集值极大极小定理与集值博弈问题

张宇 编著

科学出版社

集值极大极小定理与集值博弈问题

张　宇　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书主要分为两部分内容：集值极大极小定理和集值博弈问题. 本书分别在向量优化与集优化两种不同准则下，讨论集值极大极小定理，主要内容有集值极大极小定理与锥鞍点、向量集值极大极小问题、向量集值 Ky Fan 极大极小定理、非凸的集值极大极小定理与集值均衡问题、几类特殊的集值极大极小定理与集优化的集值极大极小定理. 集值博弈问题主要为集值鞍点问题与集值 Nash 博弈问题.

本书适合集值优化与多目标优化方向的研究生、研究人员参考，也可供相关专业方向的老师学生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

集值极大极小定理与集值博弈问题/张宇编著. —北京：科学出版社，2018.5

ISBN 978-7-03-055455-0

Ⅰ.①集… Ⅱ.①张… Ⅲ.①集值映象 Ⅳ.①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 283753 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴

责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 5 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2018 年 5 月第一次印刷 印张：8

字数：161 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

集值映射是 20 世纪 40 年代才发展起来的一个现代数学分支, 作为建立非线性问题的数学模型、解决非线性问题的数学理论和有力工具, 它已经成为非线性分析的重要组成部分. 除此之外, 集值映射在控制论、数理经济学、博弈论、非线性最优化、非光滑分析与变分分析等众多领域都有广泛的应用. 集值映射的思想和方法已经渗透到社会科学和自然科学中很多领域的研究中.

集值优化问题有两个准则: 向量优化准则和集优化准则. 在很多实际情况下, 人们判断决策好与坏的标准指标是多个的、甚至是无穷多个或集合值的. 但是, 此类优化问题中的指标 (或者指标集合) 常常是相互矛盾或重合的, 所以如何协调这些问题并兼顾每一个指标 (或者指标集合), 最终得到最佳方案, 是人们在实际生活中经常遇到的问题, 向量优化问题就是来考虑并解决这些问题的. 对于这类优化问题, 其最优解的概念和数值优化问题中解的概念有着本质的不同. 更多地, 它是在各个指标 (或者指标集合) 之间找到一种平衡, 以兼顾每一个指标 (或者指标集合), 从而在决策者的偏好下, 找到最佳方案. 向量优化问题的模型在现实生活和科学研究中无处不在, 是更加贴近实际情况的一种模型. 因此向量优化的研究在国际上引起了广大学者的极大关注和重视. 集优化准则首次以英文文献出现是在 1999 年, 它是在集合序下建立的一种优化准则. 集优化准则和向量优化准则有着很大的差异. 向量优化是在点序关系下 (一般情况下是一种偏序) 得到的一种优化准则, 而集优化是在集合序下 (一般情况下都不是偏序) 得到的一种优化准则. 造成这种巨大差异的主要原因是集合序一般不满足反对称性. 两种优化准则在不同情况下, 有着各自不同的意义. 例如: 在投掷铅球比赛中, 一般都是每人投掷三次, 然后取成绩最好的那次作为该人的最好成绩. 这种准则就适合向量优化准则, 而在足球比赛中, 一支球队想要获得冠军, 就要整体实力上比其他球队强, 这种准则就适合集优化准则. 集优化准则自从出现后, 就在国际上引起了大量学者的极大关注和重视.

作为运筹学的一个重要分支, 极大极小问题在许多领域都有着非常重要的应用. 比如: 博弈论、对偶理论、变分不等式问题、不动点理论等等. 随着理论和应用问题的不断发展, 单值映射的极大极小理论已经无法满足人们的需求, 人们越来越关注集值映射的极大极小理论. 此外, 作为极大极小问题的重要应用之一, 博弈论已经被广泛应用到现实生活的各行各业. 传统博弈问题的支付函数是一个数或者一组数 (一个向量), 然而, 在现实生活中, 受一些不确定因素的影响, 要想精确地计算出这个数值或者这组数值是非常困难的, 一般情况下, 仅能给出这个精确值或者

这组精确值一个大概的范围. 这时, 相应博弈问题的支付函数就变为一个集值映射. 因此, 讨论集值极大极小理论和集值博弈问题有着非常重要的意义.

本书在向量优化与集优化两种不同准则下, 讨论集值极大极小问题, 主要内容有集值极大极小定理和集值 Ky Fan 极大极小定理, 分别在各种不同的集值映射锥凹凸概念下, 得到了各种不同类型的极大极小不等式. 集值博弈问题包括集值鞍点问题和集值 Nash 博弈问题, 分别讨论了两类问题解的存在性与适定性.

