"东北林业大学优秀教材及学术专著
出版与奖励专项资金"资助出版

最优控制

ZUIYOUKONGZHI

主 编 戴天虹 白雪冰

東北林業大學出版社
Northeast Forestry University Press

“东北林业大学优秀教材及学术专著
出版与奖励专项资金”资助出版

最优控制

主 编 戴天虹 白雪冰

東北林業大學出版社
Northeast Forestry University Press
·哈尔滨·

图书在版编目（CIP）数据

最优控制／戴天虹，白雪冰主编．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-5674-0937-8

Ⅰ．①最…　Ⅱ．①戴…②白…　Ⅲ．①最佳控制-数学理论　Ⅳ．①0232

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 284709 号

责任编辑：倪乃华
责任校对：许　然
封面设计：乔鑫鑫
出版发行：东北林业大学出版社（哈尔滨市香坊区哈平六道街 6 号　邮编：150040）
印　　装：哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：6.75
字　　数：156 千字
版　　次：2016 年 11 月第 1 版
印　　次：2016 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：18.00 元

如发现印装质量问题，请与出版社联系调换。（电话：0451-82113296　82191620）

前　　言

在生产过程、军事行动、经济活动以及人类的其他有目的的活动中，常需要对被控系统或被控过程施加某种控制作用以使某个性能指标达到最优，这种控制作用称为最优控制。

最优控制是使控制系统的性能指标实现最优化的基本条件和综合方法。最优控制概括起来说就是对一个受控的动力学系统或运动过程，从一类允许的控制方案中找出一个最优的控制方案，使系统的运动在由某个初始状态转移到指定的目标状态时性能指标值为最优。最优控制是最优化方法的一个应用。从数学意义上说，最优化方法是一种求极值的方法——在一组约束为等式或不等式的条件下，使系统的目标函数达到极值，即最大值或最小值；从经济意义上说，是在一定的人力、物力和财力资源条件下，使经济效果（如产值、利润）达到最大，或者在完成规定的生产或经济任务下，使投入的人力、物力和财力等资源为最少。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分，是研究和解决从一切可能的控制方案中寻找最优解的一门学科，基本内容和常用方法包括动态规划、最大值原理和变分法。这方面的开创性工作主要是由贝尔曼（R. E. Bellman）提出的“动态规划”和庞特里亚金等提出的“极大值原理”。到了20世纪60年代，卡尔曼（Kalman）等又提出了可控制性及可观测性的概念，建立了最优估计理论。这方面的先期工作应该追溯到维纳（N. Wiener）等人奠基的控制论（Cybernetics）。最优控制理论的实现离不开最优化技术。最优化技术主要用于研究和解决最优化问题，主要包括两个需要研究和解决的方面：一个是如何将最优化问题表示为数学模型；另一个是如何根据数学模型尽快求出其最优解。

本书在取材和阐述方式上，注意了工程性；考虑到授课学时（32学时）的限制，在内容上尽量删繁就简，避免过分地引申和扩充；在叙述问题时，力求概念明确和遵循教学顺序。每篇均安排了一定数量相对比较简单的练习题，目的主要是使读者通过练习熟悉所学的知识。本书可供非自动化类专业硕士研究生使用也可作为自动化类专业本科高年级学生现代控制理论选修课用书。

