普[illegible]育“十三五”规划教材

测量平差辅导及详解

泥立丽　王　永　田桂娟　等编著

CELIANG PINGCHA FUDAO JI XIANGJIE

化学工业出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

测量平差辅导及详解

泥立丽　王　永　田桂娟　等编著

化学工业出版社
·北京·

本书共分十章，每章包括知识点、经典例题、习题和解析答案四部分，涉及误差分类、精度指标、协方差传播律及权、五种平差方法（条件平差、附有参数的条件平差、间接平差、附有限制条件的间接平差、概括平差）和误差椭圆等。本书利用 Excel 等计算工具进行了题目的计算和推导，并给出了利用 Excel 绘制误差椭圆的方法；利用 AutoCAD 进行了图形的绘制，尤其是误差椭圆和误差曲线的绘制，并给出了在任何纸质材料上确定误差椭圆和误差曲线比例尺的方法等。题型多样，难易结合，使读者可以从各角度理解和掌握测量平差和误差理论的原理。

本书是测绘工程、地理信息系统、摄影测量与遥感等专业本科生、专科生学习测量平差基础课的专业辅导参考书，也可作为广大自学者和考研者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

测量平差辅导及详解/泥立丽等编著. —北京：化学工业出版社，2018.3

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-122-31301-0

Ⅰ.①测… Ⅱ.①泥… Ⅲ.①测量平差-高等学校-教材 Ⅳ.①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 330513 号

责任编辑：刘丽菲　　　装帧设计：关　飞
责任校对：王素芹

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：三河市万龙印装有限公司
787mm×1092mm　1/16　印张 16¾　字数 431 千字　2018 年 3 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：42.00 元

前言

“测量平差”，也叫测绘数学，是测绘工程、地理信息系统、摄影测量与遥感等专业的一门重要的专业基础课程之一，它涉及高等数学、概率论与数理统计、线性代数及矩阵论等知识，同时又是后续其他专业课程的基础，因此具有非常重要的地位。作者根据十多年的教学与实践经验编写了本书，除了一些经典的理论和方法之外，也引入了一些实际案例，该书中既有作者对众多知识的分析归纳，也有对一些问题的独到分析。

教学十几年来，每年都有很多同学反映该课程比较难学，而且学习了课程知识后，不知道如何做题。作者就是本着为同学们解决问题的这种想法，整理了该辅导书。该书所展现的例题中，从分析开始，到具体计算，都有详细的过程。目的就是使初学误差理论与测量平差基础的读者，真正的会利用其中的原理解决实际问题。

本书大量使用了 Excel 电子表格，进行了法方程系数组成以及解算等的相关计算。大部分习题为作者亲自计算，书中符号的意义严格与全国本专科测绘教材保持一致，与很多版本的测量平差基础教材一致。同时，由于习题是由 Excel 计算所得，因此保留了解算的过程和结果，主要表现为数据的小数位较多。同时，该书保留了大量的关于测角网、测边网、边角网等传统三角网的有关题目，虽然这些题目总体偏陈旧，但的确是非常经典的内容，对于读者掌握平差的原理有很大的帮助。

全书共分 10 章，由泰山学院泥立丽、山东科技大学王永、山东交通职业学院（泰山校区）田桂娟、淮海工学院宁伟、北京工业职业技术学院桂维振、山东农业大学杜琳、山东科技大学陶秋香、山东建筑大学赵同龙、山东东山王楼煤矿有限公司刘鹏共同编著。其中，桂维振、刘鹏编写了第 1 章；杜琳编写了第 2 章；泥立丽编写了第 3 章～第 5 章；王永编写了第 6 章、第 7 章；宁伟编写了第 8 章；田桂娟编写了第 9 章；陶秋香、赵同龙编写了第 10 章。此外，山东水利职业学院丁建全老师，山东东山王楼煤矿有限公司刘艳，山东省地质矿产勘查开发局第五地质大队的苗元欣、李军亮、王振、赵梦、魏荣宝，招金矿业股份有限公司刘洪晓、赵俊光，中铁二十三局集团第一工程有限公司的桑志伟等提供了部分素材，并编写了部分内容。全书由王永统一修改定稿，泥立丽、田桂娟审核。

