

实验优化设计与分析

Shiyan Youhua Sheji yu Fenxi

■ 马青松 刘东青 余金山 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

实验优化设计与分析

马青松 刘东青 余金山 编著



国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书主要介绍科学研究与工程实践中常用的实验设计与分析方法,内容包括实验设计的基本概念、因素实验与方差分析、回归分析、正交实验设计与均匀设计、稳健性设计和可靠性设计。全书内容侧重设计与分析方法的应用,选用了若干材料科学与工程专业案例。

本书可作为高等院校工科类专业的教材,也可作为材料、冶金、机械等领域科研与工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

实验优化设计与分析 / 马青松, 刘东青, 余金山编
著. —北京: 国防工业出版社, 2018.4

ISBN 978-7-118-11541-3

I. ①实… II. ①马… ②刘… ③余… III. ①实验方法 IV. ①G312

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 047571 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

天津嘉恒印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 11¼ 字数 234 千字

2018 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—1500 册 定价 60.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717

前 言

作为一门专业基础学科，实验设计与分析自 20 世纪 30 年代开创以来，已经在科学研究和工程实践中得到广泛应用，成为广大科研工作者与工程技术人员必须掌握运用的技术方法之一。材料科学与工程专业的实践性很强，更加需要先进实验方法和技术的支撑。

为了提高研究生的实验设计与分析能力，国防科技大学材料科学与工程专业的研究生培养方案中设置了“实验优化设计与分析”课程。自 2010 年开始讲授以来，受到学生的肯定和重视，认为对他们的研究工作帮助颇多，自编课程讲义也经过了多次修订、补充和完善，出版教材的时机已经成熟。本书介绍了实验设计的发展与基本概念、因素实验与方差分析、回归分析、正交实验设计与均匀设计、稳健性设计、可靠性设计等常用的实验设计与分析方法，内容覆盖面广，同时选用了若干材料科学与工程专业案例，针对性较强。本书侧重相关设计与分析方法的应用，对于所涉及的数学知识和工具只介绍其基本原理与运用方法，并不强调其具体推导过程，有兴趣的读者可查阅其他相关资料。

本书由国防科技大学空天科学学院马青松研究员主编，刘东青讲师、余金山副研究员参与编写。其中，第 1 章、第 4 章由马青松研究员编写，第 2 章、第 3 章由刘东青讲师编写，第 5 章、第 6 章由余金山副研究员编写。马青松研究员对全书进行了统稿与审校，刘东青讲师对全书的图表、公式和格式等进行了审校，国防科技大学空天科学学院斯永敏副教授审阅全书并提出了宝贵修改意见，在此表示感谢。

本书在编写过程中参考了相关书籍和资料，引用了一些内容和实例，对所有作者和译者表示诚挚的感谢。国防科技大学空天科学学院、国防工业出版社对本书的出版给予了大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误与不当之处，敬请广大读者批评指正。

目 录

第 1 章 实验设计的基本概念	1
1.1 概述	1
1.1.1 定义	1
1.1.2 实验设计的历史进程	3
1.1.3 实验设计的现代特征	4
1.1.4 实验设计的宗旨	5
1.2 实验设计与科学发展的关系	6
1.2.1 实验设计在科技发展中的地位	6
1.2.2 数学方法在实验设计中的应用	7
1.3 实验过程中的误差	7
1.3.1 实验误差的分类	8
1.3.2 随机误差的特征	11
1.3.3 观测数据的修约	15
1.4 实验设计的基本原则	21
1.4.1 因素实验的基本概念	21
1.4.2 实验设计的基本原则	22
1.4.3 常用的实验分析工具	25
第 2 章 因素实验和方差分析	28
2.1 水平取值的优化方法	28
2.1.1 黄金分割法	28
2.1.2 分数法	30
2.1.3 等距取值法	31
2.1.4 爬山法	31
2.1.5 对开法	32
2.1.6 从好点出发法	33
2.1.7 平行线法	34
2.1.8 双因素爬山法	34
2.2 单因素实验设计	35
2.2.1 单因素实验方法	35

