普通高等教育"十三五"规划教材

# 高等数学

## （第2版）（下）

Advanced Mathematics (2nd Edition) (Ⅱ)

北京邮电大学高等数学双语教学组 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

# 高等数学

## （第2版）（下）

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

## 内 容 简 介

本书是根据国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求编写的教材，全书分为上、下两册，此为下册，主要包括无穷级数、向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用.本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 下 / 北京邮电大学高等数学双语教学组编. -- 2 版. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2018.2

ISBN 978-7-5635-5357-0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①北…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 327892 号

---

**书　　　名**：高等数学(第 2 版)(下)

**著作责任者**：北京邮电大学高等数学双语教学组　编

**责 任 编 辑**：彭　楠

**出 版 发 行**：北京邮电大学出版社

**社　　　址**：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

**发　行　部**：电话：010-62282185　传真：010-62283578

**E-mail**：publish@bupt.edu.cn

**经　　　销**：各地新华书店

**印　　　刷**：北京玺诚印务有限公司

**开　　　本**：787 mm×1 092 mm　1/16

**印　　　张**：17.75

**字　　　数**：458 千字

**版　　　次**：2012 年 8 月第 1 版　2018 年 2 月第 2 版　2018 年 2 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5635-5357-0　　定价：42.00 元

**·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·**

# 第 2 版前言

本书第 2 版是在第 1 版的基础上，根据北邮高等数学双语教学组多年来的教学实践及第 1 版教材的使用情况进行全面修订而成，许多章节是完全重新编写的。参与本书下册具体编写的老师是：朱萍教授、袁健华教授、默会霞副教授和李晓花副教授。全书由艾文宝教授进行内容审核。本书在内容编排和讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点，新版教材尽量做到逻辑严谨、叙述清晰、直观性强、例题丰富。本套教材中文版、英文版及习题解答是相互配套的，特别适合双语高等数学的教学需要。由于作者水平有限，加上时间匆忙，书中出现一些错误在所难免，欢迎并感谢读者通过邮箱 jianhuayuan@bupt. edu. cn 指出错误，以便我们及时纠正。

编　者

# 第 1 版前言

## 关于高等数学

高等数学(微积分)是一门研究运动和变化的数学,产生于16世纪至17世纪,是受当时科学家们在研究力学问题时对相关数学知识的需要而逐渐发展起来的.高等数学中微分处理的目的是求已知函数的变化率的问题,例如,曲线的斜率、运动物体的速度和加速度等;而积分处理的目的则是在当函数的变化率已知时,如何求原函数的问题,例如,通过物体当前的位置和作用在该物体上的力来预测该物体的未来位置,计算不规则平面区域的面积,计算曲线的长度等.现在,高等数学已经成为高等院校学生尤其是工科学生最重要的数学基础课程之一,学生在这门课程上学习情况的好坏对其能否顺利学习后续课程有着至关重要的影响.

## 关于本书

本书是我们编写的英文"高等数学"的中译本,以便于接受双语数学教学的学生能够对照英文教材进行预习、复习或自习.本书的所有作者都在北京邮电大学主讲了多年的双语"高等数学"课程,获得了丰富的教学经验,了解学生在学习双语"高等数学"课程中所面临的问题与困难.本书函数、空间解析几何及微分部分由张文博、王学丽和朱萍三位副教授编写,级数、微分方程及积分部分则由艾文宝教授和袁健华副教授编写,全书由孙洪祥教授审阅校对.此外,本书在内容编排和讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点.由于作者水平有限,加上时间匆忙,书中出现一些错误在所难免,欢迎并感谢读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt.edu.cn)指出错误,以便我们及时纠正.

## 致谢

本书在编写过程中得到北京邮电大学、北京邮电大学理学院和国际学院的教改项目资金支持，作者在此表示衷心感谢. 同时也借此机会，感谢所有在本书写作过程中支持和帮助过我们的同事和朋友.

