国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

ARTIN THEOREM

—CLASSICAL MATHEMATICAL PROBLEMS AND GALOIS THEORY

Artin 定理

—古典数学难题与伽罗瓦理论

徐诚浩 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

ARTIN THEOREM—CLASSICAL MATHEMATICAL PROBLEMS AND GALOIS THEORY

Artin定理

——古典数学难题与伽罗瓦理论

徐诚浩 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书应用伽罗瓦理论清晰透彻地论述了两个古典难题的解决方法,即寻找代数方程的求根公式和限用圆规直尺作图(如三等分任意角、把立方体体积加倍、化圆为正方形,以及作正多边形等),并借此由浅入深地向读者介绍了一些抽象代数的基本知识和研究方法.

本书可作为理工科学生和其他数学爱好者学习抽象代数的普及读物,也可供大中学校数学教师阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

Artin 定理:古典数学难题与伽罗瓦理论 / 徐诚浩著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6686 - 9

Ⅰ. ①A… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①伽罗瓦理论 Ⅳ. ①O153.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 136898 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 13 字数 136 千字
版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6686 - 9
定 价 48.00 元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄. 我真入迷了. 从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生. 如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来. 我这一生,也许会走另一条路. 人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆. 好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书. 抄,总抄得起. 我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份. 人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始. 首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精. 年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益. 简言之,即"始于精于一,返于精于博". 正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,我便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、元曲,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著.我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择.决不要看坏书，对一般书，要学会速读.

读书要多思考.应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题.

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录.对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”.动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

⊙序言

说编辑是个好职业，不仅是因为他(她)能第一时间读到最优秀的作品，还因为他(她)能与各行各业最优秀的人士建立起某种联系.

本书作者徐老先生是上海复旦大学数学系资深教师.按照正常的人生轨迹，笔者只可能当其著作的一名普通读者，但由于职业的关系竟被老先生邀请写序真是诚惶诚恐，但恭敬不如从命.

徐老先生嘱我在序言中简单介绍一下阿廷定理及阿廷其人.因为据作者回忆，大约在1963年他根据阿廷定理的内容和思路写下了学习笔记，后来又据此笔记写了书.但时隔久远，许多资料和记忆都不见了，所以请笔者代为查找.

关于阿廷，由于他是20世纪的重要数学家，所以资料很多，简介如下：

阿廷(Emil Artin，1898—1962.还有一位数学家也叫Artin，不过是M. Artin.他是我国代数学家杨劲根的导师.他是E. Artin的儿子)，德国人.1898年3月3

日生于维也纳.曾在哥廷根大学工作,1926年至1937年在汉堡大学任教授.1937年迁居美国,先后在圣母大学、印第安纳大学和普林斯顿高等研究院工作.1958年又返回汉堡大学.1962年12月20日逝世.

阿廷研究的领域很广,主要有仿射几何、类域论、伽罗瓦理论、Γ-函数、同调代数、模论、环论,以及纽结理论等.尤其在任意数域中的一般互反律方面,做出了重要贡献.1927年他解决了希尔伯特第17问题,1944年发现了关于右理想的极小条件的环,即阿廷环.他的著作很多,但不轻易发表.其中《代数数与代数函数》(1950~1951)、《类域论》(1951)、《几何代数》(1957)等较为著名.他的大部分论文后来被收入《阿廷全集》(1965).

从其简介可以看出他涉猎广泛,对数学的许多领域都有重大贡献.本书仅涉及其在伽罗瓦理论中的贡献.

本书的主题为伽罗瓦理论,它是用群论的方法来研究代数方程的解的理论.在19世纪末以前,解方程一直是代数学的中心问题.早在古巴比伦时代,人们就会解二次方程.在许多情况下,求解的方法就相当于给出解的公式.但是自觉地、系统地研究二次方程的一般解法并得到解的公式,是在公元9世纪的事.三、四次方程的解法直到16世纪上半叶才得到.从此以后,数学家们转向求解五次以上的方程.经过两个多世纪,一些著名的数学家,如欧拉、范德蒙德、拉格朗日、鲁菲尼等,都做了很多工作,但都未取得重大的进展.19世纪

上半叶，阿贝尔受高斯处理二项方程 $x^p-1=0$（p 为素数）的方法的启示，研究五次以上代数方程的求解问题，终于证明了五次以上的方程不能用根式求解。他还发现一类能用根式求解的特殊方程。这类方程现在称为阿贝尔方程。阿贝尔还试图研究出能用根式求解的方程的特性，由于他的早逝而未能完成这项工作。伽罗瓦从 1828 年开始研究代数方程理论（当时他并不了解阿贝尔的工作），到 1832 年，他完全解决了高次方程的求解问题，建立了用根式构造代数方程的根的一般原理，这原理是用方程的根的某种置换群的结构来描述的，后人称之为“伽罗瓦理论”。