2.2.2	单因素实验数据模型	36
2.2.3	单因素实验的方差分析	40
2.2.4	显著性检验	42
2.3	双因素实验设计	45
2.3.1	双因素实验方法	45
2.3.2	双因素实验数据模型	46
2.3.3	不重复实验的方差分析	47
2.4	双因素的重复实验	50
2.4.1	双因素实验的交互效应	50
2.4.2	重复实验的方差分析	52
2.5	双因素的随机区组实验设计	53
2.5.1	随机区组实验步骤	54
2.5.2	随机区组实验的数据结构	54
2.5.3	区组实验数据的方差分析	55
第3章	回归分析	56
3.1	一元线性回归	56
3.1.1	一元线性回归模型	57
3.1.2	回归系数的估计	57
3.1.3	相关分析	58
3.1.4	显著性检验	59
3.1.5	预报与控制	61
3.2	一元非线性回归	65
3.2.1	函数线性化方法	65
3.2.2	非线性回归	66
3.2.3	失拟误差与显著性检验	68
3.3	多元线性回归	69
3.3.1	多元线性模型	69
3.3.2	回归系数的最小二乘估计	70
3.3.3	多元线性回归的检验	71
3.4	多项式回归分析	74
3.4.1	多项式的一般形式	74
3.4.2	等距取值的正交多项式	74
第4章	正交实验设计与均匀设计	76
4.1	正交表的构造	76
4.1.1	拉丁方与正交表	76
4.1.2	正交实验的特点	79

4.1.3	正交表的构造方法	81
4.2	正交实验的方差分析	85
4.2.1	数据模型与方差分解	85
4.2.2	正交实验设计步骤	87
4.2.3	重复实验的统计分析	92
4.3	多因素的交互作用	94
4.3.1	表头设计	94
4.3.2	交互作用实验的统计分析	95
4.4	不等水平的正交实验	98
4.4.1	混合水平的实验设计	98
4.4.2	拟水平与拟因子实验设计	101
4.4.3	组合因子法	102
4.5	均匀设计	102
4.5.1	均匀设计的基本原理	103
4.5.2	均匀设计实验的基本方法	106
4.5.3	混合水平的均匀实验设计	107
4.5.4	均匀设计的具体应用	108
第 5 章	稳健性设计	112
5.1	引言	112
5.2	质量工程原理	113
5.2.1	基本概念	113
5.2.2	质量损失函数	115
5.2.3	平均质量损失	118
5.2.4	利用非线性减少质量损失	119
5.3	产品的三阶段设计	120
5.3.1	综述	120
5.3.2	参数设计	121
5.3.3	容差设计	122
5.4	信噪比及其应用	124
5.4.1	噪声灵敏度的估算	125
5.4.2	静力学问题的信噪比	126
5.4.3	动力学问题的信噪比	128
5.4.4	信噪比在寻求最优工艺条件问题中的应用	131
5.5	稳健设计步骤	133
5.5.1	综述	133
5.5.2	多晶硅沉淀过程及其作用的稳健设计实例	134

5.5.3	噪声因子和实验条件	135
5.5.4	质量特征数和目标函数	136
5.5.5	控制因子和水平	137
5.5.6	正交实验	138
5.5.7	数据分析	142
5.5.8	核实实验	147
第 6 章	可靠性设计	148
6.1	可靠性概念	148
6.2	可靠度的计算	150
6.2.1	串联方式	151
6.2.2	并联方式	151
6.2.3	串—并联方式	153
6.2.4	表决系统和贮备系统	155
6.3	可靠度函数与故障率	156
6.3.1	故障率计算实例	156
6.3.2	可靠度函数与故障率的精确定义	159
6.3.3	几个重要分布的可靠度函数和故障率	160
6.3.4	指数分布故障率的计算	164
6.4	可靠度设计	166
6.4.1	一般概念	166
6.4.2	元件可靠度的分配	167
6.4.3	可修复系统平均故障间隔的计算	169
6.4.4	元器件的选用	172
6.4.5	元器件的正确使用	172
6.4.6	固有可靠度的设计	173
6.4.7	可靠性工程简述	174
	参考文献	178