第 1 章, 主要介绍了本书后面各章节频繁使用的一些基本符号、概念及其一些基本的常用性质. 第 2 章, 在锥真拟凸与锥拟凸假设下, 利用不动点定理讨论了一个实数集值映射的极大极小定理和锥鞍点定理, 得到了一个新的向量集值的极大极小定理. 第 3 章, 应用紧性假设和有限交性质, 得到了向量值集值映射的两类极大极小不等式, 同时, 得到了向量值集值映射的新的包含假设. 第 4 章, 应用 Ky Fan 引理、有限交性质、Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理、Ky Fan 截口定理和一类非线性标量化函数, 得到了一些广义的向量值集值映射的 Ky Fan 极大极小不等式. 第 5 章, 在锥似凸似凹条件下, 利用凸集分离定理讨论了实集值映射的极大极小定理与锥鞍点定理, 并将其结果应用到了集平衡问题中, 得到了新的集平衡问题解的存在性结果. 第 6 章, 讨论了一个向量值映射和一个固定集合之和的特殊集值映射的极大极小定理, 同时, 在点序关系下引入了一致同阶集值映射的极大极小定理和锥松鞍点定理. 第 7 章, 在集合序下, 引入了一致同阶集值映射的概念, 讨论了其极大极小定理和鞍点定理, 同时描述了向量准则与集准则两种不同准则下的集值极大极小定理的联系与差异. 第 8 章, 引入了集值 Nash 博弈问题模型, 分别在解集是单点与集值情景下讨论了模型的适定性问题.

最后, 向帮助过我的同事和朋友致以最衷心的感谢和深深的敬意! 无论是读书期间还是工作以来, 各位始终对我工作和生活给予了热情的帮助和指导, 激励我不断努力前行! 因学识有限, 书中难免有疏漏和不妥之处, 热忱欢迎各位读者批评指正!

张　宇

2016 年 10 月于昆明

目　　录

前言
第 1 章　预备知识 ········ 1
1.1　集合的有效点集和弱有效点集 ········ 1
1.2　集值映射的上下半连续性、拟下半连续性 ········ 1
1.3　集值映射的锥松鞍点和锥鞍点 ········ 3
1.4　不动点定理 ········ 3
第 2 章　集值极大极小定理与锥鞍点 ········ 5
2.1　预备知识 ········ 6
2.2　标量值集值映射的极大极小定理和锥鞍点定理 ········ 7
2.3　向量值集值映射的极大极小定理和锥鞍点定理 ········ 11
2.4　本章小结 ········ 14
第 3 章　向量集值极大极小问题 ········ 16
3.1　预备知识 ········ 17
3.2　向量集值极大极小定理 ········ 18
3.3　本章小结 ········ 30
第 4 章　向量集值 Ky Fan 极大极小定理 ········ 31
4.1　预备知识 ········ 31
4.2　向量集值 Ky Fan 极大极小不等式与向量化 ········ 34
4.3　向量值集值映射的 Ky Fan 极大极小不等式与标量化 ········ 50
4.4　本章小结 ········ 62
第 5 章　非凸的集值极大极小定理与集值均衡问题 ········ 63
5.1　预备知识 ········ 63
5.2　锥似凸似凹条件下的标量值集值极大极小定理 ········ 65
5.3　广义向量均衡问题解的存在性 ········ 69
5.4　锥似凸似凹条件下的向量集值极大极小定理 ········ 72
5.5　本章小结 ········ 75
第 6 章　几类特殊的集值极大极小定理 ········ 76
6.1　$F(x,y) = f(x,y) + M$ 的极大极小定理 ········ 76
6.2　一致同阶集值的极大极小定理 ········ 86
6.3　本章小结 ········ 96

第 7 章 集优化的集值极大极小定理 ······ 97
7.1 集优化的基本概念 ······ 98
7.2 集优化准则下的一致同阶集值映射的极大极小定理 ······ 101
7.3 本章小结 ······ 111
第 8 章 集值 Nash 型博弈问题的适定性 ······ 112
8.1 基本概念 ······ 112
8.2 (SVNGP) 适定性 ······ 113
8.3 本章小结 ······ 118
参考文献 ······ 119

第1章 预备知识

本书主要介绍后续章节中将要频繁使用的一些基本概念和性质, 包括集合的有效点集和弱有效点集, 集值映射的上下半连续性、拟下半连续性, 集值映射的锥鞍点和锥松鞍点及若干不动点定理等等.

