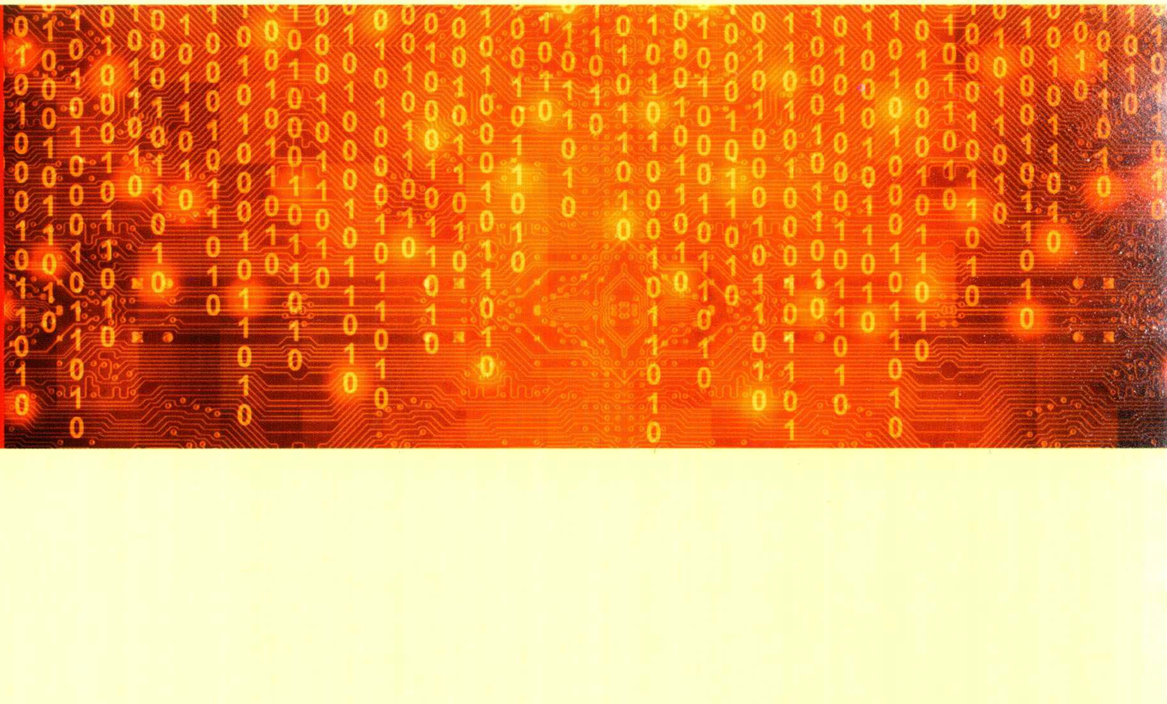
高校核心课程学习指导丛书

信号与系统
学习指导与考研题精解

XINHAO YU XITONG
XUEXI ZHIDAO YU KAOYAN TI JINGJIE

胡 钋／编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

胡　钋 / 编著

信号与系统
学习指导与考研题精解

XINHAO YU XITONG
XUEXI ZHIDAO YU KAOYAN TI JINGJIE

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书是为指导正在学习和复习备考研究生入学考试的学生透彻掌握“信号与系统”课程精髓，切实提高综合分析和解决问题能力而编写的。全书共9章，全面介绍了信号与系统的基本内容；深入分析、讲解了所精选的典型的并能反映信号与系统不同侧面的例题，在解题过程中不仅强调深入理解基本概念和基本分析方法的重要性，同时亦强调并展示了技巧的灵活运用，以及综合运用的神奇魅力。

本书可作为高等学校本科学生的教学辅导用书，也可作为报考电子、信息工程、通信工程、计算机科学与技术、测控技术与仪器等专业及其他相关专业硕士研究生的考生的复习参考用书，还可作为申请信息与通信工程硕士学位同等学力人员的备考用书。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习指导与考研题精解/胡钋编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2018.1
(高校核心课程学习指导丛书)
ISBN 978-7-312-04081-8

Ⅰ.信…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.信号系统—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第315001号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷　安徽国文彩印有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　22.5
字数　646千
版次　2018年1月第1版
印次　2018年1月第1次印刷
定价　58.00元