第 1 章 实验设计的基本概念

1.1 概 述

1.1.1 定义

认识世界可以通过学习，更重要的是通过实践。社会实践在很大程度上是一种重复渐进的活动，只有理论指导的实践才是有目的的实践、科学的实践，只有这样的实践才能更深刻地认识世界。

实验就是一种理想的科学实践，是在寻求真理过程中的一种积极的、主动性的活动。实验是以一定的假设为前提，利用各种仪器设备以及人为创造的条件，让各种现象及内在的关系和演变过程在实验者面前充分暴露，通过仔细的观察和缜密的测量，运用理论分析和数据处理，做出决策与判断，以论证这一假设的正确与否，或者进一步提出新的理论，发现新的规律。实验是发现规律、揭示事物本质的一种科学手段，实验则是某一项实验的具体操作过程。为叙述方便，本书统一使用“实验”。

对于材料、冶金、机械等学科和工业领域，常常需要通过实验研究的方法来探寻研究对象的变化规律，并对规律进行分析，以达到设计新合金材料成分，优化制备工艺和制备效率，提高材料性能，降低能源和原辅材料消耗等目的。

例如，欲通过淬火实验考查两种不同的淬火冷却介质（油和盐水）对某铝合金硬度的影响，从而确定能使铝合金淬后硬度最大的淬火冷却介质，怎样合理安排实验？

对于淬火实验，通常是对每种淬火冷却介质都提供若干个铝合金试样并在淬火及时效之后测量硬度，用淬火后试样的平均硬度来判断淬火冷却介质的优劣。在进行淬火实验之前，需要对以下问题进行考虑并给出对应的解决方案。

- (1) 除了油和盐水产外，是否还有其他可能更好的淬火冷却介质？
- (2) 除了淬火冷却介质外，是否还有其他因素会影响铝合金硬度？
- (3) 在每种淬火冷却介质中应该实验并测试多少个试样？
- (4) 如何给两种淬火冷却介质分配试样？
- (5) 怎样收集和处理实验数据？
- (6) 如何确定两种淬火冷却介质的差别，即经两种淬火冷却介质处理后的试

样平均硬度之差为多大时，认为淬火冷却介质的效应明显？

上述任何一个问题如果考虑不周，都可能会严重影响实验的结果和效果。如果同时用两台热处理炉加热试样，若一个热处理炉的样品全部进行油淬，而另一热处理炉的样品全部进行水淬。那么，在比较淬后试样的平均硬度时，两个热处理炉存在的差异可能会影响试样淬火后的硬度，这样就会造成淬火冷却介质和不同热处理炉的效应叠加在一起。试样硬度之差可能是不同热处理炉和淬火冷却介质综合作用的结果，因而无法准确判别不同淬火冷却介质对铝合金硬度的效应。

因此，可以看出，实验方案在实验中起着非常重要的作用。通过恰当而正确地安排实验，不仅能够用较少的实验次数达到预期的实验目的，大大节省人力、物力和时间，收到事半功倍的效果，而且可以简化实验结果的分析和处理过程，还可借助于相关数据处理软件在计算机上进行分析，提高实验结果的可靠性和准确性，从而为快速寻求参数的优化数值和选择最佳工艺方案指明方向。好的实验方案可以通过科学的实验设计来提出。

所谓实验设计，就是一种科学或工程设想通过精心策划、方法选择、变量设计等一系列创造性的思维程序，形成一个解决问题或实现设想的行动方案。通过实验操作后，对实验的响应信息进行观测、统计、分析、处理并考查输入变量设计的合理性和整体性的综合过程。实验设计是有目的、有策划和有大纲的实践的总称，实验仅是实验设计中的一部分内容。实验设计只关心如何规划输入变量和输出信息的采集与处理，而实验的具体过程或者说实验“黑箱”内的变化不是实验设计重点关注的问题。

实验设计的过程分为以下四个步骤：

(1) 明确实验目的。首先识别问题的性质，是工程问题、经营销售还是生产质量问题，明确需要解决的问题的目标；其次选择目标的响应变量，确定观测目标的措施等。

(2) 编写切实可行的实验大纲。包括明确输入变量和考查目标响应参数与测试方法；场地选择及对环境条件的要求，配置相应规格的测试仪器和设备；决定采样方式、测点布置、组合形式与重复要求；实验数据处理方法与实验分析的要求等；制订实验进程表等。