本书是东北林业大学研究生重点课程用书。

本书在编写过程中参考并汲取了许多院校专家们编写的教科书和习题集，在此向这些书的作者表示衷心的感谢。

编　者

2016年4月

目　录

1　绪论 …………………………………………………………………… (1)
　1.1　引言 ………………………………………………………………… (1)
　1.2　最优化问题 ………………………………………………………… (2)
　1.3　最优控制问题 ……………………………………………………… (4)
　1.4　最优控制问题的提法 ……………………………………………… (6)
　1.5　最优控制问题的分类 ……………………………………………… (7)
2　数学基础 ……………………………………………………………… (9)
　2.1　向量和矩阵的微分 ………………………………………………… (9)
　2.2　函数的矩阵对数量的导数极值 …………………………………… (11)
　2.3　泛函与变分 ………………………………………………………… (14)
3　最优控制中的变分法 ………………………………………………… (30)
　3.1　变分法的基本概念 ………………………………………………… (30)
　3.2　欧拉方程 …………………………………………………………… (32)
　3.3　条件极值的变分问题 ……………………………………………… (34)
　3.4　在一点处的变分 …………………………………………………… (34)
　3.5　哈米顿原理 ………………………………………………………… (35)
4　极小值原理 …………………………………………………………… (40)
　4.1　引言 ………………………………………………………………… (40)
　4.2　连续系统的极小值原理 …………………………………………… (41)
　4.3　极小原理的应用 …………………………………………………… (46)
5　动态规划 ……………………………………………………………… (62)
　5.1　多级决策问题及最优性原理 ……………………………………… (62)
　5.2　最优性原理 ………………………………………………………… (65)
　5.3　动态规划的基本递推方程 ………………………………………… (67)
　5.4　离散系统动态规划 ………………………………………………… (69)

5.5 连续系统的动态规划 …………………………………………………… (73)
6 线性二次型最优控制调节器 …………………………………………… (81)
6.1 概述 ……………………………………………………………………… (81)
6.2 有限时间状态调节器($T\neq\infty$) …………………………………… (82)
6.3 无限时间状态调节器($T\to\infty$) …………………………………… (86)
6.4 应用 Matlab 求解二次型最优控制 ……………………………………… (89)
6.5 离散时间系统的线性二次型最优控制 ………………………………… (93)
参考文献 ………………………………………………………………… (102)

1 绪 论

1.1 引 言

在生产过程、军事行动、经济活动以及人类的其他有目的的活动中，常需要对被控系统或被控过程施加某种控制作用以使某个性能指标达到最优，这种控制作用称为最优控制。最优控制属于最优化的范畴。最优控制与最优化有共同的性质和理论基础。最优控制通常是针对控制系统本身，目的在于使一台机组、一台设备或一个生产过程实现局部最优。

如何根据受控系统的动态特性去选择控制规律，使得系统按照一定的技术要求进行运转，并使描述（评价）系统性能或品质的某个“指标”在一定意义上达到最优值，这是最优控制研究的课题。

近50年来，科学技术的迅速发展，对许多被控对象（如宇宙飞船、导弹、卫星和现代工业设备与生产过程）的性能提出了更高的要求，在许多情况下要求系统的某种性能指标为最优。这就要求人们对控制问题必须从最优控制的角度进行研究分析和设计。

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分，其形成与发展奠定了整个现代控制理论的基础。早在20世纪50年代初人们就开始了对最短时间控制问题的研究。随后，由于空间技术的发展，越来越多的学者和工程技术人员投身于这一领域的研究和开发，逐步形成了较为完整的最优控制理论体系。

最优化问题就是根据各种不同的研究对象以及人们预期要达到的目标，寻找一个最优控制规律，设计出一个最优控制方案或最优控制系统。

最优控制理论研究的主要问题是根据已建立的被控对象的时域数学模型或频域数学模型，选择一个容许的控制律，使得被控对象按预定要求运行，并使给定的某性能指标达到最优值。从数学的观点来看，最优控制理论研究的问题是求解一类带有约束条件的泛函取值问题，属于变分学的理论范畴。然而，经典变分学理论只能解决容许控制属于开机的一类，为适应工程实践的需要，20世纪50年代中期出现了现代变分理论。在现代变分理论中最常用的两种分法是动态规划和极小值原理。

