国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

现代数学基础丛书 174

代数K理论

黎景辉 著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 174

代数 *K* 理论

黎景辉 著

首都师范大学
北京成像技术高精尖创新中心

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书介绍代数 K 群的结构和性质. 我们从一个环 R 的 K 群 $K_0(R)$, $K_1(R)$, $K_2(R)$开始, 接着构造 Quillen 的高次 K 群, 介绍 Waldhausen 范畴的 K 理论和概形的 K 群. 为了方便学习, 我们补充了所需的代数和同伦代数的基本知识, 并介绍了模型范畴理论. 最后介绍了 Grothendieck 的原相理论, 并叙述了利用 K 理论来表达关于代数圈的一组为国际数学家所亟待解决的问题.

本书适合具备基础代数知识的数学系和理论物理系的本科生和研究生学习与参考.

图书在版编目(CIP)数据

代数 K 理论/黎景辉著. —北京：科学出版社, 2018.6

(现代数学基础丛书; 174)

ISBN 978-7-03-058102-0

I. ①代… II. ①黎… III. ①代数 K 理论 IV. ①O154.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 134112 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张　伟 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第　一　版　开本: 720 × 1000　B5

2018 年 6 月第一次印刷　印张: 30

字数: 592 000

定价: 198.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序

这是一部为数学系/理论物理系的高年级本科生、研究生和自学者学习入门代数 K 理论而写的教材, 本书的内容是学习解决 K 理论里的一些问题需要的基本知识. 我于 2014 年在台北和 2016 年在北京讲代数 K 理论课时使用了本书部分材料. 我也曾用部分拓扑的材料在香港中文大学和香港科技大学为本科生上课. 最后一章的底稿是我二十年前开始写的讲义, 现整理出版.

全书共五篇. 第一篇讲环的 K 理论; 第二篇是关于高次 K 理论的知识; 第三篇记录一些代数的背景资料; 第四篇介绍同伦代数——这是首次在中文书出现的; 第五篇讲代数圈和关于它的 L 函数的猜想.

本书的部分内容第一次用中文出版. 我们谈到的如 Q 构造、$S_\bullet$ 构造、行列式是虚拟对象、λ 环、Adams 运算、单纯范畴、复纯范畴 (complicial category)、闭模型范畴 (closed model category)、分类空间与范畴拓扑化、上纤射 (cofibration)、上胞腔 (cocell)、同伦极限、单纯空间的单纯层、反宽松函子 (oplax functor)、算元 (operad)、E_∞ 环谱 (E_∞ ring spectrum)、无穷回路机 (infinite loop machine)、Bousfield-Kan 完备化、Dold-Kan 对应、代数圈 (algebraic cycle)、原相 (motif) 等基本概念都未曾在中文书中出现.

学过微分的人都知道什么是微分方程, 但却不是那么容易说明什么是 K 群. 请让我作一个不大准确的描述. 假设有一组大数据 $\mathcal{D}$. 经过处理之后这些数据和数据之间的关系有一个"好"的范畴的结构. 把这个范畴的对象看作端点, 把态射看作连接端点的箭, 便得一个可能很复杂的高维的网络. 怎样分析这个网络呢? 比如有态射 $f : A \to B$, $h : A \to C$, $g : B \to C$ 使得 $h = gf$, 我们便在这个网络安装一个以 A, B, C 为端点的三角形. 如此把这个网络"几何化"之后得出的拓扑空间记为 $|\mathcal{D}|$. 现在决定用拓扑学里的同伦为等价关系来简化这个网络的结构, 于是我们便用同伦群 $\pi_n(|\mathcal{D}|)$ 来分析原有的大数据 $\mathcal{D}$——这些同伦群便是代数 K 群了.

K 理论大致上有三种完全不同的味道: 拓扑 K 理论, 如 [Ati 69], [Kar 78]; 解析 K 理论, 如 [Bla 86], [HR 00], [Lod 98]; 代数 K 理论, 如 [Bas 68], [Wei 13]. 我在 [拓扑群] 介绍过前两种味道——当然这个简单的介绍没有谈到后续这两个 K 理论的非交换几何学——这是在传统微分几何和流形上的微分方程之外了. 代数 K 理论亦分三代: 第一代从 Grothendieck 至 Quillen 是正合范畴的 K 理论; 第二代是 Suslin 和 Voevodsky 的 Milnor K 理论; 第三代是单纯代数几何的 K 理论. 本书只

谈第一代代数 K 理论.