伽罗瓦理论的建立，不仅完成了由拉格朗日、鲁菲尼、阿贝尔等人开始的研究，而且为开辟抽象代数学的道路创建了不朽的业绩。伽罗瓦理论在后来施泰尼茨建立的交换域理论中起到了重要作用。

戴德金曾把伽罗瓦的结果解释为关于域的自同构群的对偶定理。随着 20 世纪 20 年代拓扑代数概念的形成，德国数学家克鲁尔推广了戴德金的思想，建立了无限代数扩张的伽罗瓦理论。伽罗瓦理论发展的另一条路线，也是由戴德金开创的，即建立非交换环的伽罗瓦理论。1940 年前后，美国数学家雅各布森开始研究非交换环的伽罗瓦理论，并成功地建立了交换域的一般伽罗瓦理论。

有人说求解多项式方程形成了方程论，经伽罗瓦之手产生群与域的概念，经阿廷之手创造出漂亮的伽罗瓦理论。

诺特、阿廷、范·德·瓦尔登被誉为近世代数的三

大巨人.在三巨头时代,抽象代数的对象简单说就是群、环、域,研究它们的分支,也自然称为群论、环论与域论.

从抽象代数这三大核心分支来看,埃米·诺特的主要工作是在环论(代数理论)方面深入地挖掘,得出若干十分深刻的定理,显示出群、环、域不可分的统一性.而阿廷有所不同,他在群论、环论和域论都开辟了全新的方向,而且在原来的数学对象中发掘出不明显的代数结构.

在抽象代数中以阿廷命名的定理很多,本书虽然只介绍了一个却十分重要.它也被称为阿廷引理:

设 E 是任一域,G 是 $\mathrm{Aut}\ E$ 的任一有限子群,$F=\mathrm{Inv}\ G$,则

$$[E:F]\leqslant|G|$$

说到数学中的引理,其实它的重要性一点不比定理逊色.有两个著名例子,一个例子是阿廷在德国培养的一名博士生佐恩.佐恩在数学界名气很大.而他的名气主要来自现在在代数学中无所不在的佐恩引理.因为它和选择公理等价.另外一个例子是越南著名数学家吴宝珠.他因为证明了代数几何中的一个引理而获得了菲尔兹奖.

其他若干冠以阿廷的定理由于过于专门化本书没有一一涉及,如 Wedderburn-Artin 定理等.对于中学师生来说,要了解阿廷的工作是不易的.最近,北京大学的博士生韩京俊先生提供了一个很好的例子:

已知对于任意实数 x,y,z,三元实系数多项式

$$f(x,y,z)=f_2(x,y)z^2+2f_3(x,y)z+f_4(x,y)\geqslant 0$$

其中,$f_k(x,y)$是 k 次齐次多项式($k=2,3,4$).若存在实系数多项式 $r(x,y)$ 满足

$$f_2(x,y)f_4(x,y)-f_3^2(x,y)=(r(x,y))^2$$

证明:存在两个实系数多项式 $g(x,y,z)$ 和 $h(x,y,z)$,满足

$$f(x,y,z)=g^2(x,y,z)+h^2(x,y,z)$$

这是韩京俊博士提供给2017年中国国家队选拔考试的一道试题.

证 若 $0\neq f_2=l^2$ 是一个一次多项式的平方,则由 $l^2f_4\geqslant f_3^2$,得 $l\mid f_3$,$l\mid r$. 设 $f_3=lt$,$r=ls$,则 $f_4^2-t^2=s^2$. 此时 $f=(lz+t)^2+s^2$ 满足题意.

若 f_2 是严格正的,则 f_2 不可约,且能写成两个一次多项式的平方和,设为 $f_2=l_1^2+l_2^2$. 注意到

$$l_1^2+l_2^2\mid(f_3^2+r^2)l_1^2-f_3^2(l_1^2+l_2^2)$$

即

$$l_1^2+l_2^2\mid(l_1r+l_2f_3)(l_1r-l_2f_3)$$

f_2 为不可约多项式,因此必有 $f_2\mid l_1r+l_2f_3$ 或 $f_2\mid l_1r-l_2f_3$,即式(*)中必有一组使得 h_2 为多项式

$$\begin{cases}h_1=\dfrac{f_3l_1-rl_2}{f_2}\\ h_2=\dfrac{rl_1+f_3l_2}{f_2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}h_1=\dfrac{f_3l_1+rl_2}{f_2}\\ h_2=\dfrac{-rl_1+f_3l_2}{f_2}\end{cases}\qquad(*)$$

在这两种情形下均有

$$h_1^2+h_2^2=\frac{(l_1^2+l_2^2)(f_3^2+r^2)}{f_2^2}=\frac{f_3^2+r^2}{f_2}=f_4$$

为多项式,故 h_1 也为多项式. 在这两种情形下我们还

有

$$l_1h_1+l_2h_2=f_3$$

故存在多项式 h_1,h_2 使得

$$f=(l_1z+h_1)^2+(l_2z+h_2)^2$$

综上,结论得证.