前　　言

“信号与系统”是现代信息学科十分重要的技术基础课，是通信工程、电子信息工程、光电子工程、计算机、自动控制、电子科学技术等专业的必修课，还是相关专业硕士研究生入学考试科目之一。

“信号与系统”是以“高等数学”“工程数学”“电路理论”等课程为基础，理论性和实践性都非常强的专业基础课程，它既研究信号与系统分析的理论和方法，也讨论信号与系统相互作用的具体过程，因而要求学生不但要熟谙信号与系统的基本理论和基本分析方法，还要深刻理解和掌握信号与系统的基本概念和重要结论以及数学工具与分析方法，尽可能地将理论分析所得出的结论以及理论分析方法本身与实际的物理概念紧密联系起来，只有这样才能完整透彻地掌握好“信号与系统”这门课程的精髓。而要真正做到做好这一点，就必须钻研大量的典型例题，做相当数量的习题。因此，为了帮助正在学习这门课程的本科生和研究生备考者深入学习和把握“信号与系统”课程的理论知识，灵活运用其分析方法，提高综合分析和求解各种复杂问题的能力，作者根据自己长期从事该课程教学工作的实际经验和科研工作的心得，对本课程的重点、难点及分析解题方法进行了深入、全面、系统的总结，以授之以渔的战略思维高度和实事求是的实战求解过程编写了这本学习指导和解题指南。

本书共9章：信号与系统的基本概念；连续时间系统的时域分析；连续信号的频谱——傅里叶变换；连续时间系统的频域分析；连续时间系统的复频域分析；离散信号与系统的时域分析；离散时间信号与系统的频域分析；Z 变换与离散时间系统的 z 域分析；系统的状态变量分析。本书包含了“信号与系统”课程的全部内容与核心知识点，通过融汇多种具有代表性的典型例题，讲述了该课程的基本理论和基本方法以及经典分析方法和现代解题技巧。相信广大读者通过仔细阅读，一定会有所收获。

在本书的编写过程中，作者得到了武汉大学电气工程学院“信号与系统”课程组老师的帮助，也得到了唐炬、刘开培、查晓明、阮江军、常湧等有关专家的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

胡　钋

2017 年 5 月

目　　录

第1章 信号与系统的基本概念

1.1 信号及其描述方式

所谓信号，广泛地说它是随时间变化的物理量，是传递和记录信息的一种工具。从数学的角度而言，它可以看成是一个或多个独立变量的函数表达式。从通信技术角度而言，它指借助电、光、声信号将文字、图像、语音、数码等信息从甲地传递到乙地或对不同信号进行各种形式的处理。

信号的描述方式主要有两种：一种是解析函数表达形式；另一种是图像表达形式。信号的独立变量与其函数的依托关系是多种形式的，如以时间特征量作为自变量来表示信号，则称之为时域表示法，即把一个信号随时间变化的规律用 $x = x(t)$ 的解析函数表达式描述出来，或通过图像的形式描述出来。

1.2 信号的分类

1.2.1 确定性信号与随机信号

如果信号可以表示为一个或几个自变量的确定函数，则称此信号为确定性信号。如果一个信号在发生以前无法确切地知道它的波形，即该信号没有确定的函数表达式，而只能预测该信号对某一数值的概率，则称这样的信号为随机信号。

1.2.2 周期信号与非周期信号

如果一个信号每隔固定的时间 T 能精确地再现该信号本身，则称之为周期信号。周期信号具有两大特点，即周而复始和无始无终。一个时间周期信号的表达式为

$$x(t) = x(t \pm nT), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

非周期信号无周期性。

1.2.3 连续时间信号与离散时间信号

如果在所讨论的时间间隔内，除若干个不连续点之外，对于任意时间值都可给出确定的函数值，此信号就称为连续信号，对应的函数用 $x(t)$ 表示。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的（只取某些规定值）。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。离散信号在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义，函数符号为 $x(n)$，仅当 n 为整数时 $x(n)$ 才有定义。如果离散时间信号的幅值是连续的，则又可称之为抽样信号；另一种情况是时间与

