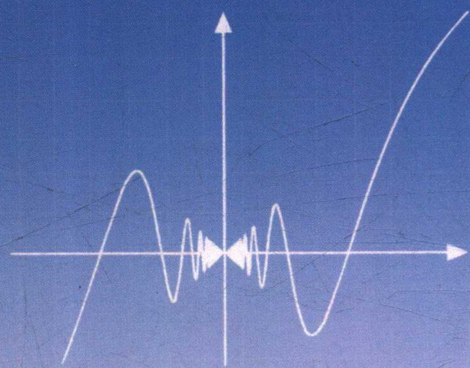
数学分析（一）

主　编　崔国忠
副主编　石金娥　郭从洲



科学出版社

数学分析(一)

主　编　崔国忠
副主编　石金娥　郭从洲

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共三册，按三个学期设置教学，介绍了数学分析的基本内容.

第一册内容主要包括数列的极限、函数的极限、函数连续性、函数的导数与微分、函数的微分中值定理、Taylor公式和L'Hospital法则. 第二册内容主要包括不定积分、定积分、广义积分、数项级数、函数项级数、幂级数和Fourier级数. 第三册内容主要包括多元函数的极限和连续、多元函数的微分学、含参量积分、多元函数的积分学.

本书在内容上，涵盖了本课程的所有教学内容，个别地方有所加强；在编排体系上，在定理和证明、例题和求解之间增加了结构分析环节，展现了思路形成和方法设计的过程，突出了教学中理性分析的特征；在题目设计上，增加了例题和课后习题的难度，增加了结构分析的题型，突出分析和解决问题的培养和训练.

本书可供高等院校数学及其相关专业选用教材，也可作为优秀学生的自学教材，同时也是一套青年教师教学使用的非常有益的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析：全 3 册/崔国忠主编. —北京：科学出版社，2018.7
ISBN 978-7-03-057600-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①崔…Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 113102 号

责任编辑：张中兴　梁　清　孙翠勤 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018年7月第　一　版　开本：720 × 1000　B5
2018年7月第一次印刷　印张：49 1/4
字数：998 000

定价：128.00元(全3册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　言
——基于结构分析的教材与课程设计

“数学分析”是数学及其相关专业的一门非常重要的主干基础课程，近260个总学时，延续3个学期(课堂教学时长和跨度是所有课程中最多、最长的，没有之一)，这足以说明该课程的重要性. 通过该课程的学习，学生不仅掌握后续专业课程所需要的理论基础知识、解决专业问题的理论工具，更重要的是掌握解决问题的数学思想和方法，培养学生的数学素养. 但是，学习这门课程又是很难的，一方面，整个课程内容丰富，理论体系庞大，延续时间长，内容之间的联系非常密切，章节模块之间关联度非常高，累积效应非常强，这些都给课程的学习带来很大的困难；另一方面，数学课程自身的特点，如理论性强、内容枯燥、高度的抽象性、应用的广泛性等，更加使得学生在学习过程中感到困难. 但是，这门课程的学习又是十分重要和必要的，因此，如何教好，又如何让学生学好这门课，是长期从事该课程教学的教员们面临的亟待解决的重大问题.

乘大学教育转型和教学改革的东风，我们利用大学和理学院对基础教学的极度重视和大力支持，在教学改革项目的资助下，我们对该课程的教与学的过程进行了研究，从教学内容、教学方法和手段、课堂的教学组织与实施、辅助教学过程到考核评价方式、考试形式与内容等进行了广泛的探索与实践，这次出版的教材正是我们研究成果的集中体现.

总的说来，本教材有如下特点：

(1) 本教材整体体现了基于本原性问题驱动的课程设计的教学理念.

本原性问题驱动理论就是基于HPM的数学教育思想，抽象形成的数学教育理论，指在数学教育中，还原历史发展的环境，阐述当时历史视角下人类认知发展规律、理论形成、发展的过程，重点解决数学理论为何产生，如何产生，如何构建，如何进一步应用形成的理论解决实际问题，如何在整个理论的教育和学习过程中实现数学能力的培养？其关注的核心内容是：在数学教育中，如何从数学理论、理论产生的历史背景问题、学生的认知规律的三个维度出发，进行高质量的数学教育.