动态规划是美国学者贝尔曼于1953~1957年为了解决多级决策问题的算法而逐步创立的。

最小值原理是苏联科学院院士庞特里亚金于1956~1958年逐步创立的。

近年来，由于数字计算机的飞速发展和完善，逐步形成了最优控制理论中的数值计算法、参数优化方法。当性能指标比较复杂或者不能用变量或函数表示时，可以采用直接搜索法，经过若干次迭代都达到最优点。常用的方法有邻近极值法、梯度法、共轭梯度法及单纯形法等。同时由于可以把计算机作为控制系统的一个组成部分，以实现在线控制，从而使最优控制理论的工程实现成为现实。因此，最优控制理论提出的求解方法，既是一种数学方法，又是一种计算机算法。

时至今日，最优控制理论的研究，无论在深度和广度上都有了很大的发展，并且日益与其他控制理论相互渗透，形成了更为实用的学科分支，如鲁棒最优控制、随机最优控制、分布参数系统最优控制及大系统的次优控制等。可以说最优控制理论目前仍然是在发展中的、极其活跃的学科领域之一。

1.2 最优化问题

1.2.1 最优化问题的数学描述

所谓最优化问题，就是寻找一个最优控制方案或者最优控制规律，使所研究的对象（或系统）能最优地达到预期的目标。

例如：在控制发射 N 级火箭时，如何规划各级火箭的质量使得火箭的总质量为最小；或在雷达高炮随动系统中，当发现敌机后，如何以最快的速度跟踪目标而将敌机击落。

也就是说，最优化问题就是依据各种不同的研究对象以及人们预期达到的目的，寻找出一个最优控制规律，设计出一个最优控制方案或者最优控制系统。

例 1–1 甲仓库有 1 500 袋水泥，乙仓库有 1 800 袋水泥，工地 A 需要 900 袋水泥，工地 B 需要 600 袋水泥，工地 C 需要 1 200 袋水泥，从甲仓库送往 A，B，C 工地的运费分别为每袋 1 元、2 元、4 元，从乙仓库送往 A，B，C 工地的运费分别为每袋 4 元、5 元、9 元，应如何安排运送这些水泥才能使运费最省？

解 设总运费 $f(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 9x_6$

最优化的任务在于确定 x 使 $f(x)$ 为最小。x 受到以下条件限制：

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1500$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 1800$$

$$x_1 + x_4 = 900$$

$$x_2 + x_5 = 600$$

$$x_3 + x_6 = 1200$$

例 1–2 关于飞船的月球软着陆问题。

为使飞船实现软着陆，即到达月球表面时速度为 0，要寻找飞船发动机推力的最优变化规律，使燃料消耗最少，以便完成任务有足够燃料返回地球。

飞船运动方程：
$$\begin{aligned} h'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= \frac{u(t)}{m(t)} - g \\ m'(t) &= -ku(t) \end{aligned} \qquad (1-2-1)$$

初始条件：
$$\begin{aligned} h(0) &= h_0 \\ v(0) &= v_0 \\ m(0) &= M + F \end{aligned} \qquad (1-2-2)$$

末端条件：
$$\begin{aligned} h(tf) &= 0 \\ v(tf) &= 0 \end{aligned} \qquad (1-2-3)$$

控制约束：
$$0 \leqslant u(t) \leqslant u_{max} \qquad (1-2-4)$$

性能指标取为表征燃料消耗量的飞船着陆时的质量：

$$J = m(t_f) \qquad (1-2-5)$$

最优化问题就是在满足式（1-2-2）和式（1-2-5）的约束条件下，寻求发动机推力的最优变化规律 $u(t)$，使飞船从 $x(t_0) \rightarrow x(t_f)$，并使 $J = m(t_f)$。

