数学物理方法

罗 光 主编

科学出版社

数学物理方法

主　编　罗　光
副主编　胡爱元　万步勇

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据当前高校课程改革的要求，为适应少课时的数学物理方法的学习和教学，在对课程所涉内容结构重新整合的基础上编写而成. 本书主要内容包括：复变函数微积分学、幂级数基础及在微分方程中的应用和留数定理、数学物理方程基础简介、积分变换及其应用、数学物理方程的五类求解方法简介.

本书可作为高等院校（特别是各地方高校）理工类相关专业“数学物理方法”课程的教材和参考书，尤其作为少课时的“数学物理方法”课程的教材，也可作为自学“数学物理方法”的入门教材.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法 / 罗光主编. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055968-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①罗… Ⅲ. ①数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 314830 号

责任编辑：胡云志 滕 云 / 责任校对：王 瑞

责任印制：吴兆东 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2018 年 1 月第一次印刷 印张：10 1/4

字数：210 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

为响应国家提出的高等学校应该培养更多的创新型人才这一号召，各高校教学改革也正处于一个关键的历史时期. 高校的改革举措也向两个方向发展：一是传统课程学时减少甚至取消；二是新课程不断增加. 与此相应地，学生的学业压力也越来越大. 为适应当前的教学改革，各高校也相继对各课程的教学课时进行了大幅度压缩.

数学物理方法的教学课时当然也受到极大影响. 在 20 世纪末，数学物理方法课程的教学一般都分成两个学期进行，然而进入 21 世纪以来，这门课程的课时就开始缩减了. 教学课时先由 100 多课时减至 90 多课时，然后减至 80 左右的课时. 针对这种趋势，教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理学类专业教学指导分委员会在 2011 年制定了《高等学校物理学本科指导性专业规范》，对于数学物理方法的教学给出了一个最低 64 学时的教学限制. 但是依然无法控制教学学时减少的趋势. 本书编写组正是基于此形势，提出少课时的数学物理方法的研究。

正是基于此背景，编者在参考《高等学校物理学本科指导性专业规范》(2011) 的内容要求以后，结合普通高校(特别是各地方高校)学生的数学基础较差的特点，开始了对数学物理方法教学目标和教学内容的深入研究，在参考了文献[1]～[8]的基础上，对数学物理方法各知识板块进行了重新分析，并对结构进行了重构，且在基于此内容组织的两个年度的教学实践基础上，形成定稿，编写出本书.

与传统的数学物理方法教材相比较，本书具有以下特点：

(1) 弱化数学内容的介绍. 数学物理方法以数学中的复变函数论和偏微分方程的知识作为主要内容. 传统的数学物理方法一般在第一部分就是复变函数，实质是纯数学的. 为适应目前形势，本书复变函数论部分只介绍那些必不可少的内容，而有些内容与实变函数部分相对比直接给出相关结论. 基于此，本书只针对以下几个问题进行简单介绍：复变函数基础(函数的导数和解析函数)、柯西积分定理和积分公式、幂级数和洛朗级数、留数定理、傅里叶级数和傅里叶变换的基础. 并且把复变函数基础(函数的导数和解析函数)、柯西积分定理和积分公式作为第一章的主要内容.

(2) 简单介绍如何建立数学物理方程的过程. 因为物理中有些相关课程会涉及方程的建立，比如量子力学中涉及的薛定谔方程、力学中涉及的波动方程等，所以其他大部分方程就直接给出. 这一部分作为第三章的主要内容，并且精简了该部分内容并缩减了篇幅.

(3) 简单介绍方程的求解方法. 这些方法涉及分离变数法、行波法、积分变换法、格林函数法、变分法. 介绍时不求面面俱到, 只求理解方法精髓, 在今后碰到类似问题可以求解即可. 这是因为在很多后续物理课程中都有详细的方法介绍. 比如“电动力学”会有专门一章介绍格林函数法, “量子力学”中也有专门章节介绍变分法等.

(4) 把常微分方程的求解与幂级数中的泰勒级数和洛朗级数的应用结合在一起, 把常微分方程的求解问题在第二章(幂级数)解决了. 一方面这令学生更好地理解幂级数的应用问题, 使抽象理论与实际应用很好地结合在一起; 另一方面也使传统中的数学物理方程与复变函数论更有机地融合为一体.