我们知道，数学理论本身的产生与发展就是源于人类在认识自然和改造自然的过程中，对所遇到的实际问题进行的探索与求解以及由此对所形成的解决问题

的思想、方法的高度抽象和高度的完善而形成的完美严谨的理论体系. 数学分析的核心内容——微积分理论, 正是为解决当时历史发展进程中亟待解决的工程技术和应用领域(物理、天文、航海等)中大量的实际问题而形成的, 可以说, 课程教学内容的本身就体现了问题驱动的特性. 而这一特性紧紧与教学改革的能力培养的时代要求相吻合. 我们培养的学生, 将来走上工作岗位后要面对的还是一个个技术问题或实际问题的解决, 虽然这些问题与数学问题的形式不一样, 但是, 整个问题的求解过程, 从思路分析、方法的形成, 到技术路线的确立等环节中所隐藏的思想方法是一样的, 这些解决问题的思想方法正是能力的具体体现, 因此, 在传授知识的同时, 还原该理论的本原性问题的产生环境, 按当时的认知规律模拟问题解决的思想形成过程, 通过关注过程, 关注如何从现实问题实现当时条件下的问题求解, 让学生感受过程, 感受思想, 感受能力而不仅仅是理论本身, 达到能力培养的目标.

基于本原性问题驱动的课程设计贯穿于整个教材的始终, 从课程的绪论——正是以微积分的本原性问题解决为线索, 开始介绍微积分理论的主要内容、解决问题的思想方法, 以及贯穿于课程始终的数学思想, 后续每章内容的引入, 都是以历史发展过程中的本原性问题为出发点, 通过还原理论产生的背景, 解决的过程, 揭示数学理论中所隐藏的解决实际问题的数学思想和方法.

(2) 结构分析法和形式统一法的解决问题的数学思想贯穿于整个教材.

结构分析法和形式统一法是我们在教学过程中总结提炼出来的解决实际问题的一般性研究方法, 是科学研究理论在教学中的具体应用. 任何问题的解决都要经历两个阶段: 解题思想的形成阶段与具体方法和路线的设计阶段. 第一个阶段确立问题解决的方向, 解决“用什么”的问题, 即利用哪个已知的理论解决问题, 由此确立解决问题的思路; 第二个阶段确立具体的方法, 解决“怎么用”的问题, 即设计具体的技术路线, 如何利用已知理论解决问题, 确立解决问题的具体方法.

数学理论的结论(定理)很多, 学生记住这些结论并不难, 难在如何用这些定理结论解决一个个具体的问题, 这是教学过程中的突出问题和难题, 针对于此, 我们经过深入的研究与实践, 提炼出了行之有效的结构分析法和形式统一法.

数学定理很多, 但是, 每个定理都有自己的结构特征, 有自己的作用对象, 要想掌握定理的使用, 必须掌握定理的结构特点, 即定理处理的题型结构是什么, 只有如此, 当我们面对解决的问题时, 先对问题的结构作分析, 找到结构特点, 与已知的定理的处理对象的结构特点作类比, 由此确定使用什么定理和结论. 而在具体的求解过程中, 求解的核心思想是建立已知和未知的联系, 我们类比在思路确立中确定的已知定理, 分析应用过程中要解决的重点和难点, 先从形式上入手, 将待求解的问题从形式上转化为已经确立使用的已知定理或结论的形式, 或建立

已知和未知的联系，使待求解的未知和要使用解决问题的已知在形式上进行统一，进一步形成解决问题的具体方法. 这就是结构分析法和形式统一法的核心内容. 可以将这种方法总结为24字方针：分析结构，挖掘特点，类比已知，确立思路，形式统一，设计方法.