以下详细地介绍全书五篇的内容. 第一篇讲环的 K 理论, 对读者来说, 有限维向量空间是比较"实在"的. 我们从环开始, 而不是第一时间就用最抽象的范畴作定义, 这样是比较容易开始学习的. 先讲 K_0, K_1, K_2. 为了方便应用, 接着谈这些 K 群的正合序列的显式计算. 1.1 节是 K_0 群的定义和性质. $K_0(R)$ 是利用环 R 上的投射模 (或移射影模) 的直和 $P \oplus Q$ 来构造加法的一个群. 这看似简单但它的深远意义却在意料之外! 1.1 节我们已经可以证明"加性定理"——以后将不断提高它的适应性. 在 1.1 节的内容加入自同构便得 1.2 节的 K_1 群; 不过我们的重点在于证明 K_1 群和 $\cup_{n=1}^{\infty} GL_n(R)$ 的关系, 怎样继续下去这个问题由 Milnor 利用 Steinberg 群 $St(R)$ 来解决, 我们证明有正合序列

$$1 \to K_2(R) \to St(R) \xrightarrow{\phi} GL(R) \to K_1(R) \to 1.$$

在 1.3 节我们介绍了域 F 的高次 Milnor K 群 $K_n^M(F)$ 和 Bloch-Kato-Milnor 猜想, 亦计算出了 $K_0(\mathbb{Z})$, $K_1(\mathbb{Z})$, $K_2(\mathbb{Z})$. 如果不会代数数论可以跳过 1.4 节. 选定 p 进数域 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$. 在 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 内取有限扩张 $F/\mathbb{Q}_p$. 定义有限 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ 模 A 的 Euler-Poincaré 特征标为

$$\chi(A) = \prod_{i=0}^{2} (\sharp H^i(G_F, A))^{(-1)^i}.$$

在 1.4 节我们利用 Serre 的结果证明 Tate 的神奇公式

$$\chi(A) = |\sharp A|_F.$$

这样在第 1 章我们看到 Bass, Grothendieck, Milnor, Serre, Steinberg, Tate, Whitehead 等参与代数 K 理论的启动工作, 他们都是 20 世纪下半叶最优秀的代数学家, 其中 Grothendieck, Milnor, Serre 都拿过 Fields 奖. 不过代数 K 理论的工作尚未成功, 同学们仍需努力!

在第 2 章我们想了解第 1 章构造的三个 K 群为什么有 $0, 1, 2$ 这样的序号. 为此我们回顾拓扑学的一个从拓扑空间范畴到交换群范畴的基本函子: 对整数 $n \geqslant 0$, 拓扑空间 $X \mapsto$ 奇异同调群 $H_n(X)$. 若 A 是 X 的子空间, 则可构造相对奇异同调群 $H_n(X, A)$ 和边界映射 $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ 使得有正合序列

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$

([姜] 第二章, 定理 1.2, 47 页). 如果希望 K_n 有类似 H_n 的结构, 我们便希望对 $n \geqslant 0$ 有 $K_n(R)$, 并且对同态 $R \to S$ 有正合序列

$$\cdots \to K_n(R) \to K_n(S) \to ?? \to K_{n-1}(R) \to K_{n-1}(S) \to \cdots.$$

2.1 节证明: 从环同态 $\phi: R \to R'$ 得正合序列

$$K_1(R) \xrightarrow{\phi_1} K_1(R') \xrightarrow{d'} K(\Phi f) \xrightarrow{d} K_0(R) \xrightarrow{\phi_0} K_0(R').$$

2.2 节证明: 设 I 为环 R 的 (双边) 理想. 从商环 R/I 得正合序列

$$\begin{aligned} K_2(R) \to K_2(R/I) &\xrightarrow{\partial} K_1(R,I) \to K_1(R) \\ \to K_1(R/I) \xrightarrow{d'} K_0(R,I) &\xrightarrow{d} K_0(R) \to K_0(R/I). \end{aligned}$$

2.3 节证明: 从环卡方

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & R_2 \arrow[d, "j_2"] \\ R_1 \arrow[r, "j_1"'] & S \end{tikzcd}$$

其中 j_2 是满射, 得 Mayer-Vietoris 正合序列

$$K_1R \xrightarrow{f_1} K_1R_1 \oplus K_1R_2 \xrightarrow{g_1} K_1S \xrightarrow{\delta} K_0R \xrightarrow{f_0} K_0R_1 \oplus K_0R_2 \xrightarrow{g_0} K_0S.$$