(5) 针对学生在学习数学物理方法时的困惑——知识点懂了, 但不会做题, 本书每一部分内容都有例题和对应的习题. 因此, 较多的例题和习题也是本书的又一大特点.

具体而言, 本书的各章节内容主要安排如下:

第一章为复变函数微积分学, 包括复变函数基本概念、常见的简单函数介绍、复变函数的导数和解析函数、复变函数的路径积分、柯西定理和柯西积分公式.

第二章为幂级数及其应用, 包括幂级数基本概念、解析函数的泰勒展开及其在微分方程中的应用、解析函数的洛朗展开及其应用(此应用涉及孤立奇点的类型的判定、留数的计算和应用、洛朗级数在常微分方程中的应用).

第三章为数学物理方程及定解问题简介, 包括数学物理方程的分类、初始条件、边界条件、定解问题及定解问题的适定性.

第四章为积分变换及其应用, 包括傅里叶级数、傅里叶变换及其性质简介、拉普拉斯变换及其性质简介、拉普拉斯变换在常微分方程中的应用.

第五章为数学物理方程的求解方法简介, 包括达朗贝尔公式法、分离变数法、积分变换法、格林函数法、变分法等.

由于编者水平有限, 书中难免有疏漏和不当之处, 敬请读者批评指正.

编　者

2017 年 6 月于重庆

目　　录

第一章　复变函数微积分学

复变函数微积分学是复变函数论中最基础的内容，也是数学物理方法中最基础的内容. 本章介绍的内容主要包括复变函数基本概念、常见的简单函数介绍、复变函数的导数和解析函数、复变函数的路径积分、柯西定理和柯西积分公式. 要熟练掌握本章的内容，必须具备的数学基础主要有一元实变函数性质、极限、导数、不定积分和定积分，以及二元实变函数的偏微分、带方向的路径积分、积分与路径无关的条件等.

第一节　复数及其运算

一、复数的引入

对于一元二次方程 $x^2+x+1=0$，它在实数范围内无解. 但是如果扩大数域至复数域，此时方程有两个解，分别为 $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 和 $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，其中 i 被定义为虚数单位. 并且定义形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数为复数(其中 a 和 b 均属于实数)，且 a 称为复数的实部，表示为 $a=\mathrm{Re}(a+b\mathrm{i})$，$b$ 称为复数的虚部，表示为 $b=\mathrm{Im}(a+b\mathrm{i})$，此形式也称为复数的代数式. 所有复数构成的集合称为复数域.

二、复数的表示方法

1. 复数的几何表示

复数 $a+b\mathrm{i}$ 也可以用有序数对 (a,b) 来表示，可以构造一个复平面，其横轴称为实轴，用 x 表示，纵轴称为虚轴，用 y 表示. 在这个复平面上，有序数对 (a,b) 对应复平面上的特定点，如图 1-1 所示. 因此，在复平面上的点 $A(a,b)$ 表示一个复数，一个复数在复平面上对应唯一点. 连接 OA 得复矢量 $\overrightarrow{OA}$，此矢量的长度即复数的模 $|a+b\mathrm{i}|$，用 ρ 表示，该矢量与 x 轴的夹角称为辐角 $\mathrm{Arg}(a+b\mathrm{i})$，用 θ 表示，即

$$\theta = \mathrm{Arg}(a+b\mathrm{i}) = 2k\pi + \arctan\frac{b}{a} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

如果 $\theta \in [0, 2\pi)$，则称之为辐角主值，用 $\theta = \arg(a+b\mathrm{i})$ 表示.

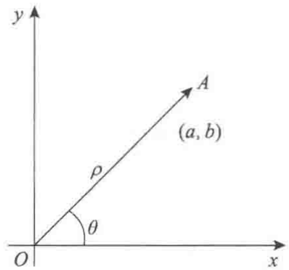

图 1-1　复数的几何表示

2. 复数的其他表示

1) 复数的三角式

由于

$$a + b\mathrm{i} = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

所以称 $\rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 为复数的三角式. 由于 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的周期性，一个复数在复平面上的点与复数的三角式不是一一对应关系.