本书得到了很多前辈的帮助，特别是山东科技大学博士生导师独知行教授给予了很大帮助。

本书得到了泰山学院人才基金项目（编号：Y-01-2017001）、泰山学院青年教师科研基金项目（编号：QN-01-201306）资助。

本辅导书有大量计算题，由于时间仓促，疏漏在所难免，恳请使用本书的教师和广大读者批评指正，提出宝贵意见。

编者

2017. 11

目录

第 1 章　绪论 / 1

知识点 …… 1
经典例题 …… 4
习题 …… 5
解析答案 …… 6

第 2 章　测量误差及精度指标 / 7

知识点 …… 7
经典例题 …… 11
习题 …… 13
解析答案 …… 14

第 3 章　协方差传播律及权 / 15

知识点 …… 15
经典例题 …… 22
习题 …… 32
解析答案 …… 37

第 4 章　平差数学模型与最小二乘原理 / 46

知识点 …… 46
经典例题 …… 49
习题 …… 52
解析答案 …… 54

第 5 章　条件平差 / 56

知识点 …… 56
经典例题 …… 64
习题 …… 85
解析答案 …… 94

第 6 章　附有参数的条件平差 / 111

知识点 …… 111
经典例题 …… 113
习题 …… 120
解析答案 …… 124

第 7 章　间接平差 / 133

知识点 …… 133
经典例题 …… 137
习题 …… 155
解析答案 …… 164

第 8 章　附有限制条件的间接平差 / 190

知识点 …… 190
经典例题 …… 192
习题 …… 200
解析答案 …… 203

第 9 章　概括平差函数模型 / 211

知识点 …… 211
经典例题 …… 215
习题 …… 221
解析答案 …… 223

第 10 章　误差椭圆 / 229

知识点 …… 229
经典例题 …… 235
习题 …… 246
解析答案 …… 249

附录　必要观测数 t 的确定方法 / 254

参考文献 / 263

第1章 绪论

知识点

一、定义

测量数据 也称为观测数据，是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的反映地球与其他实体的空间分布有关信息的数据。

测量数据可以是直接测量的结果，也可以是经过某种变换后的结果。

任何测量数据总是包含信息和干扰两部分，其中干扰称为误差，是除了信息以外的部分。因此，测量数据总是不可避免地带有误差。

测量平差 即是测量数据调整的意思。其基本定义是，依据某种最优化准则，由一系列带有观测误差的测量数据，求定未知量的最佳估值及精度的理论和方法。“平差”可以理解成将误差“平掉、抹掉”的意思。

二、观测误差

在教材《数字地形测量学》中，主要学习了观测，通过观测就可以得到观测值。由于观测时总是处于一定的环境之中，所以观测值总是带有误差，而且这种误差是不可避免的。例如，在现实生活中，某人在量取身高时，往往得到的数值是1.8m左右，若精确到mm，量取多次时的结果往往还不一样，因此出现偏差（误差）。除了量取身高这个例子，在量取体重、房间长度等时这种情况也会出现，而且很多人都有这样的经历，从而说明这种偏差是一种客观存在。既然客观存在，那就是不可避免，因此必须要面对，必须要处理，处理的方法就是平差。

(1) 误差的表现形式 包括两种：①多个观测值之间不相等；②观测值与理论值之间不相等。

(2) 误差来源 无论什么样的测量（常规测量、摄影测量、遥感还是GNSS测量等），都会产生误差，引起误差的原因多种多样，但概括起来有以下三个方面：测量仪器、观测

者、外界条件。

这三方面是引起误差的主要来源，常把它们综合起来称为观测条件。所以通常说，观测成果的质量高低客观地反映了观测条件的优劣、观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系：①当观测条件好一些时，观测成果的质量就会高一些；②当观测条件差一些时，观测成果的质量就会低一些；③如果观测条件相同，观测成果的质量就可以说是相同的。

(3) 误差分类 根据误差对测量结果的影响性质，可分为三类：偶然误差、系统误差和粗差。

① 偶然误差：在相同的观测条件下作一系列观测，如果误差在**大小和符号**上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律。