最优化问题的数学描述包含以下几个方面的内容。

1.2.1.1 受控制系统的数学模型

受控制系统的数学模型即系统微分方程（集中参数系统可用一组一阶常微分方程来描述）[x（t）是状态变量，u（t）是控制变量，t 是时间]

$$x'(t) = f[x(t),\ u(t),\ t] \qquad (1-2-6)$$

1.2.1.2 边界条件与目标集

边界条件［即初始状态时刻 t_0 和初始状态 $x(t_0)$］通常已知，而终端时刻 t_f 和终端状态 $x(t_f)$ 可以固定也可以自由。

一般地，对终端的要求可以用如下的终端等式或不等式约束条件来表示：

$$N_1 = \{x(t_f),\ t_f\} = 0 \text{ 或 } N_2 = [x(t_f),\ t_f] \leqslant 0 \qquad (1-2-7)$$

目标集是满足终端约束条件的状态集合，用 M 表示，

$$M = \{x(t_f)\},\ x(t_f) \in R^n,\ N_1[x(t_f),\ t_f] = 0 \text{ 或 } N_2 = [x(t_f),\ t_f] \leqslant 0 \qquad (1-2-8)$$

为简单起见，笼统称式（1-2-8）为目标集。

1.2.1.3 容许控制

每一个实际的控制问题，控制向量 $u(t)$ 都有一个规定的取值范围，通常可以用如下不等式的约束条件来表示：

$$0 \leqslant u(t) \leqslant u_{max} \text{ 或 } |u_i| \leqslant m_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \qquad (1-2-9)$$

在 R^r 空间中，把满足上式的点 $u(t)$ 的集合称为控制集，把属于 $u(t) \in U$ 的 $u(t)$ 称为容许控制。

若 $u(t)$ 的取值不受限制，则容许控制属于某一开集。U 为开集还是闭集在处理方法上有着本质的差别。

1.2.1.4 性能指标（目标函数）

衡量控制作用效果的是性能指标。

将 $x(t_0) \to x(t_f)$ 通过不同 $u(t)$ 来完成，而控制效果好坏则用性能指标来判别。对于最优化问题的目标函数，其内容与形式主要取决于具体优化问题所要解决的主要矛盾。

例如，在人造卫星的姿态控制问题中，可分为时间最短、燃料最少、时间最短-燃料最少不同目标函数的最优化问题。

1.2.2 最优化问题的分类

(1) 单变量函数与多变量函数最优化问题。

(2) 无约束与有约束最优化问题。

(3) 确定性和随机性最优化问题。

(4) 线性和非线性最优化问题。

(5) 静态和动态最优化问题。

单变量函数最优化方法是求解最优化问题的基本方法。

1.2.3 最优化问题的求解方法

1.2.3.1 间接法（解析法）

间接法（解析法）无约束：经典微分法、经典变分法。

间接法（解析法）有约束：极大值原理、动态规划。

1.2.3.2 直接法（数值解法）

函数逼近法：插值法、曲线拟合法；

区间消去法：菲波纳奇法、黄金分割法（0.618 法）；

爬山法：变量轮换法、步长加速法、方向加速法、单纯形法、随机搜索法。

1.2.3.3 以解析法为基础的数值解法

无约束梯度法：最速下降法、共轭梯度法、牛顿法与拟牛顿法、变尺度法、牛顿-高斯最小二乘法。

有约束梯度法：可解方向法、梯度投影法、简约梯度法。

化有约束为无约束问题：序列无约束极小化法、线性近似化法。

最优控制属于最优化范畴，因此最优控制与最优化有着共同的性质和理论基础，但最优化涉及面极广，举凡生产过程的控制企业的生产调度对资金、材料、设备的分配乃至经济政策的制定等，无不与最优化有关。而最优控制是针对控制系统本身而言的，目的在于使一个机组、一台设备或一个生产过程实现局部最优。

1.3 最优控制问题

1.3.1 最优控制问题的概念

所谓最优控制问题，就是指在给定条件下，对给定系统确定一种控制规律，使该系

统能在规定的性能指标下具有最优值。也就是说，最优控制就是要寻找容许的控制作用（规律）使动态系统（受控系统）从初始状态转移到某种要求的终端状态，且保证所规定的性能指标（目标函数）达到最大（小）值。