## 致学生的话

高等数学的学习没有捷径可走，它需要你们付出艰苦的努力. 只要你能勤奋学习并持之以恒，定能取得成功. 希望你们能喜欢这本书，并预祝你们取得成功！

编　者

# 目　　录


**第 7 章　无穷级数** …… 1

7.1　常数项级数的概念和性质 …… 1

7.1.1　实例 …… 1

7.1.2　常数项级数的概念 …… 3

7.1.3　常数项级数的性质 …… 6

习题 7.1　A …… 8

习题 7.1　B …… 10

7.2　常数项级数的审敛准则 …… 10

7.2.1　正项级数的审敛准则 …… 10

7.2.2　交错级数及其收敛性的莱布尼茨判别法 …… 16

7.2.3　任意项级数的绝对收敛与条件收敛 …… 17

习题 7.2　A …… 19

习题 7.2　B …… 21

7.3　幂级数 …… 22

7.3.1　函数项级数 …… 22

7.3.2　幂级数及其收敛性 …… 23

7.3.3　幂级数的性质及幂级数求和函数 …… 27

习题 7.3　A …… 30

习题 7.3　B …… 31

7.4　函数的幂级数展开 …… 31

7.4.1　泰勒与麦克劳林级数 …… 32

7.4.2　初等函数的幂级数展开式 …… 34

7.4.3　泰勒级数的应用 …… 39

习题 7.4　A …… 41

习题 7.4　B …… 42

7.5　傅里叶级数 …… 42

7.5.1　正交三角函数系 …… 43

7.5.2　傅里叶级数 …… 43

7.5.3　傅里叶级数的收敛性 …… 45

7.5.4　将定义在[0,π]上的函数展成正弦级数或余弦级数 …… 48

习题 7.5 A …… 50
习题 7.5 B …… 51
7.6 其他形式的傅里叶级数 …… 51
7.6.1 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶展开式 …… 51
*7.6.2 傅里叶级数的复数形式 …… 55
习题 7.6 A …… 56
习题 7.6 B …… 56

**第 8 章 向量与空间解析几何** …… 57

8.1 平面向量和空间向量 …… 57
8.1.1 向量 …… 57
8.1.2 向量的运算 …… 58
8.1.3 平面向量 …… 59
8.1.4 直角坐标系 …… 61
8.1.5 空间中的向量 …… 62
习题 8.1 A …… 65
习题 8.1 B …… 66
8.2 向量的乘积 …… 66
8.2.1 两个向量的数量积 …… 66
8.2.2 两个向量的向量积 …… 69
8.2.3 向量的三元数量积 …… 72
8.2.4 向量乘积的应用 …… 74
习题 8.2 A …… 76
习题 8.2 B …… 77
8.3 平面和空间直线 …… 78
8.3.1 平面方程 …… 78
8.3.2 空间直线的方程 …… 81
习题 8.3 A …… 86
习题 8.3 B …… 87
8.4 曲面和空间曲线 …… 87
8.4.1 柱面 …… 88
8.4.2 锥面 …… 90
8.4.3 旋转曲面 …… 90
8.4.4 二次曲面 …… 92
8.4.5 空间曲线 …… 96
8.4.6 柱面坐标系 …… 99
8.4.7 球面坐标系 …… 100
习题 8.4 A …… 101
习题 8.4 B …… 102