★**注意** 是“大小和符号”，表明两者都。

例如，用经纬仪或全站仪测角时，照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差、仪器本身不完善而引起的误差等都是偶然误差；而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差的代数和，例如照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动或扭转、风力或风向的变化、目标的背影、大气折光和大气透明度等偶然因素影响而产生的小误差的代数和；此外，GNSS 测量中的多路径效应、摄影测量中的像点量测误差、观测人员的自身健康状况、情绪高低等均为偶然误差。

② 系统误差：在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在**大小、符号**上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么这种带有系统性和方向性的误差就称为系统误差。系统误差具有累积性。

★**注意** 是“大小、符号”，表明两者有其一或二，就说明该误差是系统误差。

另外，系统误差又可分为以下 3 种。

常系统误差——假设使用没有调整好零位的仪器进行重复观测，其结果总是略高或略低于真值，这种误差称为零位误差，是系统误差的一种。常系统误差常常表现出固定性，即符号、数值保持不变。

可变系统误差——这种系统误差是按一定规律变化的，表现出累积性：在测量过程中不断增加或者减小；还表现出周期性：数值和符号有规律地变化。

单向误差——这种误差的大小变化不定，但符号总是相同的。

例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时所引起的距离误差；经纬仪因校正或安置的不完善而使所测角度产生误差；全站仪的棱镜常数的设置不正确、棱镜对中杆的倾斜；GNSS 测量中的卫星星历误差、卫星钟差、接收机钟差以及大气折射的误差；摄影测量与遥感中的影像几何畸变、底片变形、大气折光、地球曲率等都属于系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与鉴定尺子时的温度不一致而产生的误差；测角时因大气折光的影响而产生的误差等。此外，如某些观测者在照准目标时，总是习惯于把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧，也会使观测结果带有系统误差。

系统误差与偶然误差都是不可避免的，是一种客观存在。它们在观测过程中是同时发生的，当观测值中系统误差显著偶然误差次要时，观测数据呈现系统性；反之，则呈现出偶然性。

③ 粗差：即粗大误差，是指比在正常观测条件下所可能出现的最大误差还要大的误差，

通俗地说，粗差要比偶然误差大上好几倍。例如，观测时大数读错，计算机输入数据错误，控制网起始数据错误等。

☆**注意** 在理论上，粗差可以避免；但是在实际工作中，由于这样那样的一些原因，粗差通常会存在。粗差对观测结果的影响是非常大的，因此必须去除。

④ 发现、消除误差的方法：通过进行多次重复观测，即多余观测，可以发现误差。消除误差的方法就是进行测量平差。

三、测量平差的简史和发展

1794 年，高斯首先提出最小二乘法；1806 年，A·M·Legendre 从代数观点也独立提出了最小二乘法；自 20 世纪 50—60 年代开始，测量平差得到了很大发展，主要表现在以下几个方面。

(1) 从单纯研究观测的偶然误差理论扩展到包含系统误差和粗差，在偶然误差理论的基础上，对误差理论及其相应的测量平差理论和方法进行全方位研究，大大地扩充了测量平差学科的研究领域和范围。

(2) 1947 年，T·M·Tienstra 提出了相关观测值的平差理论。相关平差的出现，使观测值的概念广义化了，将经典的最小二乘平差法推向更广泛的应用领域。

(3) 经典的最小二乘法平差，所选平差参数（未知量）假设是非随机变量。20 世纪 60 年代末提出并经 20 世纪 70 年代的发展，产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法。

(4) 经典的最小二乘平差法是一种满秩平差问题，即平差时的法方程组是满秩的，方程组有唯一解。经 20 世纪 60—80 年代的研究，形成了一整套秩亏自由网平差的理论体系和多种解法。

(5) 经典平差的定权理论和方法也有革新。许多学者致力于将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究。

(6) 观测中既然包含系统误差，那么系统误差特性、传播、检验、分析的理论研究自然展开，相应的平差方法也产生，如富有系统参数的平差法等。

(7) 观测中有可能包含粗差，相应的误差理论也得到发展。到目前为止，已经形成了粗差定位、估计和假设检验等理论体系。

四、几个认识误区

(1) 既然通过平差可以消除观测值中存在的误差，是不是在外业观测时可以随意观测呢?

答：平差是可以消除误差，但是，所处理的观测数据是严格按照测量规范的要求得到的结果。如果外业观测中不按照规范要求进行，则所得到的观测数据就是低精度的，甚至含有粗差，虽然可以进行平差，但是所得到的平差值有可能是错误的或者是不满足精度要求的。

(2) 平差值一定是最好的吗？一定会满足精度的要求吗?