在教材中，对大部分题目都给出了分析过程，在分析过程中，利用结构分析法和形式统一法给出解题的思路和具体的方法设计. 我们不厌其烦地从始至终使用这种方式，不怕重复，目的就是对学生进行数学思维训练的一遍遍的冲击，养成良好的数学解决问题的方式和习惯，培养坚实的数学素养.

(3) 在内容体系上有所变化.

在引入实数系基本定理时，大多教材都是以确界存在定理为公理，建立实数系的其他基本定理. 确界存在定理较抽象，此结论的成立并不明显，以此为公理有些突兀。我们采取Dedekind分割定理为公理，建立实数系基本定理. Dedekind分割定理就是对实数轴的一个具体的分割，形式简单直观，很容易理解。

为了分散极限定义的难度，我们在介绍集合的有界性时，就引入确界的定义，从而，可以使学生更早接触极限定义中非常重要又非常难以理解和掌握的量——“ε”，这是极限定义的灵魂，这样，学生对这个量的认识过程相对较长，把极限的难度进行了分解，也使学生对极限内涵的理解更加深刻.

在教学内容的其他部分上也进行了内容丰富，其中，个别地方还加入了笔者自己的研究心得和体会，如在介绍一致连续时，增加了对一致连续函数特征的更深入的刻画；在级数理论中，给出了一个新的结果，使得对复杂结构的级数的敛散性的判断进行简单化；对贯穿教材始终的Cauchy收敛准则进行的强化和深入的训练，这是体现极限思想的重要成果之一，学生必须掌握；这样的变化在教材中还有很多.

(4) 在教材的编排形式上有所变化，将数学思维和数学素养的培养、解决问题的实际能力的培养融入教材，体现学案式的教材设计理念.

现有的通用教材强调理论体系的较多，以教为主的多，以理论知识的传授为主的多，我们一直想变一变，转变理念，将理论知识的传授与能力的培养、数学思维和素养的熏陶相结合，突出以学为主，为学生提供一套“学案”，而不仅仅是教师所用的教材或教案，我们希望这套教材也可以称之为这样的学案. 这样的设计思想和理念体现在我们对教学内容的编排设计和对整个教材的设计上.

在内容的编排上，我们突出了分析和总结过程，体现对能力培养的设计思想；这样的编排是希望学生从模仿开始，直到可以独立地进行对教学内容的分析和总结，对数学思想的归纳和提炼，对解题方法的分析和理解，从理解给出的问题开始，到独立地去发现问题、分析问题和解决问题，这是一个循序渐进的过程，我们

的教材设计体现这个过程.

(5) 教材中还引入了一些新词汇.

这些词汇有些源于现代分析学, 如挖洞法、扰动法、降维法等, 有些是借用, 如坏点、聚点、可控性、定性分析、定量分析等; 也引入了一些新的表示方法, 如表示双侧曲面侧的有侧(向)曲面、有侧投影, 表示双侧曲面的表示方法 $\vec{\Sigma}$, 第二类曲面积分的表示方法如 $\iint_{\vec{\Sigma}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 区分平面区域上的二重积分等.

教材还有其他的一些特点, 如在课后习题的设计上增加了难度, 引入了一些考研题目, 作者在教学过程中自己设计了一些题目, 增加了结构分析的题型, 学生可以通过学习逐渐去领会.

这套教材是我们辛苦工作的成果, 虽然几年前就已经成型, 一遍遍地试用, 总想让它十分完美, 当然, 这是不可能的, 因为每次使用后总感觉还有新的感悟, 需要增加新的东西, 需要在表达的准确性、逻辑性上做进一步的精雕细琢, 这就是所谓的精益求精吧; 这个过程是无止境的, 任何事物总是在发展, 在前进, 没有终结篇, 我们只能给出阶段性的成果; 我们也希望通过阶段性成果的公开出版, 接受同行、学生的检验和批判, 以改进我们的工作. 因此, 不当之处敬请批评指正, 不胜感激.

作　者

2017年11月

目　　录

数学分析引言

数学分析是研究变量(函数)的一门数学学科，这和中学以常量为研究对象的数学形成了对比.