韩博士对此解答做了一个评注. 从证明中可以看出,本题的方法是构造性的. 1888 年,希尔伯特证明了三元四次齐次非负多项式 f 能写为三个实系数多项式的平方和(D. Hilbert. Über die darstellung definiter formen als summe von formenquadraten. Mathematische Annalen, 1888, 32(3):342 - 350.),这一结论至今还没有构造性的证明,事实上,希尔伯特证明了当且仅当 $n\leqslant 2$ 且 d 为偶数,或 $d=2$,或 $(n,d)=(3,4)$ 时,实系数 n 元 d 次非负齐次多项式都能表示成多项式的平方和. 本题与希尔伯特定理密切相关,用本题的思路可以给出希尔伯特定理的一个特殊情形的初等构造性证明:三元四次齐次非负多项式 f,若 f 有实零点,则 f 能写为三个实系数多项式的平方和. 1900 年,希尔伯特在巴黎召开的第二届世界数学家大会上,做了"Mathematical Problems"(希尔伯特问题)的著名演讲,提出了 23 个数学问题,其中第 17 个问题是关于平方和的,即实系数半正定多项式能否表示为若干个实系数有理函数的平方和? 1927 年,阿廷在建立了实域论的基础上解决了希尔伯特第 17 问题,他证明了实系数半正定多项式一定可以表示为若干个实系数有理函数的平方和. 然而阿廷的证明不是构造性的,至今人们也没有得

到希尔伯特第17问题完全构造性的证明.

最后有三点读后感与读者交流.

第一点,尽管本书是一本普及读物,但对大多数读者来说还是很难读懂的.但开卷有益,用梁文道的话说:

我们每个人读书的时候几乎都有这样的经历,你会发现,有些书是读不懂的,很难接近、很难进入.我觉得这是真正意义上、严格意义上的阅读.

如果一个人一辈子只看他看得懂的书,那表示他其实没看过书.

你想想看,我们从小学习认字的时候,看第一本书的时候都是困难的,我们都是一步一步爬过来的.为什么十几岁之后,我们突然之间就不需要困难了,就只看一些我们能看得懂的东西.

看一些你能看懂的东西,等于是重温一遍你已经知道的东西,这种做法很傻的.

第二点,本书包含了若干世界数学难题的介绍.这对青少年读者是十分必要的.

在一篇介绍刚刚去世的伊朗女数学家米尔扎哈尼的文章中这样写道:年仅40岁的玛丽亚姆·米尔扎哈尼(Maryam Mirzakhani)逝世时,新闻报道说她是一个天才.她是具有“数学诺贝尔”之称的菲尔兹奖的唯一女性获得者,也是从31岁就开始在斯坦福大学任教的年轻教授.这个出生在伊朗的学者自从少年时期在奥林匹克数学竞赛中崭露头角之后,在数学界里便好运不停.

我们很容易会觉得像米尔扎哈尼这样特别的人,

一定从小就天资过人. 这样的人五岁就开始阅读哈利波特并不久后成为门萨会员(门萨是一个以智商为入会标准的智力俱乐部),还不到十岁就参加了数学 GCSE 考试,甚至像鲁斯·苏伦斯(uth Lawrence)一样在同龄人还在上小学的时候就被牛津大学录取.

然而,当我们更深入地去了解时,就会发现事实和我们想的并不一样. 米尔扎哈尼出身于德黑兰的一个中产家庭,父亲是一位工程师,家里有三个小孩. 她童年生活中唯一不寻常的事情就是遭遇了两伊战争. 在她年幼时这场战争使家里的生活变得举步维艰,而两伊战争也让她的童年生活变得十分艰难. 不过幸运的是这场战争在她上中学的时候终于结束了.

米尔扎哈尼确实读了一所不错的女子中学,但数学并不是她的兴趣所在,她更喜欢阅读. 她爱看小说,所有她接触得到的书籍,她都会试着读一读. 她经常在放学路上和朋友一起去书店闲逛,购买自己心仪的作品.

然而她的数学成绩在中学前两年却很糟糕,直到某天她的哥哥在跟她讨论学过的知识的时候,跟她分享了杂志上著名的数学难题,她才因而迷上了数学,从此开启了数学史上的个人篇章.

第三点,对于中老年读者来说,读本书也是有益的,既然徐老先生都能写,为什么我们不能读呢? 除了功利目的,读书还有一个更重要的功能. 正如梁文道先生所说:

有人说读书防老,我觉得说得很对. 读书真的可以防老. 什么意思呢? 老人最可怕的就是他没有什么机