答：平差值是在某一观测条件下，经过平差后所得到的最好的结果，但是这个结果最终是否满足精度的要求，还要通过进行精度评定之后来判断。所以，平差值未必会满足精度的要求。

(3) 是不是仔细、认真地进行观测，所得到的观测值就不会有误差?

答：无论观测中如何仔细，如何认真，所得的观测值总会含有误差，这一点是毋庸置疑

的，只是观测的误差有大小之别而已。但是，尽管误差不可避免，但是我们在观测中还是要严格按照规范的要求进行观测。

经典例题

例 1-1 为什么说观测值总是含有误差，而且观测误差是不可避免的？

【分析】由于仪器、观测条件、环境等因素的限制，测量不可能无限精确，物理量的测量值与客观存在的真实值之间总会存在着一定的差异，这种差异就是测量误差。例如两个同学都用正确的测量方法，认真、仔细地测量同一支铅笔的长度，其结果也可能不完全相同。但是，一个物体的真实长度总是一定的，我们把物体的真实长度叫作真实值；测量所得的值是物体长度的近似值，叫作测量值；测量值与真实值的差就是测量误差。一般情况下，我们不能知道真实值到底是多少，所以就无法说出测量误差的准确值，只能说出测量误差的范围。当刻度尺的长度大于被测物体的长度时，测量可以一次完成，如用厘米刻度尺一次测量一个小桌子的长，则测量误差的范围不会大于＋0.5cm；用毫米刻度尺一次测量一支铅笔的长，则测量误差的范围为＋0.5mm。当刻度尺的长度小于物体的长度时，需要不断移动刻度尺才能完成测量，则测量误差也将增大。从观测的原理、观测所用的仪器及仪器的调整，到对物理量的每次测量，都不可避免地存在误差，并贯穿于整个测量的始终。

例 1-2 试判断下列情况下误差的性质和符号：

（1）水准测量中视准轴与水准轴不平行；

（2）水准测量中仪器下沉；

（3）水准仪读数不准确；

（4）水准尺下沉；

（5）水准尺竖立不垂直；

（6）GNSS 测量中电离层或对流层的折射；

（7）GNSS 测量中信号的多路径效应。

【分析】首先要知道，该题中，误差的公式为：误差＝理论值－观测值；其次，要明白各小题中测量问题的原理。

针对（1），“视准轴与水准轴不平行”，从而产生了 i 角，则水准尺读数与实际数值有误差；而且在短时间内，可认为 i 角是不变的，故这种误差为系统误差。在《数字地形测量学》中学习过，当 $i>0$ 时，水准尺读数（即观测值）偏大，可得（系统）误差<0，即符号为“－”；当 $i<0$ 时，观测值偏小，可得（系统）误差>0，即符号为“＋”。

针对（2），“仪器下沉”，从而视线高度降低，水准尺读数变小，从而产生系统误差，且符号为“＋”。

针对（3），“读数不准确”，即有可能读数变大，也有可能变小，且变大或变小只能出现一种情况；从而产生偶然误差，误差符号为“＋”或“－”。

针对（4），“水准尺下沉”，由于视线高度不变，水准尺读数变大，从而产生系统误差，且符号为“－”。

针对（5），“水准尺竖立不垂直”，有些水准尺没有圆水准器或者即使有时也不严格竖

直，这样水准尺读数变大，从而产生系统误差，且符号为“－”。

针对（6），“电离层或对流层的折射”，会使信号传播的时间变长，从而产生系统误差，其符号为“－”。

针对（7），“多路径效应”，会使测量结果变大或变小，且只能出现一种情况，从而产生偶然误差，其符号为“＋”或“－”。

因此，该题解如下。

（1）系统误差，当 i 角为正值时，符号为“－”；当 i 角为负值时，符号为“＋”。

（2）系统误差，符号为“＋”。

（3）偶然误差，符号为“＋”或“－”。

（4）系统误差，符号为“－”。

（5）系统误差，符号为“－”。

（6）系统误差，符号为“－”。

（7）偶然误差，符号为“＋”或“－”。

例 1-3 测量平差的基本任务是什么？

【分析】有一点必须明白：测量平差的任务除了确定平差值之外，必须要对所求得的平差值进行精度评定，因为只有满足精度要求，这个平差值才是满足最终要求的；如果不满足精度要求，即使它是平差值也是不可以的。