我们知道，数学是人类在认识和改造自然的实践活动中高度抽象出来的科学理论，是一门研究数量关系和空间形式的科学，而数量关系和空间形式正是一切现象的存在形式和本质，从这个意义来说，数学就其起源已经体现了与自然界丰富多彩的、紧密的联系. 作为研究变量(或变量关系)的最基础学科的数学分析，其核心内容正是人类在解决 17、18 世纪大量涌现的物理、几何、天文及航海等复杂的现实问题和工程技术问题中发明(现)的数学理论. 如果说初等数学是以研究自然界中静态的、简单的数量关系为主，那么，从数学分析开始，数学就将进入了以研究自然界中变化着的、复杂的变量关系和空间形式的研究领域了.

那么，数学分析的核心内容是什么？这一理论体系又是如何从 17、18 世纪的实际问题的求解中抽象出来的？理论体系中又体现了什么样的处理实际问题的数学思想？让我们沿着历史的发展轨迹，以重点关注解决问题的数学思想为主线，追寻一下数学分析产生的历史根源.

数学发展历史的源头应该可以追溯到数字的形成，原始人在早期的采集和狩猎活动中应是逐渐注意到了一条鱼和许多条鱼、一个果子和许多果子在数量上的差异，也逐渐注意到了两只羊和两条狗在数量上的共性，将这种认识抽象出来就形成了数的概念，数的概念的形成可能与火的使用一样古老，对人类文明发展的意义也不亚于火的使用. 原始人的集体狩猎必然要进行的成果分配、社会的组织与分工、对自然界的再认识等一系列活动相应促进了数及数的运算的发展，逐渐形成了算术. 而对于形的认识也促进了几何学的产生与发展，当然，这是一个漫长的过程. 在这个过程中，从古埃及、古希腊、古印度到中国，世界各地的劳动人民都对数学发展做出了巨大的贡献.

但是，以变量数学为标志的近代数学的产生却仅仅是几百年以前的事. 14 世纪，文艺复兴伴随着资本主义的萌芽，促进工场手工业和商品经济的发展，也对用于改造自然的科学技术提出了新的要求，出现了一些新的研究问题和研究领域，如：为提高效率而促进手工业向机械工业的发展需要解决一系列运动问题，贸易的发展促使航海工业的发展，需要解决大量的运动及天体运行规律的问题等. 到 16 世纪，对运动和变化的研究已变成自然科学的核心问题，由此促进了变量数学

的发展, 诞生了近代数学.

变量数学发展的里程碑是解析几何的发明, 解析几何的基本思想是将几何与代数紧密结合起来, 将几何量用代数形式表示, 用代数的方法解决几何问题. 解析几何将变量引入了数学, 使得用数学的语言描述运动和变化发展的客观事实成为可能, 也为微积分的产生奠定了基础.

17 世纪, 自然科学领域有大量的问题亟待解决. 天文望远镜的发明为天文研究打开了一扇新窗口, Kepler(1571～1630, 德国天文学家, 提出行星运动三大定律, 终结传统的周转圆理论, 开创天文的新纪元)公布了通过观测得到的行星运动三大定律; Galileo(1564～1642, 意大利物理学家、天文学家、哲学家、发明家, 发明了温度计和天文望远镜, 是近代实验物理学的开拓者, 被誉为“近代科学之父”)研究了自由落体运动和炮弹的最大射程问题; 望远镜的设计需要确定透镜曲面上任一点的法线, 如此等等, 一系列重大问题必须要得到准确的、科学的回答. 这些问题主要可以归结为四种类型: 一是研究运动物体的速度和加速度; 二是计算曲线的切线; 三是求函数的最大(小)值; 四是求曲线所围的面积、曲面所围的体积等. 由此可以看出, 自然科学中的实际应用问题最终抽象成了数学问题. 这些问题吸引了当代数学家, 他们解决这些问题的出色的工作, 使得数学分析的核心内容——微积分得以诞生, 其中最杰出的工作应归功于英国科学家 Newton 和德国科学家 Leibniz, 显然, 他们是站在巨人肩膀上发明了微积分, 这些巨人包括 Galileo、Kepler、Cavalieri、Descartes、Fermat、Barrow 等一大批同样杰出的科学家.