在本书中, 如果没有特别说明, 设 X, Y, V 为实的 Hausdorff 拓扑向量空间; 设 $S \subset V$ 为一个尖闭凸锥并且它的拓扑内部 $\mathrm{int}S$ 非空. 设 $x, y \in V$, 空间 V 中的点序关系定义如下:

$$x \leqslant_S y \Leftrightarrow x \in y - S.$$

1.1 集合的有效点集和弱有效点集

本节主要介绍集合的有效点集和弱有效点集的概念和性质.

定义 1.1.1[1] 设 $A \subset V$ 为一个非空子集.

(i) 如果点 z 满足 $A \bigcap (z - S) = \{z\}$, 则称点 $z \in A$ 为集合 A 的极小点. 集合 A 所有极小点构成的集合记为 $\mathrm{Min}A$.

(ii) 如果点 z 满足 $A \bigcap (z - \mathrm{int}S) = \varnothing$, 则称点 $z \in A$ 为集合 A 的弱极小点. 集合 A 所有弱极小点构成的集合记为 $\mathrm{Min}_w A$.

(iii) 如果点 z 满足 $A \bigcap (z + S) = \{z\}$, 则称点 $z \in A$ 为集合 A 的极大点. 集合 A 所有极大点构成的集合记为 $\mathrm{Max}A$.

(iv) 如果点 z 满足 $A \bigcap (z + \mathrm{int}S) = \varnothing$, 则称点 $z \in A$ 为集合 A 的弱极大点. 集合 A 所有弱极大点构成的集合记为 $\mathrm{Max}_w A$.

从上述定义容易得到, $\mathrm{Min}A \subset \mathrm{Min}_w A$ 和 $\mathrm{Max}A \subset \mathrm{Max}_w A$.

引理 1.1.1[2] 设 $A \subset V$ 为一个非空紧子集, 则有

(i) $\mathrm{Min}A \neq \varnothing, A \subset \mathrm{Min}A + S, A \subset \mathrm{Min}_w A + \mathrm{int}S \bigcup \{0_V\}$;

(ii) $\mathrm{Max}A \neq \varnothing, A \subset \mathrm{Max}A - S, A \subset \mathrm{Max}_w A - \mathrm{int}S \bigcup \{0_V\}$.

关于集合的有效点集和弱有效点集的更多性质可参考文献 [1] 和 [3].

1.2 集值映射的上下半连续性、拟下半连续性

本节主要介绍集值映射的上下半连续性、拟下半连续性及一些相关性质, 以便本书后续部分使用.

定义 1.2.1[1]　设 $F: X \to 2^V$ 为一个非空值的集值映射.

(i) 如果对任意的 $F(x_0)$ 的邻域 $N(F(x_0))$, 存在一个 x_0 的邻域 $N(x_0)$ 使得

$$F(x) \subset N(F(x_0)), \quad \forall x \in N(x_0),$$

那么称 F 在 $x_0 \in X_0$ 处是上半连续的.

(ii) 如果对任意的 V 中的邻域 N 满足 $F(x_0) \bigcap N \neq \varnothing$, 存在一个 x_0 的邻域 $N(x_0)$ 使得

$$F(x) \bigcap N \neq \varnothing, \quad \forall x \in N(x_0),$$

那么称 F 在 $x_0 \in X$ 处是下半连续的.

(iii) 如果 F 在 x_0 处既是上半连续也是下半连续的, 那么称 F 在 $x_0 \in X$ 处是连续的. 如果对一个 $x \in X$, F 是连续的, 那么 F 在 X 上是连续的.

引理 1.2.1[1]　设 $F: X \to 2^V$ 为一个非空值的集值映射.

(i) 带有紧值的集值映射 F 在 $x_0 \in X$ 是上半连续的当且仅当对任意的网 $\{x_\alpha\} \subset X$ 满足 $x_\alpha \to x_0$ 和对任意的 $y_\alpha \in F(x_\alpha)$, 存在 $y_0 \in F(x_0)$ 以及一个 $\{y_\alpha\}$ 的子网 $\{y_\beta\}$ 使得 $y_\beta \to y_0$.

(ii) 集值映射 F 在 $x_0 \in X$ 是下半连续的当且仅当对任意的网 $\{x_\alpha\} \subset X$ 满足 $x_\alpha \to x_0$ 和对任意的 $y_0 \in F(x_0)$, 存在 $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ 使得 $y_\alpha \to y_0$.

引理 1.2.2[4]　设 $F: X \to 2^V$ 为一个有非空值的集值映射.

(i) 如果对 V 中任意闭子集 G, 集合

$$F^{-1}(G) = \{x \in X \,|F(x) \bigcap G \neq \varnothing\}$$

是闭的, 则 F 在 X 上是上半连续的.