2.5 节证明: 若 S 是环 R 的右分母集并且 S 的元素都不是零除子, 则有局部化列正合序列

$$K_1(R) \xrightarrow{f_1} K_1(RS^{-1}) \xrightarrow{\partial} K_0(R, RS^{-1}) \xrightarrow{t} K_0(R) \xrightarrow{f_0} K_0(RS^{-1})$$

([WY 92], [BK 95], [FK 06]). 这个非交换环的结果很重要, 比如在第 16 章谈等变玉河数猜想时便用到. 在阅读 2.5 节前需要补充一些非交换代数: 见 2.4 节和第 7 章 ([MR 87], [Row 88], [Lam 91], [Pas 04]). 本章对 $n = 0, 1, 2$ 构造正合序列. 当然只要你掌握的 K 理论足够强便有一个局部化列可以用来推出本章所有的结果. 但是本章对学习计算是有一定帮助的.

第二篇是关于高次 K 理论的知识. 在此要理解的中心思想是: 我们要给一个范畴构造它的 K 群. 因此我们介绍了正合范畴的 Quillen 方法和处理导出范畴的 Waldhausen 方法. 本篇最后一章讨论概形和叠的 K 群.

若要给一个范畴构造它的 K 群就得要求这个范畴有一些起码的结构. 在第 1 章我们已看到构造 $K_0(R)$ 的基础内容是正合序列, 所以我们按照 [Qui 73] 选正合范畴 (exact category), 为它构造 K 群. 3.1 节复习加性范畴、Abel 范畴、半单范畴的定义, 然后证明正合范畴的初步性质. 3.2 节讲正合范畴的 K_0. 这是在 Quillen 之前 Bass 和 Swan 等做的预备工作. 我们认为先了解这些再进入 [Qui 73] 就会觉得比较自然容易——在这一节我们证明几个 K_0 的"基本定理". 3.3 节讨论 Quillen 的天才发明——Q 构造. 3.4 节使用分类空间 (classifying space, 12.1 节) 讲 Quillen

定义的正合范畴的 K 群. 我们一开始便证明: 设 $\mathcal{C}$ 是正合范畴, 则 $\pi_1(BQ\mathcal{C})$ 是同构于 3.2 节用 Grothendieck 群来定义的 $K_0(\mathcal{C})$. 然后我们介绍关于 Quillen K_n 群的几个“基本定理”——这些结果反映了 Grothendieck 的代数几何学教程 (EGA) 对 Quillen 的影响. 在本章最后一节我们回到环 R 的 K 群. 我们指出 $K_n(R)$ 是 Quillen 的 $K_n(\mathbf{fpMod}(R))$, 其中 $\mathbf{fpMod}(R)$ 是有限生成投射 R 模范畴. 这样我们看到 Quillen 成功地推广已有的 $K_0(R)$, $K_1(R)$, $K_2(R)$ 至 $K_n(R)$, $n \geqslant 0$——完成了一项伟大的工程. 为了明白这件事, 我们解释 Quillen 是怎样想到 BGL^+ 的, 然后证明 $+ = Q$, 我们才能了解 Quillen$Q$ 构造的拓扑内容.

怎样处理一个 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的复形范畴 $\mathbf{Com}(\mathcal{A})$ 的 K 理论呢? 第 4 章按照 Thomason 的名著 ([Tho 90]) 用 Waldhausen $S_\bullet$ 构造来解决此问题, 讨论了复纯范畴、Waldhausen K 群与 Quillen K 群的比较等问题.

第 5 章谈概形的 K 群——当然若 R 是交换环, 概形 Spec R 的 K 群 $K_n(\mathrm{Spec}\, R)$ 就是第 1 章的 $K_n(R)$, 不过现在可以取 $n \geqslant 3$. 本章的主要内容包括 K 和 G、顺符号、概形的代数圈、Bloch-Quillen 公式、带支集的 K 群 $K_n^Y(X)$、概形单纯层、概形的 K 群与 BGL 的关系、层的 $+ = Q$ 定理、概形 K 群的 λ 环结构、单纯概形 $Y_\bullet$ 的 K_0 群是增广 $H^0(Y_\bullet, \mathbb{Z})$ λ 代数、完全复形 (perfect complex)、概形 X 的 K 谱 $\mathbb{K}(X)$ 是 E_∞ 环谱、K 谱 $\mathbb{K}$ 是从概形范畴至环谱范畴的函子 ([Tho 90])、叠的 K 理论. 最后以关于椭圆曲线 E 的代数 K 群的问题结束.