幅值都具有离散性，这种信号称为数字信号。

例 1.1 判断下列各信号的类型。

(1) $x(t)=e^{-at}\cos\omega t$；　(2) $x(t)=\varepsilon(\cos\pi t)$；　(3) $x(t)=\mathrm{sgn}\,\sin\pi t$；

(4) $x(n)=e^{-Tn}$；　(5) $x(n)=\cos\pi n$；　(6) $x(n)=\sin\omega_0 n$；

(7) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$。

解 (1) 连续信号；

(2) 连续(模拟)信号，量化信号，值仅取 0,1；

(3) 连续(模拟)信号，量化信号，值仅取 1，−1；

(4) 离散信号；

(5) 离散信号，数字信号；

(6)(7) 为离散信号。

例 1.2 (1) 下列信号中哪些不是周期信号？(　　)

A. $\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$　　B. $\cos\left(\frac{n}{8}-\pi\right)$

C. $\sin\left(\frac{6\pi}{7}+1\right)$　　D. $\cos\frac{n^2\pi}{8}$

(2) 设 $x(n)=0(n<-2,n>4)$，试确定使下列信号为零的值：

① $x(n-3)$。(　　)

A. $n=3$　　B. $n<7$　　C. $n>7$　　D. $n<1$ 且 $n>7$

② $x(-n-2)$。(　　)

A. $n>0$　　B. $n>0,n<-6$　　C. $n=2$ 或 $n>0$　　D. $n=-2$

解 运用“正弦数列周期信号的周期不能是无理数”来判断其是否为周期信号，运用平移及卷积的性质来判断信号的取值范围。

(1) B。

对于 B，由 $\frac{n}{8}=2\pi$ 得 $n=16\pi$，n 不是有理数。对于 C，是常数，当然属于周期信号。对于 D，设其周期为 m，则有

$$(m+n)^2\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{n^2}{8}\pi\ (k=0,1,2,\cdots)\quad\Rightarrow\quad m^2+2mn=16k$$

取周期 $m=8$ 即可满足，是周期信号。

(2) ① D。令 $m=n-3$，将各选项代入。若 $m\cap[2,4]=\varnothing$，则 $x(m)=0$。

② B。令 $m=-n-2$，依照①中的方法进行判断。

例 1.3 试求信号 $x(n)=e^{j0.2n\pi}+e^{-j0.3n\pi}$的周期。

解 (a) 因为 $\omega_0=0.2\pi$，所以

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{0.2\pi}=\frac{1}{0.1}=10,\quad N_1=10$$

(b) 因为 $\omega_0=0.3\pi$，所以

$$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{0.3\pi}=\frac{1}{0.15}=\frac{20}{3},\quad N_2=20$$

综上，两者的公共周期即所求周期为 20。

例 1.4 判断下列序列是否为周期数列。若是，则周期 N 为何值？

(1) $x(n)=A\cos\left(\frac{5\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$；　　(2) $x(n)=e^{j(n/8-\pi)}$。

解 (1) 若存在一个整数 N，使得

$$x(n+N)=A\cos\left[\frac{5\pi}{7}(n+N)-\frac{\pi}{8}\right]=A\cos\left(\frac{5\pi}{7}n+\frac{5\pi N}{7}-\frac{\pi}{8}\right)$$

取 $5\pi N/7=2m\pi(m=0,1,2,\cdots)$，得 $N=\dfrac{2m\times 7}{5}$。当取 $m=5$ 时，$N=14$，因此 $x(n)$为周期序列，其周期 $N=14$。

(2) 要使 $x(n)$为周期数列，则必须满足$\dfrac{N}{8}=2m\pi(m=0,1,2,\cdots)$，即 $N=16m\pi$，但无论 m 取何整数，都不能使 N 为整数，因此 $x(n)$不是周期序列。

例 1.5　确定下面的信号是否为周期信号。如果是周期信号，找出其基本周期，并计算其直流分量。

(1) $\cos 2\pi t+\sin 5\pi t$；

(2) $\cos 2\pi t+\sin 2t$；

(3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n[\varepsilon(t-nT)-\varepsilon(t-nT-T)]$($n$ 为正整数)。