让我们再次回到上面的四种类型的问题, 按现在的观点, 前三类属于微分学, 最后一类属于积分学. 现在让我们以其中的两个问题为例, 通过对这两个问题置于当时条件下的研究和解决, 体现用数学理论解决实际问题的思想和方法, 由此说明微积分产生的背景.

问题一 直线运动物体的瞬时速度(率)问题.

数学建模抽象为数学问题 已知直线运动物体的距离 s 与时间 t 的关系式 $s=s(t)$, 计算物体在任一时刻 t_0 时的速度(速率) $v_0=v(t_0)$.

研究及求解过程分析 这个在今天看来非常简单的问题, 在当时历史条件下是世界性难题, 让我们合理设置当时的问题情境.

1. 思路确立

类比已知 首先类比与求解的问题关联最紧密的已知理论, 这是问题求解的第一步, 即确定思路, 明确用什么理论解决问题.

可以设想, 也是一般性的认知规律, 人们对运动物体的认识是从最简单、最特殊的情形开始的. 最简单的情形是匀速直线运动, 此时, 路程、速度、时间三者的

关系最简单，可以通过实验观察得到 $s=vt$ 或 $v=\dfrac{s}{t}$，此时，v 是常数，要计算 v，只需测量一下在时刻 t 内物体运动的距离 s 即可.

因此，在研究问题一时，我们假设所掌握的已知的理论工具仅仅是匀速直线运动物体的速度公式.

认知规律 因而，问题一是在认识了简单的匀速直线运动后对物体运动认识的自然发展，符合人类的认知规律. 那么，如何认识和计算变速直线运动物体的速度？显然，此时物体在任一时刻的运动速度都不相同，自然需要引入一个新的概念来刻画它，这就是瞬时速度，简称为速度.

那么，如何计算瞬时速度？此时，已知的理论基础只有匀速直线运动物体的速度计算公式，没有直接计算瞬时速度的公式. 为了解决这个问题，我们从科学研究的方法论的角度出发，结合人类的认识规律，简单梳理一下实际问题解决的数学思想和过程，设计具体的求解技术路线.

近似研究 我们知道，虽然数学是最讲究严谨准确的学科，但是，在用数学理论解决实际问题的过程中，也同样遵循人类的认知规律，即对陌生事物的认识都是从模糊、近似，到逐步精确，直到准确地认识规律和过程，要涉及近似、精确和准确的关系处理. 一方面，科学和技术中尽量追求准确，只有准确，才能准确刻画自然现象，达到对自然现象的准确认识；另一方面，追求绝对的准确是没有意义的，也是不可能的；因为对自然现象的认识本身就是近似的，这表现在描述自然现象的数学模型的建立过程中已经忽略了一些次要因素，或视为理想状态，已进行了一些近似. 比如，自由落体物体路程公式 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的建立，就忽略了空气的阻力；电荷称之为点电荷是将其视为一个没有大小的点，如此等等；近似还表现在模型的求解过程中，特别是对复杂模型的求解. 一般来说，数学模型的解析求解或准确数值解是很困难的，甚至是不可能的，大多数情形是计算近似解；近似还表现在实际操作和应用过程中，因为即使得到了准确解，在应用中由于工具和技术的限制也不可能达到完全的准确. 如坦克的设计，要在威力、射程、综合能力等各项指标上进行优化设计，以达到某种需求. 中国 99 式主战坦克，采用125毫米滑膛炮，炮管长度是口径的50倍，达到6.25米. 在实际制造中，由于技术上的误差，最终制造出来的炮管口径并不是严格科学意义上的 125 毫米，制造工艺总会造成一定的误差；同样，截得的炮管长度也不会是严格意义下的 6.25 米，也有误差. 还有，我们知道圆的面积计算公式是 $S=\pi r^2$，由于 π 是无理数(无限不循环小数)，因此，要得到圆的面积的准确值是不可能的，同样，寻求球的体积的准确值也是不可能的. 因此，认识和改造自然的每一步都蕴涵了近似的处理思想.