2) 复数的指数式

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

可把复数 $a + b\mathrm{i}$ 化为指数形式 $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 由于

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

即指数函数的周期性，一个复数在复平面上的点与复数的指数式也不是一一对应关系.

在复数的有关计算中，最后结果一般要表示为三种形式中的一种. 其中，由代数式可以看出复数的实部和虚部，而通过指数式和三角式，可立即得到复数的模和辐角，它们均可以认为是最简形式.

例 1　令复数 $z = x + \mathrm{i}y$（其中 x 和 y 均属于实数），则 $|z| + \mathrm{Re}\, z \leqslant 1$ 在复平面上表示怎样的几何意义？

解　因为

$$|z| + \operatorname{Re} z = \sqrt{x^2 + y^2} + x \leqslant 1$$

即 $y^2 \leqslant 1 - 2x$，故表示抛物线 $y^2 = 1 - 2x$ 及其内部.

例 2　化简 i^{i}.

解　由于

$$\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

故

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

三、无穷远点

正如 0 是复平面上的一个点，$\dfrac{1}{0}$ 在复平面内也表示一个点, 这个点称为无穷远点. 0 的辐角可以为任意值, 无穷远点也一样, 其辐角也可以为任意值.

无穷远点也可以通过黎曼球面来理解: 如图 1-2 所示, 在复平面上原点处放一个与其相切的球面(这种球面称为黎曼球面), 球面的顶点称为北极点 N, 针对复平面上的某个点 A' (对应一个复数), 连接测地线 NA'，必然与球面有一个交点 A，而且这样的交点与复平面上的点是一一对应的. 随着 A' 离 O 点的距离越来越远, A 也将越来越靠近北极点 N, 当 A' 离 O 点的距离为无穷大时, 可以推知, 复平面上以 O 点为圆心、半径为无穷大的圆周上的所有点都将只对应 N 点. 为了保持球面上的点与复平面上的点的一一对应关系, 特别称复平面上的无穷远为一个点, 称为无穷远点.

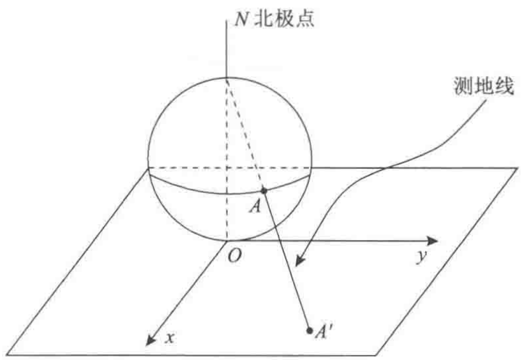

图 1-2　黎曼球面

四、复数的运算

1. 两个复数相等

两个复数可以比较是否相等：实部和虚部对应相等的两个复数相等. 但是，两个复数不可比较大小. 例如 i 与 0 相比较，如果 $\mathrm{i}>0$，则两边同乘以 i，得 $\mathrm{i}^2>0$，即 $-1>0$，显然不成立，反之亦然，所以两个复数不可比较大小.

2. 两个复数相加减

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$$

由于 z_1，z_2 也可用复矢量表示，所以复数的加减也遵循对应的平行四边形法则和三角形法则.

3. 两个复数的乘法

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$$

若 $z_1=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

4. 两个复数的除法

设 $z_2\neq 0$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

若 $z_1=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

5. 乘幂运算

由复数的乘法和除法运算看出，采用三角式或者指数式会使运算更加简单，

乘幂运算也常采用三角式或者指数式.

若 $z=\rho e^{i\theta}$，则

$$z^n=\rho^n e^{in\theta} \quad 或 \quad z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

这里 n 为正整数.

6. 开方运算

在辐角主值范围内，开平方运算有两个根，即

$$\sqrt{z}=\sqrt{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)} \quad (k=0,1)$$

开立方运算有三个根，即

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad (k=0,1,2)$$

$$\cdots\cdots$$

n 次方根运算有 n 个根，即

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z}&=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\\&=\rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k=0,1,2,3,\cdots,n-1)\end{aligned}$$

7. 复数的共轭

复数 z 的共轭 $z^*=(x+iy)^*=x-iy$，当 $y\neq 0$ 时，z^* 与 z 是线性无关的. 易验证：

$$z^*z=|z|^2=x^2+y^2$$

注　由于复数可以用实部和虚部表示，所以复数的研究往往归结为一对实数的研究. 对于复数数列的有关讨论也可以完全照搬实数数列的有关讨论，因此本书就不针对复数数列作专门讨论了.