因此，测量平差的基本任务包括以下两点：

（1）对一系列带有观测误差的观测值，运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值；

（2）评定测量成果的精度。

习 题

1-1 以下几种情况会使结果产生误差，试分别判断误差的性质及符号：（1）钢尺量距时尺长不准确；（2）钢尺量距时尺不水平；（3）经纬仪测角时估读小数不准确；（4）钢尺量距时尺子垂曲或反曲；（5）钢尺量距时尺端偏离直线方向；（6）钢尺的尺长鉴定过程中，尺长与标准尺比较产生的误差；（7）摄影测量中像点的量测误差。

1-2 什么是多余观测？在测量中为什么要进行多余观测？

1-3 高斯于哪一年提出最小二乘法？最小二乘法主要是为了解决什么问题？

解析答案

1-1 【解析】

（1）系统误差，当尺长大于标准尺长时，观测值小，符号为“+”；当尺长小于标准尺长时，观测值大，符号为“−”。

（2）系统误差，符号为“−”。

（3）偶然误差，符号为“+”或“−”。

（4）系统误差，符号为“−”。

（5）系统误差，符号为“−”。

（6）偶然误差，符号为“+”或“−”。

（7）偶然误差，符号为“+”或“−”。

1-2 【解析】多余观测——指观测值的个数多于确定未知量所必需的个数。

偶然误差产生的原因十分复杂，又找不到完全消除其影响的办法，观测结果中就不可避免存在着偶然误差的影响，因此，在实际测量工作中，为了检核观测值中有无错误，提高成果的质量，必须进行多余观测。

1-3 【解析】1794 年，高斯提出了最小二乘原理，用以解决如何从带有误差的观测值中找出未知量的最佳估值。

第2章 测量误差及精度指标

知识点

一、误差的定义

把第 i 次观测中发生的偶然误差称为单一误差或个体误差，把它定义为观测值与相应的理论值之差：

误差=理论值－观测值

单一误差有两种形式：真误差和改正数。

(1) 真误差

$$\Delta_i=\widetilde{L}_i-L_i \tag{2-1}$$

若以被观测值的数学期望表示该观测值的真值，则 $\Delta=E(L)-L=\widetilde{L}-L$。

(2) 改正数

$$V_i=\hat{L}_i-L_i \tag{2-2}$$

需要说明：本书所讲内容属于经典平差范畴，因此，所说的误差即指偶然误差。

二、偶然误差的规律性

(1) 有界性 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，其出现的概率为零；

(2) 单峰性 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大；

(3) 对称性 绝对值相等的正负误差出现的概率相同；

(4) 抵消性 偶然误差的数学期望 $E(\Delta)=0$，即偶然误差的理论平均值为零。

三、衡量精度的指标

(1) 方差和中误差 当观测次数 n 趋向无穷时，则理论值公式：

$$\sigma^2=D(\Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \text{ 或 } \sigma^2=D(\Delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{2-3}$$

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2-4}$$

实用中，观测次数 n 总是有限，则估计值公式：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{2-5}$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2-6}$$

★**注意** 本文中定义 σ 为非负值。

(2) 平均误差

理论公式

$$\theta=E(|\Delta|)=\int_{-\infty}^{\infty}|\Delta|f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \text{ 或 } \theta=\lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{2-7}$$

实用公式(估值公式)

$$\hat{\theta}=\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{2-8}$$

★**注意** 关系式 $\theta\approx0.7979\sigma$，是平均误差 θ 与中误差 σ 的理论关系式；需要明白，当 n 取有限值时，该关系式有时不满足。

(3) 或然误差 误差出现在（$-\rho$，$+\rho$）之间的概率等于 1/2，即

$$\int_{-\rho}^{+\rho}f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{2} \tag{2-9}$$

★**注意** 关系式 $\rho\approx0.6745\sigma$，是或然误差 ρ 与中误差 σ 的理论关系式；需要明白，当 n 取有限值时，该关系式有时不满足。

