SHI DAI YUN TU

理工社®

【张宇数学教育系列丛书】 2019

张宇考研数学

题源探析经典1000题

（习题分册·数学一）

主编○张宇

扫码 查真伪

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

时代云图 SHI DAI YUN TU
理工社

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学题源探析经典1000题

（习题分册·数学一）

主编〇张宇

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 习题分册. 数学一 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2018.3(2018.4重印)

ISBN 978－7－5682－5365－9

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第040435号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印　　张 / 7.5
字　　数 / 187千字
版　　次 / 2018年3月第1版 2018年4月第2次印刷
定　　价 / 66.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 黄拾三
责任印制 / 边心超

Foreword 前言

按照考研数学历年的命题规律和风格，结合最新的信息，考生在2019年考研复习备考中应做到以下四点：一是将考研基础知识和常规题目作为复习主体，适当进行综合性难题的复习；二是加强计算能力的培养，使自己具备较强的处理数学计算过程的本领，要知道，绝大多数数学题都是要通过准确的计算才能得到正确答案的；三是要加强应用能力的培养，多做用数学基础知识解决实际问题的题目；四是要全面复习，将考研大纲中的所有知识作为复习范围，不要有所偏颇. 以上四点也将是2019考研命题的趋势，请各位考生重视.

据此，2019版《张宇考研数学题源探析经典1000题（数学一）》作了重大的修订，重新命制和改编了160道题目，换题率达到13.69%，这是史无前例的，凝结了我和我的编者老师们的最新研究成果，唯一的目的，是希望考生做透此书后，在2019考研中考出理想成绩.

祝各位复习顺利，考研成功！

张宇

2018年1月31日于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列（高等数学（上、下册）、线性代数、概率论与数理统计，共4册）	体现了本科教学要求与考研要求的差异，列出了章节学习的知识体系，给出了所有课后习题的全面解析，精选了不同数量的经典例题	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列（高等数学（微积分）（上、下册）、线性代数、概率论与数理统计，共4册）	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据，以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考，设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题，命题具有通用性	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题组组长参与	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案。原命题人参与	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题（数学一、数学二、数学三）	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了1 000道左右高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，由易到难，利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解。原命题组组长参与	基础阶段＋强化阶段
张宇考研数学真题大全解（数学一、数学二、数学三）	囊括考研数学命题以来所有考研真题，给读者提供原汁原味的实考题，有效掌握命题方向及解题思路。原命题组组长参与	强化阶段
张宇考研数学闭关修炼一百题	原为暑期集训和国庆集训辅导过程中的内部资料。结合最新命题趋势编制的题目，题量少，但题题经典且题目综合性强。原命题组组长参与	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷（数学一、数学二、数学三）	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷（上）。实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷（数学一、数学二、数学三）	考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷（下）。实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频。原命题组组长与命题成员参与	冲刺阶段

注：主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面，市面上其他任何同名图书均非张宇所写，请考生注意鉴别。出版日期见封四。

以上书籍新浪微博答疑地址：@张宇考研图书交流小组 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博：@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

01 高等数学

高等数学是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学一试卷中分值为82分，约占56%。

第 1 章　函数、极限、连续

A组

一、选择题(在目前的考研中,选择题 4 分 / 题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

1.1. 以下三个命题:

① 若数列$\{u_n\}$收敛于A,则其任意子数列$\{u_{n_i}\}$必定收敛于A;

② 若单调数列$\{x_n\}$的某一子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于A,则该数列必定收敛于A;

③ 若数列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n+1}\}$都收敛于A,则数列$\{x_n\}$必定收敛于A.

正确的个数为　(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

1.2. 设$f(x)=u(x)+v(x)$,$g(x)=u(x)-v(x)$,并设$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$都不存在,下列论断正确的是　(　　)

(A) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在

(B) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在

(C) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在

(D) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在

1.3. 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$,则当$n\to\infty$时,$\{y_n\}$必为无穷小的充分条件是　(　　)

(A)$\{x_n\}$是无穷小　　(B)$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小

(C)$\{x_n\}$有界　　(D)$\{x_n\}$单调递减

1.4. 设$f(x)$是偶函数,$\varphi(x)$是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中是奇函数的是　(　　)

(A)$f[\varphi(x)]$　　(B)$f[f(x)]$　　(C)$\varphi[f(x)]$　　(D)$\varphi[\varphi(x)]$

1.5. 设$f(x)=\sin(\cos x)$,$\varphi(x)=\cos(\sin x)$,则在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内　(　　)

(A)$f(x)$是增函数,$\varphi(x)$是减函数　　(B)$f(x)$,$\varphi(x)$都是减函数

(C)$f(x)$是减函数,$\varphi(x)$是增函数　　(D)$f(x)$,$\varphi(x)$都是增函数

1.6. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则$f(-x)=$　(　　)

(A)$\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

1.7. 两个无穷小比较的结果是　(　　)

(A) 同阶　　(B) 高阶　　(C) 低阶　　(D) 不确定

1.8. 函数 $f(x)=x\sin x$ （　　）

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　(D) 当 $x\to\infty$ 时极限存在

1.9. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=A\neq 0$ 的充要条件是 （　　）

(A) $\alpha>1$　　(B) $\alpha\neq 1$　　(C) $\alpha>0$　　(D) 与 α 无关

1.10. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，则下述结论正确的是 （　　）

(A) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小

(B) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 不是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小

(C) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必是无穷大

(D) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.11. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且在点 x_0 处间断，则下列函数在点 x_0 处必定间断的是 （　　）

(A) $f(x)\sin x$　　(B) $f(x)+\sin x$　　(C) $f^2(x)$　　(D) $|f(x)|$

1.12. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内间断点的类型只能是 （　　）

(A) 第一类间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　　(D) 结论不确定

二、填空题（在目前的考研中，填空题 4 分 / 题.）

1.13. 设 $f(x)$ 是奇函数，且对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，又 $f(1)=a$，a 为常数，n 为整数，则 $f(n)=$________.