(ii) 如果对 V 中任意闭子集 G, 集合

$$F^{+1}(G) = \{x \in X \,|F(x) \subset G\}$$

是闭的, 则 F 在 X 上是下半连续的.

引理 1.2.3[5]　设 X_0 和 Y_0 分别为 X 和 Y 中的两个非空紧子集. 如果 $F: X_0 \times Y_0 \to 2^V$ 是一个连续的集值映射并且对每个 $(x, y) \in X_0 \times Y_0$, $F(x, y)$ 是一个非空紧集, 则有 $\varGamma(x) = \mathrm{Min}_w F(x, Y_0), \varPsi(x) = \mathrm{Max}_w F(x, Y_0), \varPhi(y) = \mathrm{Max}_w F(X_0, y)$ 和 $\varLambda(y) = \mathrm{Min}_w F(X_0, y)$ 都是上半连续并且是紧的.

引理 1.2.4[1]　设 X_0 为 X 中的一个非空子集, $F: X_0 \to 2^V$ 为一个有非空值的集值映射. 如果 X_0 是一个紧的且 F 是上半连续和紧值的, 则有 $F(X_0) = \bigcup_{x \in X_0} F(x)$ 是紧的.

定义 1.2.2[6] 设 $F: X \to 2^V$ 为一个集值映射. 如果对任意的 $b \in V$ 和 $F(x_0) \not\subset b - S$, 存在一个 x_0 的邻域 $N(x_0)$ 使得

$$F(x) \not\subset b - S, \quad \forall x \in N(x_0),$$

那么称 F 在 $x_0 \in X$ 处是拟下半连续的. 如果对一个 $x \in X$, F 是拟下半连续的, 那么 F 在 X 上是拟下半连续的.

1.3 集值映射的锥松鞍点和锥鞍点

本节主要介绍集值映射的锥松鞍点和锥鞍点的定义, 以便本书后续部分使用.

定义 1.3.1[3] 设 X_0 和 Y_0 分别为 X 和 Y 中的两个非空子集, $F: X_0 \times Y_0 \to 2^V$ 为一个非空值的集值映射.

(i) 如果 $(x, y) \in X_0 \times Y_0$ 满足

$$F(x,y)\bigcap \mathrm{Min}\bigcup_{y\in Y_0} F(x,y) \neq \varnothing \quad 且 \quad F(x,y)\bigcap \mathrm{Max}\bigcup_{x\in X_0} F(x,y) \neq \varnothing,$$

则称 (x, y) 为 F 在 $X_0 \times Y_0$ 上的 S-松鞍点;

(ii) 如果 $(x, y) \in X_0 \times Y_0$ 满足

$$F(x,y)\bigcap \mathrm{Min}_w\bigcup_{y\in Y_0} F(x,y)\bigcap \mathrm{Max}_w\bigcup_{x\in X_0} F(x,y) \neq \varnothing,$$

则称 (x, y) 为 F 在 $X_0 \times Y_0$ 上的 S-鞍点.

从上述定义容易得到, S-鞍点一定是 S-松鞍点. 反之, 则不然.

1.4 不动点定理

本节主要介绍若干不动点定理, 以便本书后续部分使用.

定理 1.4.1[7] (Fan-Browder 不动点定理) 设 X_0 为 X 中的一个非空紧凸子集, $T: X_0 \to 2^{X_0}$ 为一个集值映射且满足

(i) 对每一个 $x \in X_0$, $T(x)$ 是一个非空的凸集;

(ii) 对每一个 $x \in X_0$, $T^{-1}(x)$ 是一个开集.

则 T 有不动点.

定理 1.4.2[8](Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理) 设 X 为一个实的局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, X_0 为 X 中的一个非空紧凸子集. 如果 $T: X_0 \to 2^{X_0}$ 是一个上半连续的集值映射并且对每一个 $x \in X_0$, $T(x)$ 是一个非空闭凸集, 则 T 有不动点.

定理 1.4.3[9] (Ky Fan 截口定理)　设 X_0 为 X 中的一个非空紧凸子集, A 为 $X_0 \times X_0$ 中的一个子集并且满足

(i) 对每一个 $y \in X_0$, 集合 $\{x \in X_0 : (x,y) \in A\}$ 是 X_0 中的闭集;

(ii) 对每一个 $x \in X_0$, 集合 $\{y \in X_0 : (x,y) \notin A\}$ 是凸的或空集,

更多地, 如果对每一个 $x \in X_0$, $(x,x) \in A$, 则存在 $x \in X_0$ 使得 $\{x_0\} \times X_0 \subset A$.