第三篇和第四篇简单记录一些背景资料以方便参考, 避免经常打断第二篇的叙述. 第三篇讲代数. 第 6 章是补充 [高线] 关于投射模的背景知识——包括单模、半单环、Quillen-Suslin 证明的关于多项式环的投射模的 Serre 猜想、左投射维数 $lpd(M)$、左整体维数 $lgld(R)$、过滤、完备化和谱序列.

第 7 章从幺半范畴 (monoidal category) 开始 (这是在代数 K 理论里重要的结构), 我们采用 Thomason 想法澄清了一些细节. 然后以向量空间的行列式为引子讲 Deligne 的行列式函子理论和虚拟对象 (virtual object) ([Del 871])——这并不是 Dieudonne 行列式而是应用在 K 群的新想法.

第 8 章讲 λ 环. 1957 年 Grothendieck 在研究陈省身示性类时, 模仿向量空间外代数 ([高线] 3.5 节) 在幂级数环 $1 + tR[[t]]$ 引入 λ 环的结构 (文章没有发表). 自此有一系列的资料讨论 λ 环: [Gro 581], [AT 69], [Ber 71], [Kra 80], [Hil 81], [Sou 85], [Sch 88], [Gra 95], [Lec 98], [RSS 88], [Wei 13] II §4, [FL 85], [Knu 73]. 我们从复习对称函数和牛顿多项式开始. 8.2 节讲 Adams 运算——这是 Adams 在其创造性的文章 [Ada 62] 中引入的. 我们是按照 Grothendieck 的方法, 用的文献是 [AT 69]. 最后一节讲群表示环并且以 Serre([Ser 68]) 证明关于分裂简约群概形表示环的 Grothendieck 猜想结束. 第 7, 8 章的内容第一次出现在中文书中.

第四篇首次用中文介绍同伦代数 (homotopical algebra), 还收集一些 K 群论常使用的拓扑学知识——主要是讲“组合拓扑学”里的单纯同伦论.

第 9 章是从拓扑空间的定义起步的. 我们关心的是同伦和弱等价、推出和拉回、回路和同纬象、纤射和上纤射、纤维列、同伦纤维. 内容涉及零幂空间、Hurewicz 定理、Whitehead 定理、Moore 空间、Eilenberg-Mac Lane 空间、Dold-Thom 定理、Mayer-Vietoris 同伦列、柱锥列、同伦拉回方、同伦卡方、Mather 定理.

第 10 章特别介绍 Quillen 的闭模型范畴. 在设计上 K 理论就深受它的影响. 比如要在一个集合 M 上算积分, 我们先选 M 的可测集 (σ 环). 要在一个集合 S 上谈连续函数 (层), 我们先在 S 内选定拓扑. 在这里每遇上一个范畴, 我们便为它选定弱等价集、纤射集和上纤射集. 定义闭模型范畴的公理系统在同伦论的重要性几乎等于定义拓扑的公理系统在拓扑空间的重要性. 正如淡中范畴帮助我们了解线性代数的深层结构, 闭模型范畴在同伦论中亦扮演同样角色. Quillen 称他的理论为同伦代数, 或为非线性同调代数. 例如, 纤射列的性质如同 Verdier 的同调代数里剖分范畴的三角形, 同伦范畴里的导函子理论. 从近来出版的多本教科书中可以看到关于闭模型范畴的研究是非常活跃的, 是不容忽视的. 可以参看 [DHKS 04], [EKM 96], [Hirs 03], [GJ 09], [Hov 99], [Lur 09], [Rie 14], [Voe 07].

第 11 章介绍单纯同伦. 我们从单纯集开始到 Quillen 创建高次 K 理论的文章 [Qui 73] 里常用的定理 A 和 B, 其中包括构造基础技术如几何现相 ([Mil 57])、Bousfield-Kan 完备化 ([BK 87])、同伦极限 ([Vog 73], [Tho 79], [Tho 82], [BK 87]); 又有单纯集范畴、逗号范畴和纤范畴. 为了方便读者, 我们复习范畴里的极限 (limit) 和上极限 (colimit), 楔 (wedge), 双自然变换 (dinatural transformation), 端 (end, 即 $\int^c S$).