所以，追求绝对的准确是“没有意义的”. 即使现在是数字化时代，这也是某种近似下的数字化，当然，这绝对不能否定准确的科学意义. 同时，在实际应用中，过度追求精确和准确还存在一个制约因素——成本因素. 在实际应用中，越是追求精确、准确，需要付出的成本越高，取得的效益就会受到制约，因此，实际应用中，我们要做到的是准确、精确、近似之间的协调与平衡，以便达到实际应用中所追求效益的最大化. 再举一个例子，对常规武器的设计，必须追求精度，如导弹的精度要以米级设计，而原子弹等核武器的命中精度就没有必要追求如此高的精度，以便降低成本. 因此，从实践中来到实践中去的数学理论的循环发展过程中隐藏了深刻的近似的数学思想，我们认识数学，不论从研究和解决问题的思想方法上，还是从数学理论上，都应该理解和把握“近似的思想”. 当然，“近似思想的数学不是一种近似的数学而是关于近似关系的数学.”

因此，严谨的数学理论，正是从近似研究开始，进而研究在如何由近似到达精确、准确的过程中，抽象和发展而形成的理论体系. 我们现在开始学习的数学分析，正是体现近似思想、近似研究的严谨准确的数学理论. 由此确定了对问题进行近似研究的思路.

2. 技术路线设计

再回到变速直线运动物体的瞬时速度的问题上来. 利用近似研究的思想，在得到准确的瞬时速度之前，先从近似研究的角度对问题进行求解，为此，考虑引入一个近似替代量.

这决定了问题求解的思路——从近似研究开始. 利用这个思路，再进一步决定求解的技术路线，设计具体的研究方法.

技术路线的确立需要分析已知的条件和要证明的结论，这里所说的分析是指从各个角度挖掘条件和要证明的结论中隐藏的信息，寻找它们的结构特点，以便找出二者之间的联系，搭建从已知到未知的桥梁.

分析问题一的已知条件，此条件是“匀速直线运动物体的速度计算公式”，这个公式描述了一段时刻的运动速度，“一段时刻”在时间轴上从几何上看对应的是一个区间段，从公式的代数形式看具有平均的意识；而要求解的瞬时速度是某一时刻的速度描述，“某一时刻”在时间轴是一个点；因而，近似求解的思路是如何将变速运动问题的某一时刻(局部)的瞬时速度转化为匀速问题的速度进行计算，以便利用已知的公式近似求解. 比较二者的区别与联系，要解决的核心问题是，如何将“一个点”转化为“一段”，如何将某时刻点处的瞬时速度转化为某一段的匀速的速度. 当然，“点”和“段”是有明显的区别，用“一段”精确表示“一点”是不可能的，但是，若考虑到实际问题的研究是先求近似解，即从近似角度出

发很容易确定思路——用“一段”近似代表“一点”. 于是, 利用掌握的平均的概念, 引入瞬时速度的一个近似量——平均速度, 即先计算包含某一时刻的某个时段内的平均速度, 用此平均速度近似代替这个时刻的瞬时速度, 由此得到瞬时速度的一个近似, 这样, 从近似角度就可以解决问题一. 当然, 选择包含某一时刻的时段的方式不同, 可以得到不同的近似方法, 这是具体的技术路线问题. 先解决局部问题, 然后再过渡到具体的“点”, 正是从近似到准确的认识规律的体现.

现在, 我们计算物体在 t_1 到 t_2 时段内的平均速度 $\overline{v}(t_1,t_2)$, 自然可引入公式

$$\overline{v}(t_1,t_2)=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}.$$

显然, 此时还不能准确计算 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$, 但是, 对运动物体的认识, 已经从匀速运动过渡到了对变速运动的认识, 尽管此时的认识还是一个模糊的近似的认识; 剩下的问题就是如何从近似进一步追求精确、最终达到准确.