解　对于前两小题利用结论：设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的基本周期分别为 T_1 和 T_2，则 $x_1(t)+x_2(t)$为周期信号的条件是$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{k}{m}$($k,m$ 皆为正整数)为有理数，且其周期应满足 $T=mT_1=kT_2$。对于最后一小题，可通过分析信号在不同区间内的取值情况来计算周期。利用公式 $\dfrac{1}{T}\int_0^T x(t+T)\mathrm{d}t$(或$\dfrac{1}{M}\sum\limits_{n=0}^{M-1}x(n)$)，计算直流分量。

(1) $\cos 2\pi t$ 的周期为 $T_1=1$，$\sin 5\pi t$ 的周期为 $T_2=\dfrac{2}{5}$。由于$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{5}{2}$为有理数，所以 $\cos 2\pi t+\sin 5\pi t$ 为周期信号，其周期为 $T=2$。

(2) $\cos 2\pi t$ 的周期为 $T_1=1$，$\sin 2t$ 的周期为 $T_2=\pi$。由于$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{1}{\pi}$为无理数，故 $\cos 2\pi t+\sin 2t$ 不是周期信号。

(3) 易证明该信号在区间$(2kT,(2k+1)T)$内取 1，而在区间$((2k+1)T,(2k+2)T)$内取 -1，即在 $2T$ 间隔内交替出现 1 和 -1，故信号周期为 $2T$。

例 1.6　设周期信号 $y_1(t)$，$y_2(t)$的周期分别为 T_1，T_2，欲使和信号

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

也是周期信号，问 T_1，T_2 间应满足什么关系？如果 $T_1=4$，$T_2=6$，试确定和信号 $y(t)$的基波周期。

解　因为 $y_1(t)$，$y_2(t)$是周期信号，所以有

$$y_1(t+mT_1)=y_1(t),\quad y_2(t+nT_2)=y_2(t)$$

欲使 $y(t)$也是周期的，应有

$$y(t+T)=y_1(t+T)+y_2(t+T)=y_1(t)+y_2(t)=y(t)$$

所以

$$T=mT_1=nT_2\quad\Rightarrow\quad\frac{T_1}{T_2}=\frac{n}{m}\quad(m,n\ \text{皆为整数})\tag{1.1}$$

式(1.1)表明，只要 $y_1(t)$和 $y_2(t)$是周期的，它们的和信号当满足 T_1/T_2 是有理数时亦为周期的，其基波周期 T 就是 T_1 和 T_2 的最小公倍数。

对于 $T_1=4$，$T_2=6$，两者的最小公倍数是 12，所以 $y(t)$的基波周期 $T=12$。

1.2.4　能量信号与功率信号

若信号 $x(t)$的能量有限，即 $0<E=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\mathrm{d}t<\infty$，此时 $P=0$，则称该信号为能量信号；若

信号 $x(t)$的功率有限，即 $0 < P = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t < \infty$，此时 $E=\infty$，则称该信号为功率信号。对于周期信号，其能量随着时间的增加可以趋于无限，但功率是有限值，所以周期信号属于功率信号，而非周期信号则既可以是能量信号，也可以是功率信号。

例 1.7 求图 1.1 所示信号的功率谱和信号占有频带内的平均功率占整个信号平均功率的百分数。

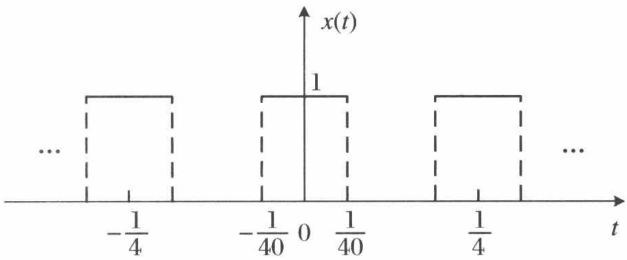


图 1.1

解 由于

$$\tau=\frac{1}{20}\ \mathrm{s}=0.05\ \mathrm{s},\quad T=0.25\ \mathrm{s}=5\tau$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}=8\pi\ \mathrm{rad/s}$$

$$\Delta\omega_{\mathrm{s}}=\frac{2\pi}{\tau}=\frac{2\pi}{\frac{T}{5}}=5\Omega=40\pi\ \mathrm{rad/s}$$