第 12 章介绍分类空间. 范畴的高次 K 群是用拓扑空间的高次同伦群定义的. 为此第一步便是把范畴化为拓扑空间, 然后才可以取同伦群. 称此过程为范畴的拓扑化. 一个范畴的分类空间是这个范畴的神经的几何现相. 定义是容易说的, 但这是什么意思呢. 整个第 12 章就是为解释这个定义的. 说明了 Brown 表示定理, 便谈向量丛、主丛、BG 和主 G 丛同构类的关系, 证明 $BGL_n = \mathrm{Grass}_n(\mathbb{R}^\infty)$. 接着讲分类层范畴 (classifying topos) ([Gro 682], [Moe 95]). 本章最后一节讨论 $B(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$, 这是用在 Quillen 的 $+ = Q$ 定理.

第 13 章介绍单纯对象——第 5, 15, 16 章使用这一章的内容. 以 $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 记从范畴 $\mathcal{A}$ 到范畴 $\mathcal{B}$ 的全部函子所组成的范畴. Δ 是序数范畴. 取范畴 $\mathcal{C}$. 称函子 $\Delta^{op} \to \mathcal{C}$ 为单纯 $\mathcal{C}$ 对象 (simplicial $\mathcal{C}$ object). 并以 **sC** 记范畴 $\mathrm{Hom}(\Delta^{op}, \mathcal{C})$. **Top** 是拓扑空间范畴. 简称函子 $\Delta^{op} \to$ **Top** 为单纯拓扑空间 (simplicial topological space). 全部范畴组成范畴 **Cat**. 按这里的原则称函子 $\Delta^{op} \to$ **Cat** 为单纯范畴. 13.1 节讲

Dold-Kan 对应 ([Kan 582], [DP 61]). 13.2 节复习软层、松层 ([模曲线], [God 73], [Fu 06]). 13.3 节证明拓扑空间的单纯层范畴 $\mathbf{sSh}_X$ 是闭模型范畴, $\mathbf{sSh}_X$ 的同伦范畴 $\mathcal{H}o\,\mathbf{sSh}_X$ 上的导函子、拓扑空间的单形层的上同调群、Gillet-Brown-Gersten 表达式 ([Qui 67], [BrK 74], [BG 73], [Gil 81]). 13.4 节讲单纯拓扑空间的层 ([Del 741] §5, [Gil 83] §1). 13.5 节讲单纯概形 ([Fri 82], [Gil 83]). 13.6 节讲 Quillen 单纯模型范畴 ([Qui 67], [GJ 09]). 13.7 节讲单纯预层 ([Jar 871], [Jar 872]).

第 14 章讲谱 (spectrum). 在数学中有三个不同的谱. 一是泛函分析的算子谱, 二是代数几何里交换环的谱, 三是代数拓扑的谱. 代数几何的环的谱 (spectrum of a ring) 与代数拓扑的环谱 (ring spectrum) 是不同的结构. 拓扑学家对谱的定义没有共识. 以前课本如 [Ada 74], [Swi 75] 都讲过谱. 事实上从二十世纪六十年代 Boardman 的从没有公开的笔记 ([SS 02]) 到九十年代 [EKM 96], [HSS 99], 大家都在尝试构造谱范畴. 我认为只要选定一组定义, 看文章时便容易比较了. 我们选择 [Tho 82].

14.1 节复习函子——相贯公理 (coherence axiom)、宽松函子 (lax functor)、反宽松函子、伪函子 (pseudo functor)、强卡氏态射 (strongly cartesian morphism)、纤维范畴 (fibred category)、群胚纤维范畴 (category fibred in groupoids)、纤维范畴与预层的关系. 14.2 节讲拓扑空间谱, 也谈及无穷回路空间 (infinite loop space)、同纬预谱 (suspension prespectrum)、谱化 (spectrification). 14.3 节讲无穷回路机 ([Seg 74], [May 74], [SS 79], [Tho 79], [Tho 82], [MT 78], [May 80]). 14.4 节介绍 Segal Γ 空间 ([Seg 74]). 14.5 节讲算元 (([May 72], [May 771], [LB 12], [Lei 04]). 14.6 节讲环谱: $\mathbb{L}$ 谱、E_∞ 环谱 ([May 771], [May 09], [LMS 86], [EKM 96]). 14.7 节讲单纯预谱范畴. 14.8 节讲单纯预谱预层 (pre-sheaf of pre-spectra)([Jar 872], [Jar 97]).