在实用上，因为观测值个数 n 是有限值，因此也只能得到 ρ 的估值，仍简称为或然误差。

或然误差求解方法：将在相同观测条件下得到的一组误差，按绝对值的大小排列。当 n 为奇数时，取位于中间的一个误差值作为 $\hat{\rho}$；当 n 为偶数时，则取中间两个误差值绝对值的平均值作为 $\hat{\rho}$。

(4) 极限误差

$$\Delta_{\text{限}}=3\sigma \tag{2-10}$$

当对观测质量要求高时，可取 $\Delta_{\text{限}}=2\sigma$，但是得说明。

在大量同精度观测的一组误差中，误差落在（$-\sigma$，$+\sigma$），（-2σ，$+2\sigma$）和（-3σ，$+3\sigma$）的概率分别为

$$P(-\sigma,+\sigma)=68.3\%$$
$$P(-2\sigma,+2\sigma)=95.5\%$$
$$P(-3\sigma,+3\sigma)=99.7\%$$

(5) 相对误差 对于某些观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏。

例如，分别丈量了 1000m 及 80m 的两段距离，观测值的中误差均为 2cm，虽然两者的中误差相同，但就单位长度而言，两者精度并不相同。显然前者的相对精度比后者要高。此时，通常采用相对中误差，它是中误差与观测值之比。如上述两段距离，前者的相对中误差为 1/50000，后者则为 1/4000。

相对中误差是个无名数，在测量中一般将分子化为 1，即用 $1/N$ 表示。

四、精度、准确度与精确度

(1) 精度 是指误差分布密集或离散的程度，其衡量指标包括很多，常用中误差。

(2) 准确度 又名准度，是指随机变量 X 的真值 $\widetilde{X}$ 与数学期望 $E(X)$ 之差，即

$$\varepsilon=\widetilde{X}-E(X) \tag{2-11}$$

即 $E(X)$ 的真误差，这是存在系统误差的情况。衡量系统误差大小程度的指标是准确度。

(3) 精确度 是精度和准确度的合成，是指观测结果与其真值的接近程度，包括观测结果与其数学期望接近程度和数学期望与其真值的偏差。

因此，精确度反映了偶然误差和系统误差联合影响的大小程度。当不存在系统误差时，精确度就是精度，精确度是一个全面衡量观测质量的指标。

精确度的衡量指标为均方误差，设观测值为 X，均方误差的定义为

$$MSE(X)=E\,(X-\widetilde{X})^2 \tag{2-12}$$

对于随机向量 $\underset{n1}{X}$，则均方误差的定义为

$$MSE(X)=E[(X-\widetilde{X})^{\mathrm{T}}(X-\widetilde{X})] \tag{2-13}$$

五、Excel 中常用的几个关于矩阵运算的函数

(1) 矩阵求逆

"＝MINVERSE（方阵）"：返回逆矩阵。

例如：求方阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&4\\2&0&5\end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

具体步骤如下：①打开 Excel 软件，在表格中输入方阵 A，如图 2-1 所示，A 的位置为"A2：C4"；②选中 A 的逆矩阵 A^{-1} 的位置："D2：F4"；③将光标移至编辑栏中，在编辑栏中输入"＝MINVERSE（A2：C4）"；④按组合键：Ctrl＋Shift＋Enter，然后就计算出了 A^{-1}，即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5/11&10/11&-7/11\\7/11&-3/11&1/11\\2/11&-4/11&5/11\end{bmatrix}$。

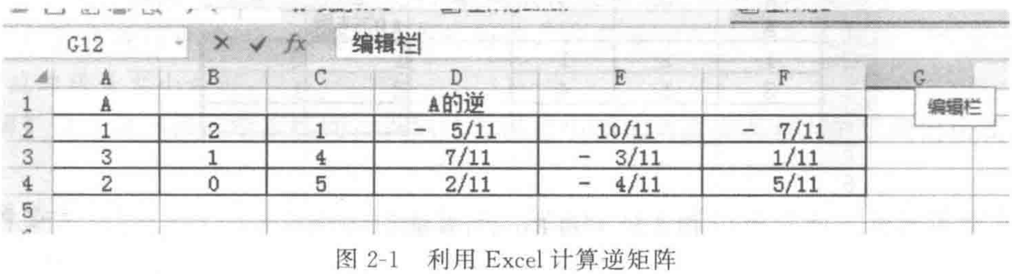

图 2-1 利用 Excel 计算逆矩阵

(2) 矩阵相乘

“$=$MMULT（矩阵 1，矩阵 2）”：返回矩阵乘积。

例如：矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$和 $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，求它们的乘积：$A\times B$。