故在信号占有频带内共有 5 个谐波分量。

整个信号的平均功率为

$$P=\frac{1}{T}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[x(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{0.25}\int_{-\frac{1}{40}}^{\frac{1}{40}}\bar{I}^2\mathrm{d}t=0.2\ \mathrm{W}$$

因为

$$A_n=\frac{2\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

故

$$A_0=\frac{2\tau}{T}=0.4,\quad \frac{A_0}{2}=0.2$$

$$A_1=\frac{2\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{1\Omega\tau}{2}}{\frac{1\Omega\tau}{2}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}}=0.374$$

$$A_2=\frac{2\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{2\Omega\tau}{2}}{\frac{2\Omega\tau}{2}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{5}}=0.303$$

$$A_3=\frac{2\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{3\Omega\tau}{2}}{\frac{3\Omega\tau}{2}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\frac{3\pi}{5}}=0.202$$

$$A_4=\frac{2\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{4\Omega\tau}{2}}{\frac{4\Omega\tau}{2}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\frac{4\pi}{5}}=0.093\ 6$$

$$A_5=\frac{2\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{5\Omega\tau}{2}}{\frac{5\Omega\tau}{2}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin\frac{5\pi}{5}}{\frac{5\pi}{5}}=0$$

从而有

$$P_0=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2=0.04\ (\mathrm{W}),\quad P_1=\frac{1}{2}A_1^2=0.07\ (\mathrm{W})$$

$$P_2=\frac{1}{2}A_2^2=0.046\ (\mathrm{W}),\quad P_3=\frac{1}{2}A_3^2=0.020\ 4\ (\mathrm{W})$$

$$P_4=\frac{1}{2}A_4^2=0.043\ 8\ (\mathrm{W}),\quad P_5=\frac{1}{2}A_5^2=0\ (\mathrm{W})$$

信号在占有频带内的平均功率为

$$P_{\Delta\omega_s}=P_0+P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=0.180\ 8\ (\mathrm{W})$$

故所求百分数为

$$\frac{P_{\Delta\omega_s}}{P}=90.3\%$$

例 1.8 已知信号 $y(t)=0(t<3)$。试确定使下列信号为零的 t 的值。

(1) $y(1-t)+y(2-t)$。(　　)

A. $t>-2$ 或 $t>-1$　　B. $t=1$ 或 $t=2$

C. $t>-1$　　D. $t>-2$

(2) $y(1-t)\cdot y(2-t)$。(　　)

A. $t>-2$ 或 $t>-1$　　B. $t=1$ 或 $t=2$

C. $t>-1$　　D. $t>-2$

(3) $y\left(\frac{t}{3}\right)$。(　　)

A. $t>3$　　B. $t=0$　　C. $t<9$　　D. $t=3$

解 (1) 由 $1-t<3$ 且 $2-t<3$,得 $t>-1$,故选 C。

(2) 由 $1-t<3$ 或 $2-t<3$,得 $t>-2$,故选 D。

(3) 由 $\frac{t}{3}<3$,得 $t<9$,故选 C。

1.3 常用单元信号

1.3.1 正弦信号

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$

式中 A 为振幅,ϕ 为初位相,ω 为角频率。

1.3.2 指数信号

$$x(t)=Ae^{at},\quad -\infty<t<\infty$$

其中 a 为任意常数。

1.3.3 抽样信号

$$x(t)=\frac{\sin t}{t}=Sa(t)$$

1.3.4 高斯信号

$$x(t)=Ee^{-(t/\tau)^2}$$

1.3.5 单位阶跃信号

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

1.3.6 单位冲激信号

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

1.3.7 符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

1.3.8 单位斜变信号

$$r(t)=\begin{cases}t, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

1.3.9 冲激偶信号 $\delta'(t)$

冲激函数的微分(阶跃函数的二阶导数)将呈现正、负极性的一对冲激,称为冲激偶信号。

例 1.9 求下列各和式。

(1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-2)$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(3n+4)\delta(n+2)$。

