x_n<2$,则$x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}<\sqrt{1+2}=\sqrt{3}<2$,故对一切$n$,有$x_n<2$,即数列$\{x_n\}$有上界.由单调有界原理,可知数列$\{x_n\}$收敛.现设该数列的极限为$l$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$.

在递推公式两边令 $n\to\infty$ 取极限，得 $l=\sqrt{1+l}$，由此得到 $l=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（由极限性质，应舍去负根 $l=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$），故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，并且 $f(x_0)>0$，试证明：存在 x_0 的邻域，使得在此邻域内有 $kf(x)>f(x_0)$，其中常数 $k>1$.

分析　要证在 x_0 附近 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{k}$，而函数 f 在 x_0 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，显然 $f(x_0)>\dfrac{f(x_0)}{k}(k>1)$，这样一来，问题转化为由函数极限大于某一常数，要证在 x_0 附近的函数值大于该常数. 这正是函数极限的性质.

证　因 f 在 x_0 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，又 $f(x_0)>\dfrac{f(x_0)}{k}(k>1)$，故

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>\frac{1}{k}f(x_0)$$

由函数极限定义，对 $\varepsilon=\dfrac{k-1}{k}f(x_0)$，存在 x_0 的某个邻域，使得在此邻域内有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

由此得到 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon=f(x_0)-\dfrac{k-1}{k}f(x_0)=\dfrac{1}{k}f(x_0)$ 在 x_0 的某邻域内成立.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：存在一点 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

分析　要证 $f(\xi)-f(a+\xi)=0$，即要证方程 $f(x)-f(a+x)=0$ 在区间 $[0,a]$ 上有一实根 $x=\xi$，或函数 $F(x)=f(x)-f(a+x)$ 在 $[0,a]$ 上有一零点 $x=\xi$. 于是问题转化为检验 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上是否满足零点定理的条件.

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a+x)\quad(0\leqslant x\leqslant a)$$

显然 $F\in C[0,a]$，又

$$F(0)=f(0)-f(a),\quad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

于是

$$F(0)F(a)=-(f(0)-f(a))^2\leqslant 0$$

若上式最后的等号成立，则可取 $\xi=0$ 或 $\xi=a$；若 $F(0)F(a)<0$，则由闭区间上连续函数的零点定理知，存在 $\xi\in(0,a)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

4. 设正数数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解法一 由极限的保序性可知存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，因此数列 $\{x_n\}$ 单调减($n>N$). 又因 $x_n>0$，根据单调有界原理，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geqslant 0$. 若 $a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{a}=1$，与 $l<1$ 矛盾. 故 $a=0$.

解法二 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l<1$，所以对于 $\varepsilon=\frac{1-l}{2}>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-l\right|<\varepsilon$，推得 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<l+\varepsilon=\frac{1+l}{2}<1$. 于是，当 $n>N$ 时

$$\frac{x_{N+1}}{x_N}\,\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N}$$

即 $0<x_n<x_N\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N}$，令 $n\to\infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

5. 设 $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{1+x_n^2}{2}(n=1,2,\cdots)$，利用单调有界收敛准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由题意可知

$$x_{n+1}=\frac{1+x_n^2}{2}\geqslant x_n,\quad x_1=\frac{1}{2}<1$$

再设 $x_n<1$，则

$$x_{n+1}=\frac{1+x_n^2}{2}<1$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则

$$l=\frac{1+l^2}{2}\Rightarrow l=1$$

1.2 练习题

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}-\sqrt{x}\right)=$ ________.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$($a$ 为有限数)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$ ________.

3. 如果 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$，求 a,b.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

6. 求 $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{x+x^2e^{tx}}{\sin x+e^{tx}}$(其中 x 与 t 无关).

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{(1-\cos x)\sin^2 x}$.

9. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x+x^3\cos\dfrac{1}{x}}{(1+x\sin x)(1-\cos x)}$.

10. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+n\sin 1}+\dfrac{n+2}{n^2+n\sin 2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n\sin n}\right)$.

11. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.

12. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

13. 求函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sin x}{x^2(\pi-x)}$ 的间断点,并指出其类型(要说明理由).

14. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{2^{3n}+x^{3n}}}(x\geqslant 0)$ 的连续性,并指出间断点的类型(应说明理由).

15. 试求 $f(x)=\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{x^3e^{tx}-x}{e^{tx}-\sin x}$ 的间断点,并指出间断点类型(需说明理由).

16. 设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{4(1+x_n)}{4+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

17. 设 $x_0=\sqrt{2}, x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

18. 设

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\quad(a_i>0;i=1,\cdots,n)$$

证明:数列 $\{x_n\}$ 收敛.