具体步骤如下：①打开 Excel 软件，在表格中输入矩阵 A 和 B，如图 2-2 所示，A 的位置为“A2∶C3”，B 的位置为“E2∶F4”；②选中 $A\times B$ 的位置：“A7∶B8”；③将光标移至编辑栏中，在编辑栏中输入“$=$MMULT（A2∶C3，E2∶F4）”；④按组合键：Ctrl$+$Shift$+$Enter，然后就计算出了 $A\times B$，即 $A\times B=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 19 & 14\end{bmatrix}$。

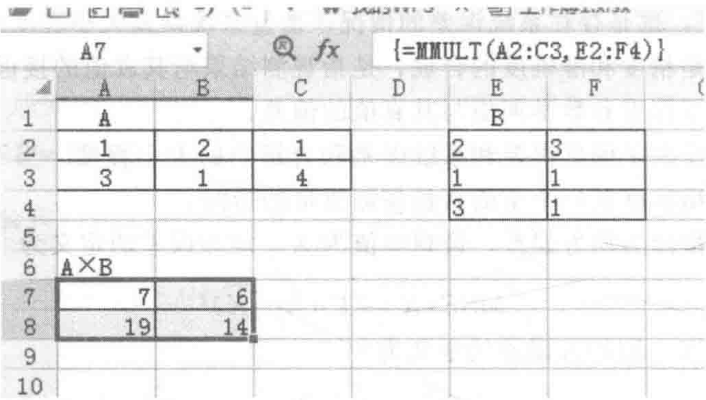

图 2-2　利用 Excel 计算矩阵乘积

(3) 矩阵求转置

“$=$TRANSPOSE（矩阵）”：返回矩阵的转置。

例如：求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$的转置。

具体步骤如下：①打开 Excel 软件，在表格中输入矩阵 A，如图 2-3 所示，A 的位置为“A2∶C3”；②选中 A 的转置的位置：“E2∶F4”；③将光标移至编辑栏中，在编辑栏中输入“$=$TRANSPOSE（A2∶C3）”；④按组合键：Ctrl $+$ Shift $+$ Enter，然后就计算出了 $A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$。

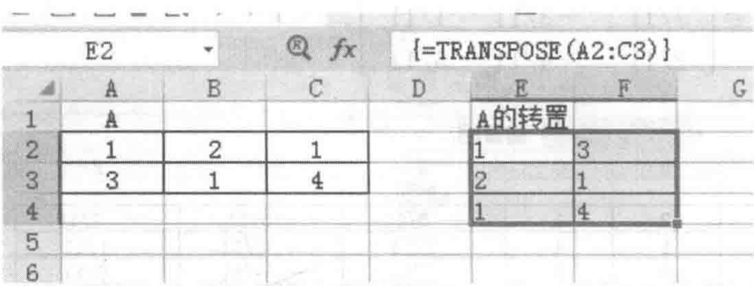

图 2-3　利用 Excel 计算矩阵的转置

(4) 矩阵求行列式

“＝MDETERM（方阵）”：计算矩阵的行列式。

例如，求方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 1 & 4\\2 & 0 & 5\end{bmatrix}$ 的行列式。

具体步骤如下：①打开 Excel 软件，在表格中输入方阵 A，如图 2-4 所示，A 的位置为“A2∶C4”；②选中 A 的行列式的位置：“E2”；③将光标移至编辑栏中，在编辑栏中输入“＝MDETERM（A2∶C4）”；④按组合键：Ctrl＋Shift＋Enter，然后就计算出了 $|A|=-11$。

图 2-4 利用 Excel 计算方阵的行列式

经典例题

例 2-1 观测值的真误差是怎样定义的？三角形的闭合差是什么观测值的真误差？

【分析】真误差是真值与观测值之差，真值和观测值一个做被减数，另一个做减数即可。在很多参考书中，有的是观测值做被减数，真值做减数；有的是真值做减数，观测值做被减数。