最优控制问题的示意图如图 1-1 所示。最优控制问题的本质乃是一变分学问题。经典变分理论只能解决一类简单的最优控制问题。为满足工程实践的需要，20 世纪 50 年代中期，出现了现代变分理论，最常用的方法就是极大值原理和动态规划。最优控制在被控对象参数已知的情况下，已成为设计复杂系统的有效方法之一。

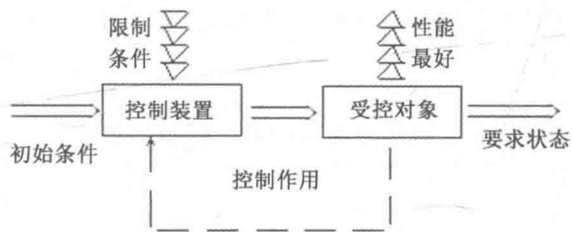

图 1-1 最优控制问题的示意图

1.3.2 最优控制问题的性能指标

在状态空间中要使系统的状态由初始状态 $x(t_0) \rightarrow x(t_f)$，可以用不同的控制规律来实现。为了衡量控制系统在每一种控制规律作用下工作的优劣，就需要用一个性能指标来判断。

性能指标的内容、形式取决于最优控制所完成的任务。不同最优控制问题就应有不同的性能指标。同一最优控制问题的性能指标也可能因设计者着眼点的不同而有差异。

1.3.2.1 综合性或波尔扎（Bolza）型性能指标

$$J[u(\cdot)] = \psi[x(t_f),\ t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\ u(t),\ t]\mathrm{d}t \qquad (1-3-1)$$

式中：L——标量函数，动态性能指标；

ψ——标量函数，终端性能指标；

J——标量函数。

对每一个控制函数 $u(t)$ 都有一个对应值，$u(\cdot)$ 为控制函数整体。

1.3.2.2 积分变量或拉格朗日（Lagrange）型性能指标

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\ u(t),\ t]\mathrm{d}t \qquad (1-3-2)$$

强调系统的过程要求。

1.3.2.3 终端型或麦耶尔（Mager）型性能指标

$$J[u(\cdot)] = \psi[\dot{x}(t_f),\ t_f] \qquad (1-3-3)$$

以上三种性能指标，通过一些简单的数学处理，可以相互转化。

在特殊情况下，可采用如下的二次型性能指标

$$J[u(\cdot)]=\frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t \tag{1-3-4}$$

式中：F ——终端加权矩阵；

$Q(t)$ ——状态加权矩阵；

$R(t)$ ——控制加权矩阵。

1.4 最优控制问题的提法

所谓最优控制问题的提法，就是将通常的最优控制问题抽象成一个数学问题，并用数学语言严格地表示出来。

(1) 给定系统的状态方程

$$x(t)=f[\dot{x}(t),\ u(t),\ t] \tag{1-4-1}$$

(2) 给定初始条件和终端条件

初始状态为

$$x(t_0)=x_0 \tag{1-4-2}$$

终端状态 $x(t_f)$ 可用如下约束条件表示。

$$N_1[x(t_f),\ t_f]=0 \text{ 或 } N_2[x(t_f),\ t_f]\leqslant 0 \tag{1-4-3}$$

(3) 给定性能指标（目标函数）

$$J[u(\cdot)]=\psi[x(t_f),\ t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),\ u(t),\ t]\mathrm{d}t \tag{1-4-4}$$