第9章　多元函数微分学 …… 104
9.1　多元函数 …… 104
9.1.1　平面点集与n维空间 …… 104
9.1.2　多元函数的定义 …… 108
9.1.3　函数的可视化 …… 109
习题9.1　A …… 111
9.2　二元函数的极限与连续 …… 111
9.2.1　二元函数的极限 …… 111
9.2.2　二元函数的连续 …… 114
9.2.3　闭区域上二元连续函数的性质 …… 115
习题9.2　A …… 115
习题9.2　B …… 116
9.3　多元函数的偏导数及全微分 …… 116
9.3.1　偏导数 …… 116
9.3.2　全微分 …… 119
9.3.3　全微分在近似计算中的应用 …… 124
9.3.4　高阶偏导数 …… 125
习题9.3　A …… 126
习题9.3　B …… 128
9.4　复合函数偏导数的求导法则 …… 128
习题9.4　A …… 133
习题9.4　B …… 133
9.5　由方程(组)所确定的隐函数的求导法 …… 133
习题9.5　A …… 138
习题9.5　B …… 139
9.6　多元微分的几何应用 …… 139
9.6.1　空间曲线的切线与法平面 …… 139
9.6.2　曲面的切平面与法线 …… 142
习题9.6　A …… 146
习题9.6　B …… 146
9.7　方向导数和梯度 …… 147
9.7.1　方向导数 …… 147
9.7.2　梯度 …… 149
习题9.7 …… 150
9.8　多元函数的极值与最值 …… 151
9.8.1　多元函数的极值 …… 152
9.8.2　多元函数的最大值和最小值 …… 154
9.8.3　条件极值、拉格朗日乘数法 …… 156
习题9.8　A …… 160

习题 9.8　B …… 161
*9.9　二元函数的泰勒公式 …… 162
习题 9.9 …… 164

**第 10 章　重积分 …… 165**

10.1　二重积分的概念和性质 …… 165
10.1.1　二重积分的概念 …… 165
10.1.2　二重积分的性质 …… 168
习题 10.1　A …… 169
习题 10.1　B …… 170
10.2　二重积分的计算 …… 170
10.2.1　二重积分的几何意义 …… 170
10.2.2　直角坐标系下的二重积分 …… 172
10.2.3　用极坐标计算二重积分 …… 179
*10.2.4　二重积分的一般换元法 …… 185
习题 10.2　A …… 190
习题 10.2　B …… 192
10.3　三重积分 …… 193
10.3.1　三重积分的概念和性质 …… 193
10.3.2　直角坐标系下的三重积分 …… 195
10.3.3　柱面坐标与球面坐标下的三重积分 …… 199
*10.3.4　三重积分的一般换元法 …… 205
习题 10.3　A …… 206
习题 10.3　B …… 209
10.4　重积分的应用 …… 210
10.4.1　空间曲面面积 …… 210
10.4.2　质心 …… 213
10.4.3　转动惯量 …… 214
习题 10.4　A …… 215
习题 10.4　B …… 215

**第 11 章　曲线积分与曲面积分 …… 217**

11.1　曲线积分 …… 217
11.1.1　对弧长的曲线积分 …… 217
11.1.2　对坐标的曲线积分 …… 222
11.1.3　两类曲线积分的联系 …… 226
习题 11.1　A …… 227
习题 11.1　B …… 229
11.2　格林公式及其应用 …… 230
11.2.1　格林公式 …… 230

11.2.2 曲线积分与路径无关的条件…… 235
习题 11.2 A …… 242
习题 11.2 B …… 243
11.3 曲面积分…… 245
11.3.1 对面积的曲面积分…… 245
11.3.2 对坐标的曲面积分…… 248
习题 11.3 A …… 255
习题 11.3 B …… 257
11.4 高斯公式…… 258
习题 11.4 A …… 262
习题 11.4 B …… 263
11.5 斯托克斯公式及其应用…… 263
11.5.1 斯托克斯公式…… 263
*11.5.2 空间曲线积分与路径无关的条件 …… 266
习题 11.5 A …… 267
习题 11.5 B …… 268

**参考文献**…… 269

# 第 7 章

# 无穷级数

本章将介绍的无穷级数是高等数学的一个重要组成部分. 无穷级数和无穷数列密切相关，它是数列极限的一种新的表现形式，这种形式具有项的结构性和加法运算相结合的特殊性，并可借助数列极限的理论来研究它. 随着判别级数敛散性的一系列的定理的建立，无穷级数的理论又促进了极限理论的发展. 无穷级数也是表达函数，研究函数性质，做近似运算以及求解微分方程等的一个强有力工具. 作为无穷级数的一个重要分支——傅里叶级数，在电子技术和信息理论中应用广泛，是工程研究中不可或缺的一个数学工具.