没有 (深刻、未解决的) 问题的理论已完成了它的发展. 第五篇就是以介绍名题为主. *大家都想证明的猜想是一个理论的试金石.*

第 15 章讲代数圈 (algebraic cycle) 以区别于同调闭链 (homological cycle). 在第二篇证明了的 Bloch-Quillen 公式告诉我们代数 K 理论一开始便说明了 K 群与代数圈的关系. 15.1 节复习拓扑流形、微分流形, 复流形的圈映射、Weil 上同调群和 Grothendieck 的标准猜想 (standard conjectures) ([Gro 68]), 然后介绍 Hodge 猜想 ([Hod 50]) 和 Tate 代数圈猜想 [Tat 65]). Hodge 猜想是克雷数学研究所 (Clay Mathematical Institute) 的七个千年问题 (Millennium Problem) 之一, 是二十一世纪关于几何的伟大数学题目, 年青的数学家应该知道的. 我们要在代数簇 X 的子簇所生成的自由群 $Z(X)$ 中引入乘法使得 $Z(X)$ 是上同调环 $H^*(X)$ 的子环. 这个乘法来自代数簇的相交理论 (intersection theory). 关于两个代数簇的相交, 二十世纪三十年代有 van der Waerden 和周炜良 ([Wae 27], [CV 37], [Wae 39]) 提出的相交积的定义, 接着有 Weil ([Wei 46]), Chevalley ([Che 45], [Che 58]), Samuel ([Sam

51]), Serre ([Ser 65]) 的工作. 15.2 节介绍 Grothendieck 给出的相交理论公理 ([Gro 58] §1; [Man 68] §1), 这是后来发展的所有的代数圈和原相理论的原始模型. 后来他们要证明的定理或猜想本来已在 Grothendieck 的相交理论里面. 在本篇将看到代数圈的研究是 Grothendieck 和他的追随者们留给我们的伟大挑战. 我认为对初学和自学的人来说, 弄清楚基本原理比一开始就讲原相同伦好一点. 15.3 节讲周炜良环——代数圈的有理等价类集合的环结构. 在此节我们给出了 [Ful 98] 的摘要——指出"用法锥定义积"这一关键, 再加上附录里所说的切空间理论, 便可以了解相交积. 本节对学习 Fulton 的书是有帮助的. (我参与此书第一版的修正——见第二版的序.) 最后介绍周群的两个过滤猜想: Bloch-Beilinson 猜想和 Murre 猜想来结束 15.3 节. 15.4 节讲相交重数的 Serre 公式和 Quillen-Chevalley 公式. 15.5 节讲 Bloch 用代数几何方法定义周群 ([Blo 86]). 这个概念对过去三十年的工作有深刻的影响. 读者一定要学习此原著. 15.6 节介绍以周炜良命名的周坐标. 老一辈的数学家 (如 Shimura) 用它来讨论模问题. 这是一种经典的投射几何学方法, 以同调代数为中心的代数几何学教科书 (如 [Har 77]) 不会谈到的. 我相信没有别的地方你可以学到这东西. 原始的资料可参考 [Wae 39] §36, §37. 不要小看这老东西, 它的好处是: 可以用它写电脑程序进行数值计算. 15.7 节开始时解释为什么我译 motif 为"原相"——希望这个译名得到年青一代的支持. 大家可以从以下的几个会议记录深入学习原相理论: [JKS 94], [AB 94], [GL 00], [NP 07], [JL 09]. 本章在伪 Abel 范畴的定义之后构造纯原相范畴和再谈 Tate 猜想. 接着有混原相、Hodge 结构、混 Hodge 结构 ([Voi 02], [PS 08], [Del 71], [Del 741])、数域上的投射簇的现相、淡中范畴 (Tannakian category) ([DM 82], [Del 90])、原相 Galois 群猜想、Mumford-Tate 猜想 ([Mum 66], [Ser 94], [Ser 77])、等分布 (equidistribution) 和 Serre 的佐藤干夫 -Tate 猜想 ([Ser 11]), 最后以原相结构 ([FP 94]) 和朗兰兹纲领结束——真是很丰富的一章.

在 Quillen 证明了 Serre 猜想, Bass 处理了同余子群问题, Grothendieck-Gillet-Soule-Thomason-Fulton-MacPherson 整理了 Riemann-Roch, Voevodsky 证明了范剩定理之后, 正如开始时研究代数数环的 K_2 一样, 代数 K 理论的核心挑战仍然是隐藏在代数数论内. 为此第 16 章说明等变玉河数猜想. 核心的概念是 L 函数, 它好像是个大铁环, 所有东西都扣在它上面, 又通过它连起来了.