确定 J 最优控制向量 $u^*(t)$，使系统从 $x(t_0)\to x(t_f)$，并使性能指标 $J[u(\cdot)]$ 具有极大（小）值。

1.4.1 控制系统的数学模型（集中参数系统）

直接法建立：动力学、运动学的基本定律，即解析法。

间接法建立：通过“辨识”的途径确定系统的结构与参数

$$\dot{x}(t)=f(x(t),\ u(t),\ t) \tag{1-4-5}$$

其中 $x(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$，$u(t)=[u_1(t),\ u_2(t),\ \cdots,\ u_r(t)]^{\mathrm{T}}$，$f=[f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n]$ $x(t)$ 为 n 维状态向量，$u(t)$ 为 r 维控制向量，f 为 n 维函数向量。

1.4.2 目标集

通过 $u(t)$ 使 $x(t)$ 由 $x(t_0)$ 到 $x(t_f)$，其中 $x(t_0)$ 为初始状态，并且通常为已知；$x(t_f)$ 为终端状态，即控制所要求达到的目标。一般来说，对终端状态的要求可用如下的约束条件表示：

$$g_1(x(t_f),\ t_f)=0,\ g_2(x(t_f),\ t_f)\leqslant 0 \tag{1-4-6}$$

1.4.3 容许控制

u_i 具有不同的物理属性，一般有 $|u_i| \leqslant \alpha$，$i=1, 2, \cdots, r$，即在控制域 U 内，凡在闭区间 $[t_0, t_f]$ 上有定义，且在控制域 U 内取值的每一个控制函数 $u(t)$ 均称为容许控制。

1.4.4 性能指标

性能指标主要取决于问题所要解决的主要矛盾。

性能指标的表达式为

$$J[u(\cdot)] = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t)\mathrm{d}t \tag{1-4-7}$$

其中 $x(t)$ 是动态系统起始于 $x(t_0)=x_0$，对应于 $u(t)$ 的状态轨线。$x(t_f)$ 是此轨线在终端时刻的值。

1.4.5 最优控制的提法

受控系统的状态方程及给定的初态为

$$x(t) = f(x(t), u(t), t), \ x(t_0) = t_0 \tag{1-4-8}$$

规定的目标集为

$$M\{x(t_f): x(t_f) \in R^n, g_1(x(t_f), t_f) = 0, g_1(x(t_f), t_f) \leqslant 0\} \tag{1-4-9}$$

求一容许控制 $u(t) \in U$，$t \in [t_0, t_f]$，使指标函数

$$J[u(\cdot)] = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)\mathrm{d}t \tag{1-4-10}$$

为最小。

如果问题有解，记为 $u^*(t)$，则称 $u^*(t)$ 为最优控制，相应的曲线 $x^*(t)$ 叫作最优轨线，而性能指标 $J^* = J[u^*(\cdot)]$ 则称为最优性能指标。

1.5 最优控制问题的分类

1.5.1 按状态方程分类

最优控制问题按状态方程分为连续最优化系统和离散最优化系统。

1.5.2 按控制作用实现方法分类

最优控制问题按控制作用实现方法分为开环最优控制系统和闭环最优控制系统。

1.5.3 按性能指标分类

最优控制问题按性能指标分为最小时间控制问题、最少燃料控制问题、线性二次型

性能指标最优控制问题和非线性性能指标最优控制问题。

1.5.4 按终端条件分类

最优控制问题按终端条件分为固定终端最优控制问题、自由终端（可变）最优控制问题、终端时间固定最优控制问题和终端时间可变最优控制问题。

1.5.5 按应用领域分类

最优控制问题按应用领域分为终端控制问题、调节器问题、跟踪问题、伺服机构问题、效果研究问题、最小时间问题和最少燃料问题。

2 数学基础

2.1 向量和矩阵的微分

2.1.1 对数量（时间）的导数

设 X 为 L 维向量，Y 为 M 维向量，Z 为 N 维向量。

2.1.1.1 向量对数量的导数

$$z(t)=[z_1(t),\ z_2(t),\ \cdots,\ z_n(t)]^{\mathrm{T}} \tag{2-1-1}$$

向量对数量的导数

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_n(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2-1-2}$$