本章首先介绍常数项级数的概念和性质，进而介绍一些常数项级数的审敛准则. 在此基础上讨论函数项级数，并研究两类重要的特殊函数项级数：幂级数和傅里叶级数.

## 7.1 常数项级数的概念和性质

### 7.1.1 实例

**例 7.1.1(垂直距离)** 已知三角形 $ABC$ 中，$\angle A=\theta$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$ 且 $|AC|=b$. 作 $CD\perp AB$，$DE\perp BC$，$EF\perp AB$(如图 7.1.1 所示). 这一过程无限重复下去，要求用 $b$ 和 $\theta$ 表示所有垂线段的总长度

$$|CD|+|DE|+|EF|+|FG|+\cdots.$$

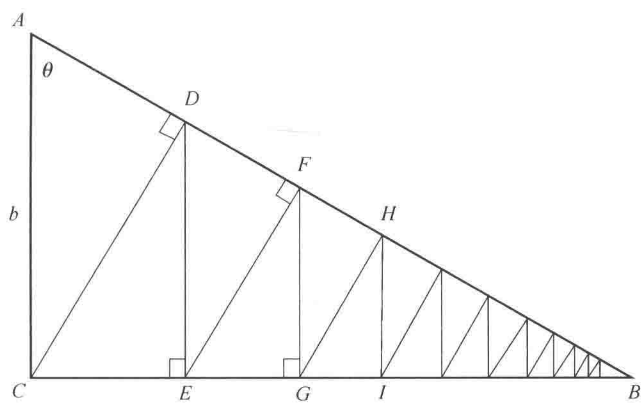


图 7.1.1

**解**　由题意,作垂线这一过程将无限持续下去.显然当$\angle A=\theta$,$|AC|=b$时,第一条垂线段$CD$的长度为

$$L_0=|CD|=b\sin\theta;$$

第二条垂线段$DE$的长度为

$$L_1=|DE|=b\sin^2\theta;$$

第三条垂线段$EF$的长度为

$$L_2=|EF|=b\sin^3\theta;$$

$$\vdots$$

第$n$条垂线段的长度为

$$L_n=b\sin^{(n+1)}\theta.$$

因此,所有垂线段的总长度$L$为

$$L=b\sin\theta+b\sin^2\theta+b\sin^3\theta+\cdots+b\sin^{(n+1)}\theta+\cdots. \tag{7.1.1}$$

■

**例 7.1.2(弹性小球弹跳问题)**　一弹性小球从距地面$H$米处无初速度自由下落.每次小球从距离地面$h$处下落后撞击地面,它弹起的高度是$rh$,其中$r$为小于1的正数.

(1) 假设小球反弹的次数是无穷的,求小球所走轨迹的总长度;

(2) 计算小球运动的总时间(其中$t$秒内小球下降距离为$\frac{1}{2}gt^2$米).

**解**　(1) 小球从高$H$处落到地面所走距离为

$$S_0=H;$$

小球第一次弹起并落到地面所走距离为

$$S_1=2Hr;$$

重复上述过程有

$$S_2=2Hr^2;$$

$$\vdots$$

小球第$n$次弹起并落到地面所走距离为

$$S_n=2Hr^n.$$

因此,小球所走轨迹的总长度为

$$S=H+2Hr+2Hr^2+\cdots+2Hr^n+\cdots. \tag{7.1.2}$$

(2) 根据$h=\frac{1}{2}gt^2$,第一次从高$H$处下落到地面所用时间为

$$T_0=\sqrt{\frac{2H}{g}};$$

类似地,小球第一次弹起到高度$rH$并再次下落到地面所用时间为

$$T_1=2\sqrt{\frac{2rH}{g}};$$

一般地,小球第$n$次弹起并下落所用的时间为

$$T_n=2\sqrt{\frac{2r^nH}{g}}.$$

因此,小球运动的总时间为

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2rH}{g}}+2\sqrt{\frac{2r^2H}{g}}+\cdots+2\sqrt{\frac{2r^nH}{g}}+\cdots. \tag{7.1.3}$$