在研究瞬时速度 $v(t_0)$ 时, 首先得到了平均速度, 借助平均速度, 很容易给出 $v(t_0)$ 的一个近似, 比如, 我们采用如下近似:

$$v(t_0)\approx\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t),$$

而 $\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t)$ 完全可以通过测量手段和匀速的速度公式得到, 其中 Δt 为选取的一个时间段; 当然, 取不同的 Δt, 得到的 $v(t_0)$ 的近似值也不相同, Δt 越小, $\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t)$ 越近似于 $v(t_0)$, 即二者的误差就越小, 至此, 我们获得了一种求得 $v(t_0)$ 近似值的方法, 初步解决了瞬时速度 $v(t_0)$ 的计算问题.

至此, 从近似角度解决了问题一.

3. 问题进一步发展——从近似到准确

探知问题的真谛是科学家的职责和追求. 如何通过上面的近似值求得其准确值, 在理论研究和实际应用中都具有非常大的意义, 众多科学家为此做了大量的工作, 推动了 17 世纪数学的发展, 由此发明的微分学理论便是数学分析的核心内容之一.

其解决的关键理论, 在今天看来非常简单, 就是引入极限. 由 $v(t_0)$ 和 $\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t)$ 的定义可知, 当 Δt 越小时, $\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t)$ 就越接近于 $v(t_0)$, 因而, 我们可以猜想, Δt 趋近于 0 时, $\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t)$ 趋近于 $v(t_0)$, 借用极限符号表示为

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}(t_0,t_0+\Delta t),$$

将此式用已知的路程函数表示为

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

这样，瞬时速度就可以利用路程函数借助极限工具计算出来.

至此，问题一得到解决.

4. 结论的抽象与总结

事实还不仅如此，观察上述的极限结构，$\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 正是函数增量与引起函数增量的自变量增量的比值；而借助于这种由近似到精确、准确的处理问题的思想，自然界中很多量(如速度、加速度等各种反映变化快慢的变化率)都可以转化为如上形式的函数增量与自变量增量的比值的极限. 数学重要的功能之一就是高度的抽象性，因此，在研究解决大量的上述类似的具体问题过程中，将各种问题的背景去掉，经过数学上的高度抽象之后，将函数增量与自变量增量的比值的极限抽象形成了数学上的导数的概念，因此，借助于导数的定义，则

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=s'(t_0),$$

于是，利用导数的计算公式，速度问题得到解决. 而对函数的导数进行系统的研究就形成了微分理论，这是数学分析的核心内容之一. 由此可以看出，微分理论正是在研究大量的类似于上述问题过程中，从近似到准确抽象而形成的严谨的数学理论.

问题二 平面封闭曲线所围的面积问题.

数学建模抽象为数学问题

问题简化 对问题简化是问题研究的第一步，这是一般性的科学研究思想方法.

类比已知，可以将任意平面封闭曲线所围的面积转化为曲边梯形面积的代数和(为何这样转化见图 1 的分析)，因而，问题二的本质问题是曲边梯形的面积问题，抽象为数学问题：设 $y=f(x)>0, x\in[a,b]$，计算由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及坐标轴 $y=0$ 所围图形的面积.

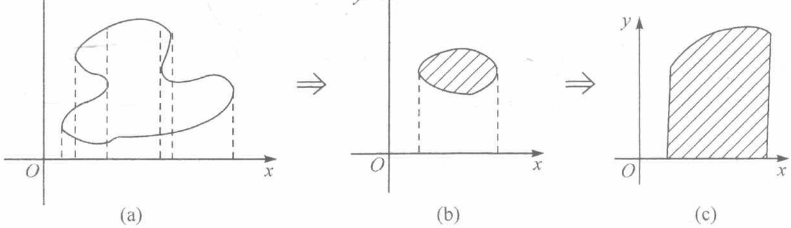


图 1