(3) 实验操作过程及实施步骤。着手配置实验的输入参数及其级位，调试测试仪器或装置，清理实验场地与环境，根据实验计划按顺序完成各个实验条件下的操作，记录实验指标的观测值等。

(4) 撰写实验报告。对响应信息的观测值进行理性的分析和归纳，并写出实事求是的实验报告。报告包括实验结论以及本实验是否有效；根据实验检验找出最佳生产条件；做出在最佳条件下的生产预报；做出实验可靠性的结论等。

由此可见，影响和制约着实验过程的不仅是物质条件，还有思维方式。而对思维方式起着指导作用的是优化的实验设计及其相关的理论。一个优化的实验设

计事前必须进行周密的调查研究，横向借鉴，纵向比较，对现成的资料和历史资料做出筛选。

现代实验设计不仅包括实物实验，还包括虚拟实验即仿真实验和模拟实验。实物实验中包括验证性实验和探索性实验。验证性实验即是学生在课堂上所做的教学实验，是对已知的理论进行验证，以加深对理论的理解。实验设计是探索性实验，目的主要是为了揭示尚未完全认识的事物，发现其发生与发展的规律，以完成工程或科研任务，具有很强的探索性。本书主要是以探索性实验为对象。

1.1.2 实验设计的历史进程

实验是人们探索和认识事物客观规律的一种基本手段和方法，自从有人类以来，人们就不断地为生存而努力，通过自发性的实验和实践获取狩猎、捕鱼和耕作等方面的工具、方式和经验。但是，作为一门科学技术还是在 20 世纪初才发展起来，实验设计与社会生产紧密相连，是一种相互依存的关系。

1. 费歇尔开创实验设计新学科

费歇尔 (Ronald. A. Fisher) 是英国一位著名的生物统计学家，他运用数理统计和组合数学首先在农业，然后在生物学和遗传学等方面进行实验设计，取得了很高的学术成就。他最早提出科学实验方法，并将这种方法第一次应用在洛萨姆斯台特 (Rothamsted) 农场，使农场的农作物大获丰收。1925 年，他在一本统计方法的著作中最早提出实验设计这个概念。之后，费歇尔进一步研究、实践和总结了这个方法。1935 年正式出版了 *The Design of Experiments* 一书，从而开创了一门新兴学科，促成了实验设计这门科学与技术的广泛应用。

20 世纪 30~40 年代，在生产发达的英国、美国和苏联，一些学者继续对实验设计进行研究与开发，并在采矿、冶金、建筑、机械、纺织和医药等行业推广与应用，对于提高产品质量、降低生产成本起到了至关重要的作用。

在第二次世界大战期间，以美国为首的同盟国将实验设计应用到军工生产中，使军需物品及时保质保量地供应战时前方，取得显著的效果。

2. 田口玄一的三段设计新思想

20 世纪 50 年代，战败的日本经济一落千丈，为了迅速恢复工业和农业的生产，尽快赶上世界经济发展的步伐，在日本国内涌现出一大批生产管理学者。其中田口玄一最具代表性，他不仅在质量工程与管理中有着突出的贡献，而且在实验设计方面有许多独到的建树。

1949 年，田口玄一在日本电讯所研究电话通信系统质量时，发现英国人在农业上所用的实验设计方法不能完全适应工业生产。于是在费歇尔实验设计的基础上加以改进和补充，创造了运用正交表安排实验的统计与分析方法，称为正交实验设计。这种方法在日本迅速推广，在前 10 年里，实验项目超过 100 万项，其中有 1/3 效果十分显著，获得极大的经济效益。在日本，正交表设计技术早已成为