定义 1.4.1[9]　设 $K \subset X$ 为一个非空子集, $K_0 \subset K$ 为一个非空子集. 如果 $T : K_0 \to 2^K$ 满足对每一个 K_0 中的有限子集 A 有 $\mathrm{co}A \subset \bigcup_{x \in A} T(x)$, 则称 T 是一个 Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz(KKM) 映射.

定理 1.4.4[9](Ky Fan 引理)　设 $K \subset X$ 为一个非空子集. 如果 $T : K_0 \to 2^X$ 是一个有闭值的 KKM 映射并且存在 $x_0 \in K$ 使得 $T(x_0)$ 是紧的, 则 $\bigcap_{x \in K} T(x) \neq \varnothing$.

第 2 章 集值极大极小定理与锥鞍点

随着应用与理论问题的不断发展, 人们发现单值极大极小理论已无法满足需求. 这就激励着人们研究集值极大极小问题. Luc 和 Vargas[3] 首次在向量优化的意义下, 引入了向量值集值映射的锥鞍点和锥松鞍点的概念, 并利用一个不动点定理, 在紧性假设、锥拟凸凹假设和连续性假设下, 获得了一个广义向量值集值映射的锥松鞍点的存在性定理, 但是, 对于集值映射的锥鞍点, 他们没有得到相应的存在性定理. 通过观察, 容易看到集值映射的锥松鞍点定义没有将最大值函数和最小值函数直接联系起来, 而是通过集值映射在锥松鞍点处的函数值间接地联系在一起. 不管是从博弈的角度还是从对偶的角度来看, 这都不是很合理, 而集值映射的锥鞍点的定义从上述两个角度看起来都很合理. 随后, Luc[10] 利用回收锥和回收函数, 研究了没有紧性假设下的广义向量值映射的极大极小点集和极小极大点集的存在性, 但是, 他并没有给出相应的集值映射的极大极小定理和锥 (松) 鞍点定理. Tan 等[11] 使用一个不动点定理, 在没有连续性假设下, 得到了广义向量值集值映射的锥松鞍点的存在性定理. Ha[12] 利用不动点定理, 在次半连续、广义凸凹假设下, 得到了广义向量值集值映射的锥松鞍点的存在性定理. 张清邦等[13] 使用一个不动点定理, 在抽象凸空间中, 得到了一个广义向量值集值映射的广义锥松鞍点的存在性定理. 对于集值映射的极大极小定理, 也有很多文献进行了研究. 李声杰等[5] 首次利用一个广义的 Ky Fan 截口定理, 在连续性假设、紧性假设、锥凸凹假设和一个 H 假设下, 给出了一个标量值集值映射的极大极小定理, 同时, 他们利用线性的标量化函数和凸集分离定理, 得到了一些向量值集值映射的极大极小定理并解决了 Ferro 提出的公开问题, 还同时针对定理退化为相应的向量值映射的极大极小定理的情况, 改进和推广了相应的结论, 他们也解释了这个假设在标量值集值映射的极大极小定理中是不可或缺的、合理的. 这样的一个 H 假设就可以反映出实值函数的极大极小定理和标量值集值映射的极大极小定理的不同, 同时, 也就说明了相应的向量值集值映射的极大极小定理和向量值映射的极大极小定理也是有很大不同的. 进一步, 李声杰等[14] 利用一类非线性标量化函数, 在连续性假设、紧性假设、锥自然拟凸凹假设和两个包含假设下, 得到了两类向量值集值映射的广义极大极小定理. 2013 年, 张清邦等[15] 使用类似的方法得到了两个广义向量值集值映射的极大极小定理. 2012 年, Lin 等[16] 在锥似凸条件下, 得到了集值映射的极大极小定理和锥鞍点定理.

实值函数的极大极小定理和其鞍点定理有着非常紧密的联系. 然而, 对于集值映射而言, 还没有类似的结果. 在已有结果中, 要么只研究集值映射的极大极小定理, 要么只研究集值映射的锥松鞍点定理, 并没有将两者结合起来. 更多地，现有文献中大多研究的是集值映射的锥松鞍点的存在性定理的，而少有文献研究集值映射的锥鞍点存在性定理. 不管是在拉格朗日对偶理论中还是在广义博弈模型研究中, 后者都有着非常重要的意义. 但是, 由于其定义的复杂性, 要想在合理的假设下, 直接讨论集值映射锥鞍点的存在性是非常困难的. 本章考虑应用集值映射的极大极小定理来研究锥鞍点的存在性定理. 另一方面, Tanaka[17−23] 在研究中, 通过向量值映射的锥鞍点定理, 利用控制性条件, 得到了一类不同于 Ferro 所获得的向量值映射的极大极小定理. 本章考虑应用集值映射锥鞍点的存在性定理来得到类似的集值映射的新的极大极小定理. 因此, 本章首先利用 Fan-Browder 不动点定理建立了一个标量值集值映射的极大极小定理, 并举例说明此定理与已有的集值映射的极大极小定理是不同的; 然后通过这个极大极小定理, 得到了一个标量值集值映射的锥鞍点的存在性定理; 最后, 利用标量化函数和控制性引理, 得到了一类新的向量值集值映射的极大极小定理.