解　(1) 由 $\delta(k-2)=1$,知 $k=2$;由 $\delta(k-2)=0$,知 $k\neq 2$。原式中 k 从 $-\infty$到∞求和都经历 $k=2$时刻,所以答案为 1。

(2) 由 $\delta(n+2)=0$,知 $n\neq -2$。原式求和范围是$[0,\infty)$,不包含 $n=-2$,所以答案为 0。

1.4　信号的运算

1.4.1　信号的和与积运算

信号的和与积运算是指信号的代数相加与相乘。

1.4.2　信号的时移运算

$$x(t)\rightarrow x(t+a)$$

当 $a>0$ 时,信号波形图左移;当 $a<0$ 时,信号波形图右移。

1.4.3　信号的尺度变换

$$x(t)\rightarrow x(at)$$

其中 a 为压扩系数,a 可以为正值,也可以为负值,但 $a\neq 0$。

若 $a>1$,则将 $x(t)$的图像沿横轴压缩到 $1/a$ 即得到$x(at)$的图像;若 $0<a<1$,则将 $x(t)$的图像沿横轴扩展到 $1/a$ 倍即得到$x(at)$的图像。

1.4.4　信号反折运算

$$x(t)\rightarrow x(-t)$$

将原信号 $x(t)$的图像相对于纵轴做反折。

1.4.5　信号的幅度变换运算

$$x(t)\rightarrow ax(t)$$

将 $x(t)$的图像上每个时刻对应的值乘以 a,就得到 $ax(t)$的图像。

1.4.6　信号的微分与积分运算

做信号的微分运算时,注意信号在间断点处的微分结果应是一个冲激信号。做信号的积分运算时,注意分段积分时前一段积分对后面积分的影响。

例 1.10　完成下列信号的运算。

(1) $x_1(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]$;　　(2) $x_2(t)=\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\delta(t+2)\mathrm{d}t$;

(3) $x_3(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$;　　(4) $x_4(t)=\varepsilon(2t-1)\delta(t-1)$;

(5) $x_5(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(2t-t_0)\delta(t-1)\mathrm{d}t$；　　(6) $x_6(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t)\cos t\mathrm{d}t$；

(7) $x_7(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-1)\mathrm{d}t$。

解　(1) 方法1

$$x_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]=\delta'(t)$$

方法2　按两函数乘积的微分来求，步骤如下：

$$x_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]=-\mathrm{e}^{-t}\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\delta'(t)=-\delta(t)+\delta'(t)-[-\delta(t)]=\delta'(t)$$

这种做法没有注意到冲激函数的性质，使得求解过程较繁。但有时冲激偶函数的性质

$$x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$$

会被错误地写成

$$x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)$$

这样就会得出如下错误结果：

$$x_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]=-\mathrm{e}^{-t}\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\delta'(t)=-\delta(t)+\delta'(t)$$

(2) 因为 $\delta(t+2)$是在 $t=-2$ 处的冲激，它不在积分范围内，所以 $x_2(t)=0$。如果不注意这一点，会得到如下错误结果：

$$x_2(t)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos t\ \delta(t+2)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^2\cos(-2)=\mathrm{e}^2\cos 2$$

(3) $x_3(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}[\delta'(\tau)+\delta(\tau)]\mathrm{d}\tau=\delta(t)+\varepsilon(t)$。

(4) $x_4(t)=\varepsilon(2t-1)\delta(t-1)=\varepsilon(1)\delta(t-1)=\delta(t-1)$。

(5) $x_5(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(2t-t_0)\delta(t-1)\mathrm{d}t=\varepsilon(2-t_0)=\begin{cases}1, & t_0<2,\\ 0, & t_0>2。\end{cases}$

(6) $x_6(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t)\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$。

(7) $x_7(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-1)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t+1)+\delta(t-1)]\mathrm{d}t=2$。

此题要注意冲激信号 $\delta(t^2-1)$的含义。因为 $\delta(t)$的含义是在 $t\neq0$ 时为零，而在 $t=0$ 时有一个冲激，当 $t=\pm1$ 时，$t^2-1=0$，所以不难理解 $\delta(t^2-1)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$。