■

在以上两例中，我们遇到了求无穷多个数和的问题. 区别于有限项和，无限项和有时候毫无意义，即它有可能不等于某个数值. 因此，首先需要清楚无穷数列和的意义是什么.

### 7.1.2 常数项级数的概念

**定义 7.1.1(无穷级数)** 假设有一无穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，将其写成如下和的形式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots, \tag{7.1.4}$$

称为**常数项级数**或**无穷级数**(也常简称为**级数**)，其中 $a_n$ 为**该级数的通项**或级数的第 $n$ 项.

常数项级数(7.1.4)常记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad 或 \quad \sum a_n.$$

众所周知，实数加法是一个二元运算，也就是说实际上我们每次只能将两个数相加. $1+2+3$作为“加法”有意义的唯一原因是我们可将数分组，然后每次将它们两两相加. 简言之，有限个实数的相加总会得到一个数，但是无限个实数相加则会完全不同. 这就是我们定义无穷级数的原因.

找出如下级数

$$1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$$

的有限和是不可能的，因为如果开始增加项数，会得到累加的和 $1,3,6,10,15,\cdots$，且第 $n$ 项后，求得的和为 $n(n+1)/2$，当 $n$ 增大时，它也会变得非常大.

然而，如果计算如下级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

可得累加和为

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots,1-\frac{1}{2^n},\cdots.$$

当我们累加越来越多的项后，这些和越来越接近 1. 事实上，当累加此级数的足够多项后，可以使和按我们的意愿无限接近 1(如图 7.1.2 所示). 因此，此无穷级数的和为 1，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

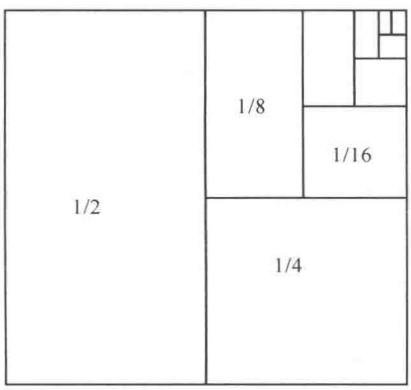


图 7.1.2

我们用类似思想来判别一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和是否存在.

一般说来,级数的前 $n$ 项和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n (n=1,2,\cdots)$ 称为此级数的**前 $n$ 项部分和**或者简称为**部分和**.级数部分和构成一个数列

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

称为级数的**部分和数列**,记为$\{S_n\}$.我们可以利用部分和数列$\{S_n\}$在 $n\to\infty$时是否有极限来判定级数是否有和.

**定义 7.1.2** 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**.此时,称部分和数列$\{S_n\}$的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_n = S$ 为它的和,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.否则,称级数**发散**.级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛与发散统称为敛散性.

收敛级数的和与其部分和的差 $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的 **$n$ 阶余项.**

**例 7.1.3 讨论等比级数(几何级数)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0) \tag{7.1.5}$$

的敛散性,其中 $q$ 称为等比级数的公比.

**解** (1) 当 $q=1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$,故原级数发散.

(2) 当 $q=-1$ 时,原级数变为 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$.因为$S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 是奇数}, \\ 0, & n \text{ 是偶数}, \end{cases}$故原级数发散.

(3) 当$|q|\neq 1$ 时,该级数的部分和为

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当$|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$,从而该级数收敛且其和为$\frac{a}{1-q}$.