习题 1.1

1. 令复数 $z=x+iy$（其中 x 和 y 均属于实数），则下列表达式在复平面上表示

怎样的几何意义？（其中 a,b,c 均为复常数，α,β 为实常数）

(1) $|z-a|+|z-b|=c$；　　(2) $|z-a|=|z-b|$；

(3) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=2$；　　(4) $\alpha<\arg z<\beta,\quad 2<\operatorname{Re}z<5$.

2. 请表示出下列复数的代数式、三角式和指数式：

(1) i；　(2) 2；　(3) $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}$；　(4) $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$；

(5) $\frac{1}{2+\mathrm{i}\sqrt{3}}$；　(6) $\frac{1}{2-\mathrm{i}\sqrt{3}}$；　(7) i^{i}.

3. 计算下列数值：

(1) $(-1)^{\frac{1}{4}}$；　(2) $\cos 4\theta$；　(3) $\sin 4\theta$；

(4) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}$；　(5) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$；

(6) $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$.

第二节　复变函数的基本概念

一、区域

在介绍区域概念前，需要先掌握以下概念.

邻域　在复平面上以 z_0 点为中心，任意小的正数 ε 为半径作圆，圆内部的所有点构成的集合称为 z_0 的邻域.

点集 E 的**内点**　如果 z_0 及其邻域内的点均属于点集 E，称 z_0 为 E 的内点.

点集 E 的**外点**　如果 z_0 及其邻域内的点均不属于点集 E，称 z_0 为 E 的外点.

点集 E 的**边界点**　如果 z_0 及其邻域内的点总有属于点集 E 的点，也总有不属于点集 E 的点，称 z_0 为 E 的边界点. 所有边界点构成的集合为 E 的边界线.

我们称点集 E 为**区域**，指点集 E 内的点满足这样两个条件：①全由内点组成；②点集 E 内的点满足连通性（点集 E 内的点与点之间可以用一条曲线连接起来，且这曲线上的点全为内点）. 区域一般用 B 表示.

闭区域　由区域和边界线组成的集合，一般用 $\overline{B}$ 表示. 因此，闭区域其实不是区域.

例 1　如图 1-3 所示，B 为区域，z_1 为 B 的内点，z_2 为 B 的边界点，z_3 为 B 的外点，$B+L=\overline{B}$，且有 $z_2\notin B$.

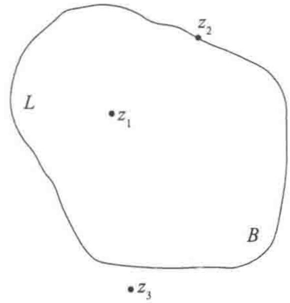

图 1-3　点与区域

二、复变函数的定义

定义 1　若对于复平面上点集 E 中的每一个 z 点(其中 $z=x+\mathrm{i}y$ 且 x 和 y 均属于实数)，按照一定规则在另一复平面点集 Q 中有一个或者多个 w 点与之对应，则称 w 是 z 的函数，记作 $w=f(z)$ 且 $z\in E$. 其中，z 为 w 的宗量，点集 E 为定义域，点集 Q 为值域.

上述 $w=f(z)$ 即为复变函数. 值 w 也是一个复数，类似地，也可以用实部和虚部来表示：

$$w=f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

所以，今后分析复变函数的性质和特点时，一般归结为分析 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的性质和特点.

三、常见的复变函数及性质简介

1. 幂函数 $f(z)=z^n$ (n 为正整数)

如

$$f(z)=z^2=x^2-y^2+\mathrm{i}\cdot 2xy$$

此时

$$\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy\end{cases}$$

可以看出，实部和虚部均对应不同的双曲面.