企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员必备的技术。

将正交实验设计应用到产品的系统设计、参数设计和容差设计中又是田口玄一的重大成就。这个称为三次设计的思想是在专业设计的基础上，运用正交设计的技术来选择产品的最佳参数组合和最合理的公差范围，达到尽可能使用价格低廉的元件或器件，来替代价格贵重的元器件，通过相得益彰的搭配组装整机产品的一种优化方法。应用这种设计技术可以使消费者获得价廉物美的商品，为企业创造低成本和质量优良的产品，达到用户和厂家双赢的效果。在三次设计的基础上，近来又发展和形成了产品质量的稳健性设计体系。

3. 中国科学家的贡献

华罗庚最早在国内推广和应用优选法，在 20 世纪 50~60 年代，亲临各个工农业建设现场，讲解和示范实验设计的应用，为国民经济的发展以及普及和推广优选法做出重大贡献。

中国科学院数学研究所和系统研究所的科技人员，从 20 世纪 50 年代开始，就正交实验设计进行了实践和研究，提出了新见解，简化了实验分析方法，出版了实验设计和统计技术的普及书籍。自 1973 年，特别是推行全面质量管理以来，研究和推广正交实验设计又有了很大进展，在正交理论的研究上又有了新突破。在科研、生产和教学中，我国的科技工作者运用实验设计这一工具，解决了工作中许多关键问题，取得丰硕成果。产品的三阶段设计在我国起步较晚，20 世纪 80 年代才开始，也取得了一些成果。

1978 年，我国数学家方开泰和王元共同提出均匀设计法，起先用于军事工业，后来在石油、化工、船舶、汽车等众多行业以及科学计算上也获得成功应用，得到国内外自然科学界公认，并于 2008 年获国家自然科学奖。均匀设计理论与方法具有重大科学价值，开创了一个新的研究方向，形成了中国人创立的学派，也是我国对实验设计技术发展的一大贡献。同正交设计一样，均匀设计也是目前最流行的实验优化设计方法之一。

应当指出，实验设计这一应用性科学技术不仅只在自然科学和实际生产中得到广泛应用，近来在社会科学、经济领域（如生产计划、产品销售、经营管理等业务）也显示出广阔的应用前景。作为一门实用的技术科学与通用技术，实验设计与分析在提高实验效率、优化产品设计、改进工艺技术、降低成本、延长产品寿命等方面均取得了显著的应用效果。

1.1.3 实验设计的现代特征

发展中的现代实验设计突出表现了如下特征：

1. 整体化、量化、优化

小的实验项目可以是一个显微分析，大的可以是宇宙飞船，每一个实验都是一个系统，是由许多不可缺少的环节构成的一个整体，影响实验过程的各个方面

都不能忽视。而且随着科学技术的不断进步,实验系统日益复杂,从研究对象到测试信号和模型参数的种类十分繁多。因此,必须对实验的各个环节做出多层次的有条理的整体规划,其中包括实验方法进一步数学化和优选实验方案的问题。

实验设计要求特别重视数据信息,任何数据都是信息的体现。获得实验的响应多以数据形式出现,无论是输入还是输出的数据,都是对实验模型和实验结果进行定量分析的重要依据。为了得到准确的实验结论,测试技术在实验设计中占据重要的位置。

目前,应用电子计算机模拟并替代人脑的部分思维,其快速准确的演算能力带来了数学方法的革新,扩大了定量研究的范围,提供了一种“模拟试算”的崭新实验手段。同时,为了经济合理、快速可靠地进行各种实验,需要不断研究优化实验的理论方法。

2. 重视实验技术的研究

实验设计包括硬技术和软技术两大部分。所谓硬技术是指实验的物质手段,就是实验条件和使用的仪器设备。实验设计时应该考虑将现代科技的最新成果应用到实验过程中,在整体规划时应着眼包括测试等手段的研究和开发。

所谓软技术是指选择、组织、分析、决策等“思维的技术”,比如对测试指标和测试方法的选择、实验方案的拟定、对实验结果的数据处理和精度分析等,这些都体现了对实验过程优化所使用的理论工具和思维方式。换句话说,软技术就是应用知识和技术的技术,在广阔的范围中选取各种知识单元,将它们交叉地、有机地结合起来构成新的功能,达到实验目的。软技术的主体是现代数学,在思路与方法上打破了传统学科的局限,具有通用的灵活性。现代实验设计不仅要创造条件、复现过程、记录结果,而且要重在分析和研究。随着科研与实验的综合性发展趋势,实验软技术被推向更显著、更重要的位置。