2.1.1.2 矩阵对数量的导数

$n\times m$ 矩阵

$$F(t)=\begin{bmatrix}f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1m}(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2m}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nm}(t)\end{bmatrix} \tag{2-1-3}$$

对数量 t 的导数

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\frac{f_{11}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{f_{12}(t)}{\mathrm{d}t} & \vdots & \frac{f_{1m}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \frac{f_{21}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{f_{22}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{f_{2m}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{f_{n1}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{f_{n2}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{f_{nm}(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix} \tag{2-1-4}$$

2.1.2 对向量的导数

2.1.2.1 数量对向量的导数

数量函数 $f(x)$ 对向量 x 的导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2-1-5}$$

向量函数 $z(x)$ 对向量 x 的导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_L}\\ \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x_L}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x_L}\end{bmatrix} \tag{2-1-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}z^T}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x_1}\\ \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_2} & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x_2} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x_L} & \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x_L} & \cdots & \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x_L}\end{bmatrix} \tag{2-1-7}$$

2.1.2.2 两个向量的数积对向量的导数

设 $\lambda(t)$ 和 $f[x(t), u(t), t]$ 都是 L 维向量函数，其数积

$$\lambda^{\mathrm{T}}f=f\lambda^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{L}\lambda_i f_i \tag{2-1-8}$$

数积对向量 x 的导数

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda^{\mathrm{T}}f]=\frac{\partial}{\partial x}\Big[\sum_{i=1}^{L}\lambda_i f_i\Big]=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\lambda_i\\ \sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\lambda_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{L}\frac{\partial f_i}{\partial x_L}\lambda_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_L} & \frac{\partial f_2}{\partial x_L} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial x_L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_L\end{bmatrix}=\frac{\partial f^{\mathrm{T}}}{\partial x}\lambda \tag{2-1-9}$$

2.1.3 复合函数的导数

向量复合函数的导数表示方法如下。

设向量复合函数 $z=z(y, x, t)$，$y=y(x, t)$，$x=x(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x} \tag{2-1-10}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial y}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t} \tag{2-1-11}$$

2.1.4 线性型函数的导数

2.1.4.1 线性型函数对数量的导数

设函数 $z=Ay$，$A=A(t)$，$y=y(t)$，则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dA}{dt}y+A\frac{dy}{dt} \tag{2-1-12}$$

2.1.4.2 线性型函数对向量的导数

线性型函数对向量的导数表示方法如下。

$$\frac{dz}{dy}=A \tag{2-1-13}$$

2.1.5 二次型函数的导数

二次型函数对向量的导数表示方法如下。

设函数 $f=xTAx$，$A=A(t)$，$x=x(t)$，则

$$\frac{df}{dx}=Ax+A^{T}x \tag{2-1-14}$$

若矩阵 A 对称，则

$$\frac{df}{dx}=2Ax \tag{2-1-15}$$

2.2 函数的矩阵对数量的导数极值

2.2.1 一元函数的极值

设连续可微一元函数 $y=f(x)$ 在定义区间 $[a,b]$ 有极值，则函数在 x_0处可导，并在 x_0处存在极值的必要条件是

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=f'(x)\Big|_{x=x_0}=0 \tag{2-2-1}$$

在x_0 处存在极大值⇔ $f'(x)\big|_{x=x_0}=0,\ f''(x)\big|_{x=x_0}>0$ (2-2-2)

极小值⇔ $f'(x)\big|_{x=x_0}=0,\ f''(x)\big|_{x=x_0}<0$ (2-2-3)

若$f''(x)=0$，还要从$f(x)$ 在 x_0附近的变化情况来判断 x_0是极小值、极大值或拐点。

例 2-1 试求 $y=3x-x^3$ 的极值。

解

$$y'=3-3x^2=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=-6x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-6<0, & x=1\\ 6>0, & x=-1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}y_{\min}=2, & x=1\\ y_{\max}=-2, & x=-1\end{cases}$$