2.1　预 备 知 识

本节主要介绍在本章中所使用的一些基本概念, 并相应给出一些有用的性质.

定义 2.1.1　设 X_0 为 X 中的一个非空凸子集, $F: X_0 \to 2^V$ 为一个非空值的集值映射.

(i) 如果对任意的 $x_1, x_2 \in X_0$ 和 $l \in [0,1]$, 有

$$F(x_1) \subset F(lx_1 + (1-l)x_2) + S \quad \text{或} \quad F(x_2) \subset F(lx_1 + (1-l)x_2) + S,$$

则称 F 在 X_0 上是 (I) 真 S-拟凸的. 如果 $-F$ 是 (I) 真 S-拟凸的, 则称 F 是 (I) 真 S-拟凹的;

(ii) 如果对任意的点 $z \in V$, 水平集

$$\mathrm{Lev}_{F\geqslant}(z) = \{x \in X_0 : F(x) \subset z + S\}$$

是凸的, 则称 F 在 X_0 上是 (I) S-拟凹的. 如果 $-F$ 是 (I) S- 拟凹的, 则称 F 是 (I) S-拟凸的.

注 2.1.1　如果 F 是一个向量值映射, 上述 (I) 真 S-拟凸、(I) S-拟凹就退化为文献[2] 和 [21] 中相应的概念.

引理 2.1.1[11]　设 $F: X \to 2^R$ 是一个带有紧值的连续集值映射. 则有函数

$h: X \to R$,

$$h(x) = \min F(x)$$

是连续的.

引理 2.1.2 设 X_0 为 X 中的一个非空凸子集, $F: X_0 \to 2^R$ 为一个带有紧值的集值映射. 函数 $h: X \to R$ 定义为 $h(x) = \min F(x)$.

(i) 如果 F 在 X_0 上是 (I) 真 R_+-拟凸的, 那么 h 在 X_0 上是拟凸的;

(ii) 如果 F 在 X_0 上是 (I) R_+-拟凹的, 那么 h 在 X_0 上是拟凹的.

证明 (i) 因为 F 是紧值的, 所以 h 是有意义的. 由实值函数拟凸的定义可知, 仅需证明对任意的 $z \in R$,

$$\mathrm{lev}_{h\leqslant}(z) = \{x \in X_0 \,|h(x) \leqslant z\}$$

是凸的即可. 事实上, 令 $x_1, x_2 \in \mathrm{lev}_{h\leqslant}(z)$ 且 $l \in [0,1]$. 因为 F 是 (I) 真 R_+-拟凸的, 所以有

$$\min F(lx_1 + (1-l)x_2) \leqslant \min F(x_1) \quad 或 \quad \min F(lx_1 + (1-l)x_2) \leqslant \min F(x_2).$$

即 $lx_1 + (1-l)x_2 \in \mathrm{lev}_{h\leqslant}(z)$. 因此 h 在 X_0 上是拟凸的.

(ii) 仅需证对任意的 $z \in R$,

$$\mathrm{lev}_{h\geqslant}(z) = \{x \in X_0 \,|h(x) \geqslant z\}.$$

令 $x_1, x_2 \in \mathrm{lev}_{h\geqslant}(z)$ 且 $l \in [0,1]$. 因为 F 在 X_0 上是 (I) R_+-拟凹的, 所以有

$$\min F(lx_1 + (1-l)x_2) \geqslant z.$$

即 $lx_1 + (1-l)x_2 \in \mathrm{lev}_{h\geqslant}(z)$. 因此 h 在 X_0 上是拟凹的.

引理 2.1.3[24] 设 X_0 为 X 中的一个非空凸子集且 $h: X_0 \to R$. 则下面两个结论等价:

(i) 对任意的 $r \in R$, $\{x \in X_0 : h(x) \leqslant r\}$ (或者 $\{x \in X_0 : h(x) \geqslant r\}$) 是凸的;

(ii) 对任意的 $t \in R$, $\{x \in X_0 : h(x) < t\}$ (或者 $\{x \in X_0 : h(x) > t\}$) 是凸的.

2.2 标量值集值映射的极大极小定理和锥鞍点定理

本节给出标量值集值映射极大极小定理和锥鞍点定理, 并证明两者的等价性.