1.1.4 实验设计的宗旨

最初实验设计追求的目标正是一切工程实验之所求,就是使实验的综合效率最优,即付出最少的代价,以最快速度获得最可靠的实验结论。所以,实验设计的基本宗旨为获取高的实验过程效率与高的实验测试统计精度。

1. 最大限度地提高实验效率

由于研究的系统越来越复杂,所求参量越来越多,势必造成实验次数增多、时间加长、成本变高,要求寻找一种提高效率的途径成为共同的课题。要想尽量减少实验总次数,缩短实验周期,节约资源消耗,同时解决干扰问题,达到全面客观分析的目的,就需要合理和科学地设计实验方案。

科技工作者在许多方面已取得显著成果。例如,采用加大应力的方法强化某些实验条件,进行加速寿命实验,就可以促成产品提前失效,缩短可靠性实验的

过程。对于那些不便于直接实验的情况，选择新型实验方法，比如通过空气动力学的风洞实验来模拟航天器在太空飞行的状态，不但可以节省资源，还可以确保人身安全。此外，如运用相似原理在实验室解决大坝变形、桥梁振型等大型系统的实验设计分析问题，用电路系统作机械振荡的模拟实验，利用计算机对多输入多输出线性系统进行数字仿真实验等，这些方法都是在保证实验精度的前提下，降低成本，提高实验效率的科学研究成果。

2. 最大限度地提高实验精度

实验精度是指实验结论的可靠性。在任何实验中都不可避免地存在外界干扰，形成影响实验结果的误差。要提高精度就必须分析处理误差。实验条件和仪器设备会给实验带来硬件误差，所以要正确选择测量装置，必要时应对测量装置进行静态标定和动态特性分析，以便减小测量的失真或畸变程度。将先进的科技成果应用到测试与计量中是提高实验精度的一个重要途径。另外，对来自实验方法的软件误差，则要运用误差理论加以控制。数学方法的应用对于保证实验精度起着特别重要的作用，统计计算和数据分析是主要的工具。

1.2 实验设计与科学发展的关系

实验设计与国民经济紧密相连，与社会生产相互依存，生产实践是实验设计生命的土壤。实验设计对近代科学发展起到了重要的推动作用，同时也以现代科学作为技术支撑。离开了现代科学技术的发展，实验设计也就没有了生命。

1.2.1 实验设计在科技发展中的地位

在古代，科学很不发达，尚处于自然哲学阶段，其主要研究方法是直观加思辨。哲学家凭着实践中获得的经验进行逻辑推理做出论断或预言，再根据新的实践经验，又经逻辑分析做出新的论断来发展和修正理论。这样的理论往往有很大的局限性，使得科学发展极为缓慢。

这种局面直到近代才发生根本改变。伽利略在意大利比萨斜塔做了著名的自由落体实验，纠正了支配人类长达两千多年的错误理论，也就是从那时起开辟了实验科学的新阶段。自然科学从哲学中分化出来，开始分门别类进行研究，科学发展的趋势是使目标更加明确。在观察实验的基础上进行严密的逻辑分析，形成了以事实为依据的系统的近代科学理论。可以毫不夸张地说，实验设计成为近代科学发展的基石。

光学和光电子学的发展更能说明实验和实验设计的重要性。自从斯涅耳在1621年发现了折射定律后，以牛顿为首的光的粒子学说在学术界统治了一个多世纪。17世纪末玻义耳和胡克同时发现了牛顿环现象，光的粒子学说因无法解释而陷入困境。1678年，荷兰科学家惠更斯提出了光的波动理论，为了证实这个理论

的正确性，一些科学家做了大量实验和研究工作。直到 1802 年，英国科学家托马斯·杨成功完成了小孔干涉实验，使牛顿环现象得到圆满的解释，光的波动理论第一次获得实验证实。接着，法国科学家菲涅耳成功完成了双缝光的衍射实验，其后菲涅耳和阿喇果一起进行光的叠加实验，观察到了明暗相间的条纹，托马斯·杨用横波理论的假设和实验圆满解释了这一现象。至此，光的波动理论成为研究现代光学的支柱。