例1.11　求下列各信号的积分运算。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$；　　(2) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t-8)\varepsilon(t-4)\mathrm{d}t$；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t-4)\varepsilon(t-8)\mathrm{d}t$；　　(4) $\int_{-\infty}^{\infty}2(t^3+4)\delta(1-t)\mathrm{d}t$；

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\delta(t+3)\mathrm{d}t$；　　(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-3t-1}\delta(t)\mathrm{d}t$。

解　(1) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}4\delta(t)\frac{\sin 2t}{2t}\mathrm{d}t=4$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t-8)\varepsilon(t-4)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t-8)\times1\mathrm{d}t=2$。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t-4)\varepsilon(t-8)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t-4)\times0\mathrm{d}t=0$。

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}2(t^3+4)\delta(1-t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}2(1^3+4)\delta[-(t-1)]\mathrm{d}t=10$。

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(t+3)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(-3)}\delta(t+3)dt = e^{3}$。

(6) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t-1}\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\times 0-1}\delta(t)dt = e^{-1}$。

例 1.12　计算下列各式。

(1) $x(t+t_0)\delta(t)$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0)\delta(t+t_0)dt$；

(3) $\int_{-4}^{2} e^{t}\delta(t+3)dt$；

(4) $\int_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\delta(t+1)dt$；

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt$；

(6) $\int_{-\infty}^{t} 6e^{-\tau}\delta'(\tau)d\tau$；

(7) $\int_{-1}^{1} \delta(t^2-4)dt$。

解　(1) $x(t+t_0)\delta(t) = x(t_0)\delta(t)$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0)\delta(t+t_0)dt = x(0)$。

(3) $\int_{-4}^{2} e^{t}\delta(t+3)dt = e^{-3}$。

(4) $\int_{0}^{\infty} e^{-t}\sin\delta(t+1)dt = 0$。

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt = \int_{-\infty}^{0} \delta(t^2-4)dt + \int_{0}^{\infty} \delta(t^2-4)dt$。

记 $t^2-4=b$，则 $t=\pm\sqrt{b+4}$，有

$$dt = \pm\frac{1/2}{\sqrt{b+4}}db$$

从而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt = \int_{-\infty}^{0} \delta(b)\left(-\frac{1/2}{\sqrt{b+4}}\right)db + \int_{0}^{\infty} \delta(b)\frac{1/2}{\sqrt{b+4}}db = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(6) $\int_{-\infty}^{t} 6e^{-\tau}\delta'(\tau)d\tau = 6\int_{-\infty}^{t}[\delta'(\tau)+e^{-\tau}\delta'(\tau)]d\tau = 6\int_{-\infty}^{t}[\delta'(\tau)+\delta(\tau)]d\tau$

$= 6\delta(t)+6\varepsilon(t)$。

(7) 被积函数只在 $t^2-4=0$，即 $t=\pm 2$ 时有非零值，积分区间 $[-1,1]$ 不包含 $t=\pm 2$，所以

$$\int_{-1}^{1} \delta(t^2-4)dt = 0$$

例 1.13　求下列各积分。

(1) $\int_{-5}^{5}(3t-2)[\delta(t)+\delta(t-2)]dt$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(2-t)[\delta'(t)+\delta(t)]dt$；

(3) $\int_{-5}^{5}(t^2-2t+3)\delta'(t-2)dt$；

(4) $\int_{-5}^{1}[\delta(t-2)+\delta(t+4)]\cos\frac{\pi}{2}t\,dt$。

解　(1) $\int_{-5}^{5}(3t-2)[\delta(t)+\delta(t-2)]dt = \int_{-5}^{5}(3t-2)\delta(t)dt + \int_{-5}^{5}(3t-2)\delta(t-2)dt$

$= -2+(3\times 2-2) = 2$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(2-t)[\delta'(t)+\delta(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty}(2-t)\delta'(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty}(2-t)\delta(t)dt = 1+2=3$。

(3) $\int_{-5}^{5}(t^2-2t+3)\delta'(t-2)dt = -(t^2+3-2t)'\big|_{t=2} = -(2t-2)\big|_{t=2} = -2$。

(4) $\int_{-5}^{1}[\delta(t-2)+\delta(t+4)]\cos\frac{\pi}{2}t\,dt$