定理 2.2.1 令 X_0 和 Y_0 分别为 X 和 Y 的两个非空的紧凸子集. 假设 $F: X_0 \times Y_0 \to 2^R$ 是一个带有非空紧值的连续的集值映射且满足下列条件:

(i) 对每一 $x \in X_0$, $F(x, \cdot)$ 在 Y_0 上是 (I) 真 R_+-拟凸的;

(ii) 对每一 $y \in Y_0$, $F(\cdot, y)$ 在 X_0 上是 (I) R_+-拟凹的;

(iii) 对每一 $y \in Y_0$, 都存在 $x_y \in X_0$ 使得

$$\min F(x_y, y) \geqslant \min \bigcup_{y \in Y_0} \max F(X_0, y).$$

则有

$$\min \bigcup_{y \in Y_0} \max F(X_0, y) = \max \bigcup_{x \in X_0} \min F(x, Y_0). \tag{2.1}$$

证明　由引理 1.1.1、引理 1.2.3 和引理 1.2.4 可知,

$$\min \bigcup_{y \in Y_0} \max F(X_0, y) \neq \varnothing \quad 且 \quad \max \bigcup_{x \in X_0} \min F(x, Y_0) \neq \varnothing.$$

显然, 对任意的 $x \in X_0$ 和 $y \in Y_0$,

$$\max F(X_0, y) \geqslant \max F(x, y) \geqslant \min F(x, y) \geqslant \min F(x, Y_0).$$

所以,

$$\min \bigcup_{y \in Y_0} \max F(X_0, y) \geqslant \max \bigcup_{x \in X_0} \min F(x, Y_0).$$

假设存在 $c \in R$ 使得

$$\min \bigcup_{y \in Y_0} \max F(X_0, y) > c > \max \bigcup_{x \in X_0} \min F(x, Y_0). \tag{2.2}$$

通过下列表达式定义一个集值映射 $T: X_0 \times Y_0 \to 2^{X_0 \times Y_0}$

$$T(x, y) = \{\bar{x} \in X_0 \,|\min F(\bar{x}, y) > c\} \times \{\bar{y} \in Y_0 \,|\min F(x, \bar{y}) < c\}.$$

下面证明 T 满足定理 1.4.1 的所有假设条件.

首先, 证明对所有的 $(x, y) \in X_0 \times Y_0$, T 是非空值的. 由条件 (iii) 和 (2.2) 可知, 对每一个 $y \in Y_0$, 都存在 $x_y \in X_0$ 使得

$$\min F(x_y, y) \geqslant \min \bigcup_{y \in Y_0} \max F(X_0, y) > c.$$

更多地, 对每一个 $x \in X_0$,

$$\min F(x, Y_0) \leqslant \max \bigcup_{x \in X_0} \min F(x, Y_0) < c.$$

因此, 对所有的 $(x, y) \in X_0 \times Y_0$, T 是非空值的.

显然, 由条件 (i) 和 (ii), 以及引理 2.1.2 和引理 2.1.3 可知, 对每一个 $(x, y) \in X_0 \times Y_0$, T 是一个凸集.

对每一个 $(\bar{x},\bar{y})\in X_0\times Y_0$, $T^{-1}(\bar{x},\bar{y})$ 是一个开集. 由集值映射 T 的定义有, 对每一个 $(\bar{x},\bar{y})\in X_0\times Y_0$,

$$\begin{aligned}T^{-1}(\bar{x},\bar{y})&=\{(x,y)\in X_0\times Y_0\,|(\bar{x},\bar{y})\in T(x,y)\}\\&=\{x\in X_0\,|\min F(x,\bar{y})<c\}\times\{y\in Y_0\,|\min F(\bar{x},y)>c\}.\end{aligned}$$

因为 F 是一个带有非空紧值的连续集值映射, 再由引理 2.1.1 可知, 对每一个 $(\bar{x},\bar{y})\in X_0\times Y_0$, $T^{-1}(\bar{x},\bar{y})$ 是一个开集.

这样, T 满足定理 1.4.1 的所有假设条件. 由引理 1.4.1 可得, 存在 $(x,y)\in X_0\times Y_0$ 使得 $(x_0,y_0)\in T(x_0,y_0)$. 再由 T 的定义可知,

$$c<\min F(x_0,y_0)<c.$$

这是一个矛盾. 因此, (2.2) 不成立. 即 (2.1) 成立. 定理得证.

注 2.2.1 (i) 定理 2.2.1 条件 (iii) 与文献 [5] 中的类似. 当 F 是一个实值函数时, 其条件 (iii) 自然成立. 所以定理 2.2.1 退化到了文献 [14] 的相应的结论.