16.1 节介绍关于代数整数环 $\mathscr{O}_F$ 的 K 群的 Quillen-Lichtenbaum 猜想. 然后复习 Galois 上同调群、岩泽理论、关于 Dedekind ζ 函数特殊值与 $\sharp K_n(\mathscr{O}_F)$ 的 Lichtenbaum 猜想 ([Lic 84])、经典调控子、Artin L 函数、Hasse-Weil ζ 函数、光滑射影簇的 L 函数和 Hodge 过滤. 16.2 节讨论"周期"——这是为了帮助我们理解上一章和 16.1 节里谈到的: 簇 X 的 L 函数的无穷部分与 X 的 Hodge 结构的关系和函数方程的控制. 在这一节我们利用黎曼曲面、Abel 簇介绍周期矩阵 ([GH

78])、Abel-Jacobi 定理、Ehresmann 定理、周期区、Griffiths 解析性和横截性定理 ([Gri 681]), Shimura 周期符号 ([Shi 98]) 及 Colmez-Yoshida 猜想 ([Yos 03])、Deligne 的现相造原相、Deligne 的 $\mathbb{Q}$ 周期猜想 ([Del 79]). 近二十年很多人从各观点研究 "周期区"; 除论文外还有好几部书, 如 [KP 16], [DOR 10], [KU 08], [GG 05], [And 03], [CMP 03], [RZ 96]. 16.3 节用 Hodge 理论详细构造 Beilinson-Deligne 上同调群 ([Bei 85]). 16.4 节讲陈省身示性类 (Chern class), 简称陈类——这是学生应该熟知的概念. 我们先从 K 理论观点构造陈类——GL_n 的同调群、Beilinson 调控子映射猜想、K 群上的 Adams 算子、Jouanolou 引理、证明刻画陈特征标的定理 ([BS 58], [Gro 581], [Mac 63], [Jou 73], [Sou 79], [Kal 80], [Gil 81], [Sus 82], [Fri 82], [Bei 85], [Blo 86], [Sch 88], [Wei 13] Chap V, §11). 最后为了帮助读者了解背景, 我们叙述经典陈类理论 ([Hir 66], [Hus 94], [Hat 09]). 16.5 节讲 Selmer 群、Kummer 序列、无分歧上同调、Greenberg-Wiles 公式、Bloch-加藤 Selmer 群、Selmer 结构 (([Gre 89], [BK 90], [Gre 91], [Wil 95], ([FP 94], [DDT 97], [Nek 06]). 16.6 节介绍 Bloch-加藤的玉河数猜想 ([BK 90], [BN 02], [King 03], [HK 03], [DFG 04]). 16.7 节对黎曼 ζ 函数证明 Bloch-加藤玉河数猜想 ([BK 90], [Coa 15]). 为了容许非交换系数在 16.8 节引入 "等变玉河数猜想" (equivariant Tamagawa number conjecture ETNC) ([BF 01], [BF 03], [BG 03], [Bley 06])、Fontaine-Perrin-Riou Mot_∞ 猜想 ([FP 94])、Deligne-Beilinson 猜想, p 进调控子猜想. 在 16.6—16.8 节我们不单使用了本章前五节甚至使用了前十五章的结果, 没有代数 K 理论就说不出 ETNC. 16.9 节以椭圆曲线为实例来说明 ETNC——假设秩猜想和 $Ш(E/\mathbb{Q})$ 是有限的, 则可以从 ETNC 推出 BSD 关于 $L(E,1)^*$ 的猜想 ([King 11], [King 01], [Bars 02], [Sto 03], [KT 03]). 16.10 节是 Beilinson 在模曲线上证明他的猜想 ([Bei 86], [Sch 90], [Kat 93], [Kat 04]). 到此我们体会到代数 K 理论是个庞大的有机体, 每个部分是紧密连在一起的, 剖开该有机体的秘密是很有意义的挑战!

这里介绍 K 理论的时候我们谈到我国两位伟大先师陈省身先生和周炜良先生的工作. 在此向他们敬礼.