1.14. 给出以下 5 个函数：100^x，$\log_{10}x^{100}$，e^{10x}，$x^{10^{10}}$，$e^{\frac{1}{100}x^2}$，则对充分大的一切 x，其中最大的是________.

1.15. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$________.

1.16. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

1.17. 若当 $x\to 0$ 时，有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\dfrac{1}{10\,000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)$，则 $a=$________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

1.18. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.19. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$；(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$；(14) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}$；

(15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$；(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$；

(17) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$；(18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$；(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$；

(21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$；(22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

1.20. 设 $f(x)=x^2+ax+b$,证明:$|f(1)|$,$|f(3)|$,$|f(5)|$中至少有一个不小于2.

1.21. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

1.22. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.23. 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}$.

1.24. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

1.25. 判断“分段函数一定不是初等函数”是否正确,若正确,试证之;若不正确,试说明它们之间的关系.

1.26. 试讨论函数 $g(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \mathrm{e}^x+\beta, & x\leqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

1.27. 设函数 $f(x)$ 连续可导,且 $f(0)=0$,$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,\mathrm{d}t$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.28. 设$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x<0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点的类型,如是可去间断点,则补充或改变定义使它连续.

1.29. 设 $f(x;t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$ $((x-1)(t-1)>0,x\neq t)$,函数 $f(x)$ 由下列表达式确定:

$$f(x)=\lim_{t\to x}f(x;t).$$

求出 $f(x)$ 的连续区间和间断点,并研究 $f(x)$ 在间断点处的左右极限.

1.30. 设 $\alpha\geqslant5$ 且为常数,k 为何值时极限

$$I=\lim_{x\to+\infty}[(x^{\alpha}+8x^4+2)^k-x]$$

存在,并求此极限值.

B组

一、选择题（在目前的考研中，选择题 4 分 / 题，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

1.1. 设当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$（$\beta(x) \neq 0$）都是无穷小，则当 $x \to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是 （　　）

(A) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta^2(x)]$　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

1.2. 设当 $x \to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 （　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 与 x^m 为同阶无穷小，又设 $x \to 0$ 时 $F(x)=\int_0^{x^n} f(t)\,dt$ 与 x^k 为同阶无穷小，其中 m 与 n 为正整数，则 $k=$ （　　）

(A) $mn+n$　　(B) $2n+m$　　(C) $m+n$　　(D) $mn+n-1$

1.4. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{\sin \pi x}{(x^2-1)|x|}$ 无界的一个区间是 （　　）

(A) $(-\infty,-1)$　　(B) $(-1,0)$

(C) $(0,1)$　　(D) $(1,+\infty)$

1.5. 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，则 （　　）

(A) $\lambda<0,k<0$　　(B) $\lambda<0,k>0$

(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

二、填空题（在目前的考研中，填空题 4 分 / 题.）

1.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}}=$ ________.

1.7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^\alpha}=\beta>0$，则 $\alpha=$ ________，$\beta=$ ________.

1.8. 当 $x\to\pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

1.9. 若 $f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x), & x>0, \\ 2x+a, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$ ________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

1.10. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leqslant 0, \\ \ln x, & x>0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 2e^x-1, & x\leqslant 0, \\ x^2-1, & x>0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

1.12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.14. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且$a_i\neq 1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant 2$.

1.15. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A(a>0,a\neq 1)$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

1.16. 已知$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，且$f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求$f(x)$.

1.17. 设$f(x)$是三次多项式，且有$\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq 0)$，求$\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

1.18. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=10$，试求$\alpha,\beta$的值.

1.19. 设函数$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数$A,B$，使得当$x\to 0^+$时，恒有$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求常数$A,B$.

1.20. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.21. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

1.22. 数列$\{x_n\}$通项$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.23. 设$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并求其极限值.

1.24. 设$x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.25. 已知数列$\{x_n\}$的通项$x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$，$S_n$为其前$n$项和.

(1) 证明$S_{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$；

(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right]$.

1.26. 设$a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$，$n=1,2,\cdots$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.27. 求函数$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$的间断点，并判断它们的类型.

1.28. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+e^{nx}}$，求$f(x)$的间断点并判定其类型.

1.29. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是$[a,b]$上一个点列，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

1.30. 设$f(x)$对一切x_1,x_2满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且$f(x)$在$x=0$处连续. 证明：函数$f(x)$在任意点x_0处连续.

C组

一、选择题（在目前的考研中，选择题 4 分 / 题，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

1.1. 下述命题：

① 设 $f(x)$ 在任意的闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

② 设 $f(x)$ 在任意的闭区间 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；

③ 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为正值的连续函数，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是正值的连续函数；

④ 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为正值的有界函数，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是正值的有界函数.

其中正确的个数为 （　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

二、填空题（在目前的考研中，填空题 4 分 / 题.）

1.2. 设 $x_1 = r \in (0,1)$，$x_{n+1} = x_n - x_n^2 (n = 1,2,3,\cdots)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ ________；$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_{k+1}^2 =$ ________.

1.3. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{|x+1|(x^2-x)} \sin\left(\dfrac{|x-1|}{x+2}\pi\right)$ 的可去间断点为________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

1.4. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)}{x - \sin x}$.