(ii) 定理 2.2.1 的凸假设与文献 [5] 中的命题 2.1 和文献 [14] 中的定理 2.1 的是不一样的.

(iii) 定理 2.2.1 的证明方法与文献 [5] 和文献 [14] 中的是不同的.

下面的例子说明当文献 [5] 中的命题 2.1 不可行时, 定理 2.2.1 是可行的.

例 2.2.1 令 $X=Y=R, V=R, X_0=[-1,1], Y_0=[0,1], \varepsilon>1$. 定义标量值集值映射 $F:[-1,1]\times[0,1]\to 2^R$ 如下:

$$F(x,y)=[yx,y(x^3+\varepsilon)],\quad (x,y)\in[-1,1]\times[0,1].$$

显然, F 是带有紧值的连续集值映射. 由 F 的定义可知, 对所有的 $x\in X_0$ 和 $y\in Y_0$,

$$\min F(x,y)=yx\quad 且\quad \max F(x,y)=y(x^3+\varepsilon).$$

然后可知, 对每一个 $x\in X_0$, $F(x,\cdot)$ 在 Y_0 上是 (I) 真 R_+-拟凸的, 且对每一个 $y\in Y_0$, $F(\cdot,y)$ 在 X_0 上是 (I) R_+-拟凹的. 但是, 对任意的 $y>0$, $F(\cdot,y)$ 在 X_0 上不是 R_+-凹的. 因此, 文献 [5] 中的命题 2.1 是不可行的. 然而, 由 F 的定义可知,

$$\min\bigcup_{y\in Y_0}\max F(X_0,y)=0.$$

对每一个 $y\in Y_0$, 取 $x_y=1$, 有

$$\min F(1,y)=y\geqslant\min\bigcup_{y\in Y_0}\max F(X_0,y)=0.$$

即, 定理 2.2.1 的条件 (iii) 成立. 这样, 定理 2.2.1 的所有条件都成立, 则定理 2.2.1 的结论成立. 通过直接的计算,

$$\max \bigcup_{x\in X_0} \min F(x, Y_0) = 0,$$

即

$$\min \bigcup_{y\in Y_0} \max F(X_0, y) = \max \bigcup_{x\in X_0} \min F(x, Y_0).$$

定理 2.2.2 假设定理 2.2.1 的所有条件都满足, 则至少存在一个 F 在 $X_0 \times Y_0$ 上的 R_+-鞍点.

证明 由假设和定理 2.2.1 可知,

$$\min \bigcup_{y\in Y_0} \max F(X_0, y) = \max \bigcup_{x\in X_0} \min F(x, Y_0).$$

则存在 $\bar{x} \in X_0$ 和 $\bar{y} \in Y_0$ 使得

$$\begin{aligned}\max \bigcup_{x\in X_0} \min F(x, Y_0) &= \min \bigcup_{y\in Y_0} F(\bar{x}, y) = \min \bigcup_{y\in Y_0} \max F(X_0, y) \\ &= \max \bigcup_{x\in X_0} F(x, \bar{y}).\end{aligned}$$

因此, 对所有 $x \in X_0$ 和 $y \in Y_0$,

$$\min F(\bar{x}, y) \geqslant \min \bigcup_{y\in Y_0} F(\bar{x}, y) = \max \bigcup_{x\in X_0} F(x, \bar{y}) \geqslant \max F(x, \bar{y}).$$

特殊地, 取 $x = \bar{x}$ 和 $y = \bar{y}$, 有

$$\min F(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \max F(\bar{x}, \bar{y}),$$

即, $F(\bar{x}, \bar{y})$ 是一个单点. 因此,

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \min \bigcup_{y\in Y_0} F(\bar{x}, y) = \max \bigcup_{x\in X_0} F(x, \bar{y}),$$

这样, $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 F 的一个 R_+-鞍点. 定理得证.

例 2.2.2 考虑例 2.2.1. 显然, 定理 2.2.2 的所有条件都成立. 因此, 定理 2.2.2 的结论成立. 由直接的计算, 有 $F(1, 0) = 0$ 且

$$\min \bigcup_{y\in Y_0} F(1, y) = \max \bigcup_{x\in X_0} F(x, 0) = 0.$$

即, $(1, 0)$ 是 F 上的 R_+-鞍点.

定理 2.2.3 令 $F : X_0 \times Y_0 \to 2^R$ 为一个非空值的集值映射. 假设

$$\min \bigcup_{y\in Y_0} \max F(X_0, y) \neq \varnothing \quad 且 \quad \max \bigcup_{x\in X_0} \min F(x, Y_0) \neq \varnothing.$$