如果你在学习 K 理论, 我希望本书是有参考价值的. 不过我相信在可见的未来, 我国学习 K 理论的人中很多都是自学的. 学习代数 K 理论要懂一些范畴的语言, 建议参考 [李文威] 的前三章; 当然如果你有时间可以学习文献 [Mac 78]. 对自学者来说, 如果有点范畴学的基础, 以及同伦群和分类空间的知识, 直接看第 3, 4 章便可知道 K 群了; 第 3 章用 Quillen 定理 A 和 B 时可参阅第 11 章. 当然若想了解代数 K 群的内涵就得看看其他各章了. 若打算从头开始看, 有两种方法. 一是先看 6.1 节、6.2 节、1.1—1.3 节、2.1 节、2.2 节, 然后学点范畴学、同伦群和分类空间, 接着看第 3, 4 章. 如果愿意多花点时间, 第二种方法是先学习第三篇, 然后学习第一篇. 阅读一本代数拓扑学; 学习第 9 章、11.1 节、11.2 节和第 12 章. 接着学习第

3,4 章; 遇到未见过的概念就去第三、四篇查一查. 如果同时学些代数几何便可学习第 5 章. 若还会点代数数论, 就可以阅读第五篇了. 第四篇——同伦代数是 Quillen 创造的. 他构造高次 K 理论时是深受同伦代数影响的. 如果有时间是值得学习这一篇的, 没有证明的地方可以看专著来补充. 我上课时是按听众所知从第一、二篇和第三、四篇平行选讲. 本书的内容是来自半个多世纪人们的工作, 其间许多概念的定义不断更换, 这对本书的编写带来一定的困难. 不过我相信有了一个参考坐标作比较就会容易统一各种观点. 我建议读者把本书作为原创文章的导读, 应该尽早学习 [Qui 73], [Wal 85], [Del 79], [Bei 85], [Blo 86], [BK 90], [BF 01], [BF 03] 等.

对自学者我建议每学习一章一节都去想一想这一章这一节中结果的条件和研究的对象有什么是可以改变的, 若改变了会不会有新的结果呢? 作为例子请看第 3 章、第 5 章的最后一段. 也许想出来做出来的不是当前最热门的课题, 但还是值得的, 这是一个很好的锻炼. 回顾: ① Quillen 创造 Q 构造而成功为正合范畴构造高次 K 群; ② Voevodsky 使用 Quillen 的闭模型技术构造混原相范畴而成功解决 Bloch-Kato-Milnor 猜想. 我们看到代数 K 理论这两次的突破都是从基础做起, 也就是说: 再造一个新的结构, 像造新房一样, 从地基造到顶层. 我相信解决代数 K 理论当前的困难亦需要造新的结构、新的范畴、新的同伦. 因此本书希望帮助读者观察已有结构合起来的整体布局以为造新的结构作准备.

可以说代数 K 理论是代数数论、代数几何学、代数拓扑学和范畴学组合而成的. 我们所补上的一些代数和拓扑是和代数 K 理论的发展分不开的. 将来当这些内容出现在我们的代数和拓扑课本的时候便可省去第三、四篇了. 对那些希望多学点关系结构的数学的读者来说, 最好是所在的数学系可以开设全套的代数课: 组合数学、非交换代数、交换代数、代数几何、代数拓扑、同调代数、同伦代数、表示论、范畴学. 过去四十年我国大学数学教育的建设在微分方程、动力系统、微分几何、复流形、泛函分析这几方面是非常成功的. 相对而言可以年年开设全套的代数课的数学系就没有几家. 希望我国代数教学越来越好.

代数 K 理论的讲授有不同常常是因为大家要解决的问题相异. 不妨看看一些名家作品: Bass-Milnor-Serre [BMS 67]; Grothendieck [Gro 71]; Connes [Con 85]; Quillen [Qui 76], Suslin-Vaserstein- [SV 76]; Waldhausen [Wal 78], [Wal 85]; Thomason [Tho 90]; Bloch [Blo 86], Beilinson [Bei 86], Kato [Kat 04]; Voevodsky [Voe 98], [Voe 11]. (Atiyah, Connes, Grothendieck, Milnor, Quillen, Serre 和 Voevodsky 都曾获得 Fields 奖.)

很多 K 理论的结果本书没有谈到, 如整套 Voevodsky 的 Milnor K 群理论 ([VSF00], [Voe 07]) 是在本书之外. 我的安排与选题的深浅度和一些标准的教材是不大相同的. 若本书的观点和有关专家的观点不同, 请见谅, 有错的请赐教.

感谢冯克勤、方复全、李克正、席南华、张继平和科学出版社李静科编辑对本

书出版的支持. 本书获得国家科学技术学术著作出版基金的资助, 特此感谢. 这部书连同其他六本完成了我介绍基本代数数论的愿望. 谢谢大家.

黎景辉

2018 年 5 月 2 日

目　录

第三篇 代 数

第四篇 同伦代数