当$|q|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty$,故原级数发散.

总之,当$|q|<1$ 时,级数(7.1.5)收敛且它的和为$\frac{a}{1-q}$;而当$|q|\geqslant 1$ 时,级数(7.1.5)发散.

■

现在我们利用例 7.1.3 的结论来彻底解决例 7.1.1 与例 7.1.2 的问题.对于例 7.1.1 中三角形的垂线,因为式(7.1.1)是公比为 $r=\sin\theta$ 的几何级数,所以垂线段的总长度为

$$L=\frac{b\sin\theta}{1-\sin\theta}.$$

对于例 7.1.2 中小球的轨迹，式(7.1.2)是公比为 $0<r<1$ 的几何级数(第二项开始)，式(7.1.3)是公比为 $0<\sqrt{r}<1$ 的几何级数(第二项开始). 因此，轨迹总长度为

$$S=H+\frac{2Hr}{1-r},$$

且所用时间为

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2rH}{g}}\frac{1}{1-\sqrt{r}}=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right).$$

**例 7.1.4** 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的和.

**解** 由于

$$a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\quad(k=1,2,\cdots),$$

故级数的 $n$ 项部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，因此该级数收敛且其和为 1. ■

**例 7.1.5** 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和.

**解** 利用公式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}\quad(x>0,y>0),$$

可知

$$a_k=\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{1}{2k-1}-\arctan\frac{1}{2k+1}\quad(k=1,2,\cdots).$$

因此

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}\\&=\left(\arctan 1-\arctan\frac{1}{3}\right)+\left(\arctan\frac{1}{3}-\arctan\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\arctan 1-\arctan\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi}{4}$. ■

**例 7.1.6** 将循环小数 5.232 323…表示为两整数之比.

**解** 循环小数 5.232 323…可以写成如下形式：

$$5.\dot{2}\dot{3}=5+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\frac{23}{100^4}+\cdots.$$

由于 $\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\frac{23}{100^4}+\cdots$ 是一个公比为 $q=\frac{1}{100}$ 的几何级数，因此

$$
\begin{aligned}
5.232\,323\cdots &= 5+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\frac{23}{100^4}+\cdots \\
&= 5+\frac{23}{100}\times\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\cdots\right) \\
&= 5+\frac{23}{100}\times\frac{100}{99} \\
&= 5+\frac{23}{99}=\frac{518}{99}.
\end{aligned}
$$
■

### 7.1.3 常数项级数的性质

由上一节的讨论可见，研究无穷级数的收敛问题，实质上就是研究部分和数列的收敛问题，这就使我们能够应用已知的有关数列极限的知识来研究无穷级数. 因此，很容易证明级数遵循如下的基本性质.

**定理 7.1.1** 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛且它们的和分别为 $S$ 与 $\overline{S}$，则

(1)（线性性质） 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n\pm\beta b_n)$ 也收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n\pm\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha S\pm\beta\overline{S};$$

(2) 若对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有 $a_n\leqslant b_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

**推论** 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 必发散.

**例 7.1.7** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\cos n\pi\right)$ 的敛散性.

**解** 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\pi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，从而由推论知原级数发散. ■

**定理 7.1.2** 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和（条件是级数项的顺序保持不变）.

**证明** 设收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$. 在该级数中任意加入括号后，得到一个新的级数

$$
\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2}) \\
&\quad+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k})+\cdots.
\end{aligned}\tag{7.1.6}
$$

设级数(7.1.6)的部分和数列为 $\{\overline{S}_k\}$，则

$$\overline{S}_1=S_{n_1},\ \overline{S}_2=S_{n_2},\ \cdots,\ \overline{S}_k=S_{n_k},\ \cdots,$$

即 $\{\overline{S}_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子列. 由于 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，故子列 $\{\overline{S}_k\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}_k=S$. ■

注意定理 7.1.2 的逆定理不一定成立. 例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

收敛，但原级数