现代科学技术的迅猛发展显示出极强的综合性，因而更加依赖于实验分析。现代实验不单是通过观察现象和测试数据来验证假说，而为达到多种研究目的开创了全新的途径。可以说，所有用理论分析和数学解析的方法不能解决的问题，都可利用实验的手段来求解。

1.2.2 数学方法在实验设计中的应用

先进的数学工具提高了实验优化的水平，所以数学方法是实验设计的重要组成部分。实验采集的大量数据中蕴涵着事物之间本质的关系。用抽象的形式化数学语言概括地或近似地描述事物特征或事物间数量相依关系的表达式称为数学模型。数学模型大致可分为：确定性的或随机性的；连续性的或离散性的；精确性的或模糊性的。

确定性的数学模型描述的实体对象具有确定的数量相依关系，用经典数学形式表达。但实验中存在各种干扰因素，测得的数据往往具有随机性，所以随机数学模型在实验分析中占有相当大的比例。利用随机量的统计规律来分析处理干扰与误差是一条基本思路。模型参量的最小二乘估计以及方差分析、显著性检验都是典型的数理统计的分析方法，现已被广泛应用。

实验设计中数学方法的特点之一在于并不追求严格的系统性，而是强调实用性。它针对要解决的问题放开思路，广泛地涉猎于经典数学和应用数学的各个层次，巧妙组合，灵活运用。

由于测试数据量大，运算复杂，因此实验中数学方法的另一特点，就是要便于计算机的应用。适于计算机运行的最有效形式是递推关系，连续数据须经离散化处理，同时要有相应的数值计算方法。总之，以优化实验为目的的数学方法要随实验范围的拓宽和数学工具的发展而不断充实和更新。

1.3 实验过程中的误差

任何实验都是为了获得真实的结果，但是任何实验都不可避免地存在误差，这些误差会掩盖实验的真实结果。测量和实验水平的不断提高，也只能使误差逐渐减小，而不可能使误差为零。所以实验设计的一项重要任务是认识误差和分离误差，找出实验的真实结论。

1.3.1 实验误差的分类

任何实验都有表明其结果的响应量,多数响应量均可通过测试手段进行检测,得到一个观测值。这个观测值中必定包含误差。真正反映实验结果的真实值被误差掩盖着,所以误差为实验真值与观测值之差。

设实验输出变量的真值为 μ ,实际观测值为 x_i ,则误差 δ_i 为

$$\delta_i = x_i - \mu \quad (1-1)$$

1. 客观性误差

客观性误差是非人为主导因素引起的误差,是由周围环境和客观条件的变异所产生的,这类误差又可分为系统误差和随机误差。

1) 系统误差

在重复性条件下,对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量真值之间的差异,即是系统误差。系统误差的大小和方向是固定的或者是以一定规律变化的,是由固定因素所引起的误差。这种误差可以发现,也可以设法消除。系统误差可以分为常值系统误差和变值系统误差。

常值系统误差是误差值的大小一定,方向保持不变,不随时间的延长和温度等外部因素的变化而改变的误差。主要原因之一是由于测试仪器的基准量存在误差,比如在测试前没有严格的标定,测试结果中势必包含着测量装置的不准确带来的系统误差;测量方法的近似性也是产生系统误差的原因之一,如 π 的近似误差就成为周长测量的系统误差。当然,测试人员的技术水平也会引起观测值的系统误差。显然这些因素在分析误差产生原因时都比较容易发现,也是不难消除的。

变值系统误差包括渐进性误差和周期性误差。误差的大小随时间或空间的变化而逐渐增加或逐渐减少,称这类误差为渐进性系统误差,比如在山坡上种植的庄稼,产量因不同的光照时间和蓄水功能的差异而呈渐进变化。同样,变值系统误差通过实验结果的频谱分析也可以发现产生的原因,并且也是可以消除的。

处理测量结果时,需针对系统误差的不同规律,恰当地进行数据处理,最大限度地消除系统误差对测量结果的影响。处理系统误差的原则和基本手段有:

(1) 对所使用的仪器应定期检定,并在规定的条件下严格按照操作规程使用。

(2) 对于确知存在而又无法消除的系统误差,需正确进行数据处理。

对于常值系统误差,其方向和大小均已确定不变,故应采用测量值修正的办法消除。对于变值系统误差,一般先估计在测量过程中的变化区间 $[a, b]$,其中 $a < b$ 。取 $(a+b)/2$ 作为常值系统误差加以修正,取区间的半宽度 $(b-a)/2 = \Delta$ 作为随机误差的误差界 $[-\Delta, \Delta]$,近似按随机误差处理。

(3) 尽可能排除实验装置中可能产生系统误差的因素。

2) 随机误差

在完全相同的实验条件下,不会出现相同实验结果的现象称为随机现象。用

来表示随机结果的变量称为随机变量，根据随机变量的性质，有连续随机变量和离散随机变量之分。随机误差是一种典型的随机变量。随机误差是指，测量结果与在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值之差。随机误差的大小和方向是不确定的，也没有一个确定的规律。

对于产生随机误差的原因只能作定性而不能作定量分析，因此随机误差是无法消除的。产生随机误差的因素主要是客观存在的 5M1E，即设备 (Machine)、人员 (Man)、材料 (Materials)、方法 (Method)、测量 (Measurement) 和环境 (Environment) 等因素造成的不确定性。这些因素在实验过程中随着时间的延长和空间的拓展，不可避免地会出现重复性和稳定性的变异。例如，实验设备或测试仪器运转一段时间后发热或磨损的不均匀性，实验或测量人员的精力集中程度和思维疲劳等引起操作状态的波动等，都会产生随机误差。

随机误差固然没有确定的规律可循，但是可以运用概率统计的数学方法找出其统计规律。所以，运用概率统计对实验结果做出的任何结论都是一个估计，这种估计被定义在一个概率区间内，即任何结论是和其波动范围同时给出的。

在测量中，将综合随机误差和系统误差二者在内的误差大小用测量精度表示。图 1.1 反映了测量准确度、精密度和精度三者的关系，图中 μ 为测量值的理论真值。准确度指的是每个测量值与 μ 的接近程度，精密度指的是所有测量值之间的分散程度，精度是准确度与精密度的综合反映。图 1.1(a) 表示准确度和精密度都差，图 1.1(b) 表示精密度好，但准确度差，图 1.1(c) 表示准确度和精密度都好，因而测量精度也高。

为了描述工程测量仪表的测量结果可靠程度，每个仪表都附有仪表精度等级，是按统一规定的允许误差大小划分成的等级。精度等级越小，仪表精度就越高。仪表精度等级是在仪表规定的条件下，仪表最大绝对允许误差值相对于仪表测量

范围（即量程）的百分数，即 $G\% = \frac{\Delta}{x_{\max} - x_{\min}} \times 100\%$ ，式中 Δ 为仪表在全刻度范围内最大绝对允许误差，即最大读数误差； x_{\max} 为仪表刻度盘的上限值； x_{\min} 为仪表刻度盘的下限值。我国统一划分的仪表精度等级有 0.005、0.02、0.05、0.1、0.2、0.35、0.4、0.5、1.0、1.5、2.5、4.0 等。例如，某压力表测量范围为 5~25MPa，精度为 1.5 级，其最大读数误差即为压力表最大绝对允许误差， $\Delta = G\% \times (x_{\max} - x_{\min}) = 1.5\% \times (25 - 5) \text{MPa} = 0.3 \text{MPa}$ 。

3) 粗大误差

实验观测值明显超出规定条件下的预期，由此产生的误差称为粗大误差。这种误差往往是由于突然性发生的外界因素引起，比如电压由于过载引起电流陡然升高，恰好此时正在观测读数，数据远远超过正常值。也有一些是由于操作者的粗心大意产生的，比如将 6 读成 9。确切地说，粗大误差其实已不属误差之列，含有粗大误差的测量值又称为坏值，在对实验结果进行数据处理之前，须先行剔