2. 指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$

由于 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，此时

$$\begin{cases}u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y\\ v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y\end{cases}$$

且如果固定 x，$\cos y$ 和 $\sin y$ 均以 2π 为周期的函数，可知 e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的函数：

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

3. 对数函数 $f(z)=\ln z$

选 z 的指数式表示，则

$$f(z)=\ln z=\ln[\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}]=\ln\rho+\mathrm{i}(\theta+2k\pi)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

即 $\ln z$ 为多值函数，且

$$\begin{cases}u(\rho,\theta)=\ln\rho\\ v(\rho,\theta)=\theta+2k\pi\end{cases}$$

例如，

$$f(z)=\ln(-1)=\ln|-1|+\mathrm{i}[\arg(-1)+2k\pi]=2k\pi\mathrm{i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

4. 三角函数

正弦函数 $\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$，　　余弦函数 $\cos z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$，

正切函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$，　　余切函数 $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$，

正割函数 $\csc z=\dfrac{1}{\sin z}$，　　余割函数 $\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$，

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}\,z=\dfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}$，　双曲余弦函数 $\mathrm{ch}\,z=\dfrac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}$.

上述三角函数书写形式与实变函数中的三角函数类似，但性质不完全一致. 在复变函数中，三角函数具有如下性质：

(1) 这些函数均为周期函数，其中 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的周期为 2π.

(2) 不满足 $|\sin z| \leqslant 1$ 和 $|\cos z| \leqslant 1$，不满足 $|\sec z| \geqslant 1$ 和 $|\csc z| \geqslant 1$.

(3) 满足三角恒等式，比如

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \tan^2 z + 1 = \sec^2 z$$

5. 一般幂函数 $f(z) = z^s$（s 为复数）

由

$$f(z) = z^s = \mathrm{e}^{s\ln z} = \mathrm{e}^{s[\ln|z| + \mathrm{i}(2k\pi + \arg z)]} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

可知，一般幂函数也为多值函数. 多值函数问题请参阅其他教材（如参考文献[1]—[3]和[5]），本书不做讨论.

由于函数 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，所以可把对 $w = f(z)$ 的讨论转化为对二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的讨论，实变函数中的极限和连续思想基本可以照搬过来. 这里就不再介绍了.

例 2　证明 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

证明

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4} = 1.$$

例 3　解方程 $(z^3 - 1)(z^2 + z + 1) = 0$.

解　由方程 $(z^3 - 1)(z^2 + z + 1) = 0$，得

$$z^3 - 1 = 0 \quad 或 \quad z^2 + z + 1 = 0$$

根据 $z^3 - 1 = 0$ 得 $z^3 = 1$，从而得

$$z_{1,2,3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0,1,2)$$

根据 $z^2 + z + 1 = 0$ 得

$$z_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

即方程有五个根：

$$z_{1,2,3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}\ (k = 0,1,2), \quad z_{4,5} = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

习题 1.2

1. 解方程 $(z^4+1)[z^2-(2+3\mathrm{i})z+1+3\mathrm{i}]=0$.
2. 解方程组 $\begin{cases} z_1-\mathrm{i}z_2=1+\mathrm{i}, \\ z_1+\mathrm{i}z_2=2-3\mathrm{i}. \end{cases}$
3. 解方程 $\cos z=2$.

第三节　复变函数的导数

一、导数的定义

设函数 $f(z)$ 在区域 B 上单值且连续, 对于 B 内任一点 z，下列极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在, 且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关, 则称函数 $f(z)$ 在点 z 处可导, 此极限即为点 z 处的导数(或者微商), 记作 $f'(z)$ 或者 $\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$. 由于 z 为区域 B 内的任意一点, 所以, 导数 $f'(z)$ 也称为区域 B 内的导函数, 简称导数.

例 1　用导数定义求函数 $f(z)=z^2$ 的导数.

解　$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{z^2+2z\Delta z+(\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=2z.$

二、求导规则和求导公式

由例 1 知, 函数 $f(z)=z^2$ 的导数与实函数中的导数形式完全一样. 实际情况也的确如此, 实变函数中导数的规则和公式往往可以用于复变函数. 因此下列公式和规则也可以证明是对的.

$$[f_1(z)\pm f_2(z)]'=f_1'(z)\pm f_2'(z)$$

$$[f_1(z)f_2(z)]'=f_1'(z)f_2(z)+f_1(z)f_2'(z)$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]'=\frac{f_1'(z)f_2(z)-f_1(z)f_2'(z)}{f_2^2(z)}$$