【解】在该书中，真误差等于真值减去观测值，即真值是被减数，观测值是减数，因此观测值的真误差定义如下：

$$真误差=真值-观测值$$

三角形的闭合差是其三个内角和的真误差。

【说明】在很多情况下，观测值的真值往往是不知道的，因此它的真误差往往就不能求得。平面 n 边形的内角和 $(n-2)\cdot 180°$，是为数不多的真值已知的情况。

例 2-2 在相同的观测条件下，对同一个量进行若干次观测得到一组观测值，这些观测值的精度是否相同？能否认为误差小的观测值比误差大的观测值精度高？

【分析】在教材中学过，只要观测条件相同，所得观测值的精度就相同，不论这些观测值所对应的误差大小如何。

【解】这些观测值的精度相同；不能认为误差小的观测值比误差大的观测值精度高。

例 2-3 若有两个观测值的中误差相同，那么，是否可以说这两个观测值的真误差一定相同？为什么？

【分析】这个题需要参考中误差公式 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$，通过 n 取不同数时进行验证。

【解】不可以说这两个观测值的真误差一定相同。

原因：根据中误差公式，当 $n=2$ 时，不妨设两个观测值的中误差分别为 $\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\Delta_1'^2+\Delta_2'^2}{2}}$ 和 $\sigma_2=\sqrt{\frac{\Delta_1''^2+\Delta_2''^2}{2}}$，则有 $\Delta_1'^2+\Delta_2'^2=\Delta_1''^2+\Delta_2''^2$，例如 $2^2+3^2=(-2)^2+(-3)^2$ 和 $2^2+3^2=2^2+3^2$，都满足中误差相等，但是其真误差有时相同，有时不同。

例 2-4 有两段距离 S_1 和 S_2，经多次观测求得观测值及中误差分别为 330.00m±3cm 和 630.00m±3cm，试问哪段距离观测精度高？二者各自观测值的真误差是否相同？

【分析】由题意可知，两段距离的中误差相等，但是长度不同，因此依据相对误差定义式可知两者精度不同；同时，再依据例 2-3 中的分析，可知真误差不一定相等。

【解】它们的真误差不一定相等；它们的精度不相等，后者高于前者。

例 2-5 设观测向量 $X=[L_1\quad L_2\quad L_3]^{\mathrm{T}}$，它的协方差阵为 $D_{XX}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$，求出观测值 L_1、L_2、L_3 的中误差及其协方差 $\sigma_{L_1L_2}$、$\sigma_{L_1L_3}$ 和 $\sigma_{L_2L_3}$。

【分析】该题是考查对协方差阵定义的理解程度；同时大家还要注意，在测量误差领域中，通常观测向量是以列的形式定义的，即 X 是 3 行 1 列的向量。在协方差阵中，主对角线上的元素为各分量的方差，非主对角线上的元素为分量间的协方差。

【解】根据协方差阵的定义，可得

$$\sigma_{L_1}=2,\ \sigma_{L_2}=\sqrt{2},\ \sigma_{L_3}=\sqrt{5},\ \sigma_{L_1L_2}=-1,\ \sigma_{L_1L_3}=0,\ \sigma_{L_2L_3}=\sqrt{2}$$

例 2-6 设有两组观测值，它们的真误差如下：

第 1 组：+2，−3，+1，+2，−2，−1

第 2 组：+1，−1，−5，+2，+1，−1

试求，(1) 它们的平均误差 $\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$；(2) 它们的中误差 $\hat{\sigma}_1$、$\hat{\sigma}_2$；(3) 它们的或然误差 $\hat{\rho}_1$、$\hat{\rho}_2$；(4) 判别它们之间的精度高低。

【解析】每组均为 6 个数据，则列表如下。

第 1 组	+2	−3	+1	+2	−2	−1	
绝对值	2	3	1	2	2	1	$\Sigma=11$
平方	4	9	1	4	4	1	$\Sigma=23$
第 2 组	+1	−1	−5	+2	+1	−1	
绝对值	1	1	5	2	1	1	$\Sigma=11$
平方	1	1	25	4	1	1	$\Sigma=33$

由平均误差公式 $\hat{\theta}=\frac{\sum|\Delta|}{n}$，得 $\hat{\theta}_1=1.833$，$\hat{\theta}_2=1.833$；