生活中的数学

THE MATHEMATICS IN LIFE

郭嵩 主编

科学出版社

生活中的数学

郭　嵩　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书通过一个个有趣的故事，讲述了数学中的许多概念与方法是怎样在生活中逐步产生和发展的，使读者能够更为亲切地接触数学发展的历史。内容包括：改变世界的数学、游戏中的数学、有用的数学。书中的每一个数学问题和故事，都来源于生活。希望读者在阅读本书之后，能够知道数学与生活的密切联系，懂得数学是人们了解世界、认识世界的强有力的工具，也能够认识到在学习数学的过程中，可以培养人的分析能力、应用能力和逻辑思维能力，这些能力对人的发展会发挥长久的作用。

本书可作为普通高等院校的通识教育选修课教材，也可供教师教育研究者和中学教师等参考。

图书在版编目(CIP)数据

生活中的数学 / 郭嵩主编. — 北京：科学出版社，2017.6
ISBN 978-7-03-051549-0

Ⅰ. ①生…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①数学-普及读物　Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 006752 号

责任编辑：胡海霞/责任校对：彭　涛
责任印制：吴兆东/封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000　1/16
2017 年10月第二次印刷　印张：6　3/8
字数：128 000

定价：25.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

数学来源于生活。生活是千变万化的，数学也是千变万化的。本书力图以有趣的方式，讲述数学是怎样从生活中得到灵感，逐步产生和发展的。希望读者能从本书中看到数学不是让人望而生畏的枯燥计算，而是一门与生活有着密切联系的学科。

数学是有趣的。许许多多的数学知识是从游戏中诞生的。知识和规律就在那里，如何发现它、认识它，让它发挥作用，需要开放的心灵和智慧的眼睛。

数学是有用的。数学和自然科学的其他学科一样，是人类认识自然、了解自然、利用自然的工具。人类的普通生活无处不渗透着数学，应用着数学。掌握了数学，你就拥有了一件强有力的武器。

学习数学并不一定要成为数学家。现代社会分工越来越细，每个人都会在学校里学习数学课程，但最终从事数学研究的只有一小部分人。这并不意味着数学家以外的人们就不需要学好数学。学习数学，重要的是能够培养并提高分析能力、应用能力和逻辑思维能力。这些能力会对人们永远有帮助。

编　者

2016 年 9 月 10 日

目　录

1 改变世界的数学

在许多人的印象里，数学似乎是由书斋里的一群书呆子想出来的。与这种刻板印象相反，数学其实是在大千世界中被发现的，它是为了满足人们对现实世界认识的需要而逐步发展起来的。在数学发展的许多转折点上，还往往伴随着许许多多有趣的故事。

1.1 铁锤与音乐

“铛……铛……铛……”，偶然走过一家打铁店门口，古希腊数学家、哲学家毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 580～前 500)(图1.1)被铁锤打铁的声音吸引了。毕达哥拉斯不仅是古希腊著名的数学家，还是一位音乐家。他觉得从打铁店里传来的铁锤有节奏的打铁声异常地悦耳。这是怎么回事呢？毕达哥拉斯好奇地走进了打铁店。

图 1.1　古希腊数学家毕达哥拉斯

在打铁店里，毕达哥拉斯听了好长时间的打铁声，还自己拎起铁锤敲了好多下。最后，他终于发现，有四个铁锤连续敲打的时候声音特别悦耳。这四个铁锤的重量比恰好是 12∶9∶8∶6。他们两两一组来敲打时都发出了非常和谐的声音，分别是 12∶6＝2∶1 的一组，12∶8＝9∶6＝3∶2 的一组，12∶9＝8∶6＝4∶3 的一组。这难道就是规律吗？

回家以后，毕达哥拉斯用单弦琴做实验对这个规律进一步进行了验证。单弦琴弹奏可以发出声音。毕达哥拉斯做了好多琴弦，让这些琴弦的长度保持固定的比例，然后连续弹奏并比较它们的声音。就这样，毕达哥拉斯最后总结出了著名的琴弦律：

(1) 当两个音的弦长成为简单整数比时，同时或连续弹奏，所发出的声音是和谐悦耳的。

(2) 两音弦长之比为 4∶3，3∶2 及 2∶1 时，所发出的声音是和谐悦耳的。

根据这样的规律，人们在制作乐器时，只要保持好它们的大小比例就可以了。琴弦的长度就决定了它们的发音。如果琴的一根弦发出的音是 1(do)的话，那么根据 2∶1 的比例，取 1/2 长度的弦弹奏就会发出高八度的 1(do)，根据 4∶3 的比例，取 3/4 长度的弦弹奏会发出 4(fa)的声音，其他的，8/9 长度的弦发出

2(re)，64/81 长度的弦发出 3(mi)，等等。像竖琴这样的乐器，有很多不同长度的琴弦，就可以弹奏出很多不同的声音让演奏者们尽情组合(图 1.2)。

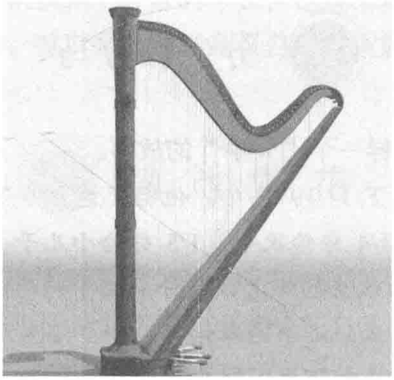

图 1.2　西方的乐器——竖琴

以上是西方古代制作乐器的方法，那么中国古代是如何制作乐器的呢？在中国春秋战国时期的《管子·地员篇》《吕氏春秋·音律篇》等古书上记载了中国古代制作乐器的“三分损益律”。具体来说是取一段弦，“三分损一”，即均分弦为三段，舍一留二。这样得到的比例不就是 3∶2 吗？如果“三分益一”，即弦均分三段后再加一段，这样得到的琴弦比例就是 3∶4(图 1.3)。所以中国古代也以相似的方式认识到了琴弦的规律。

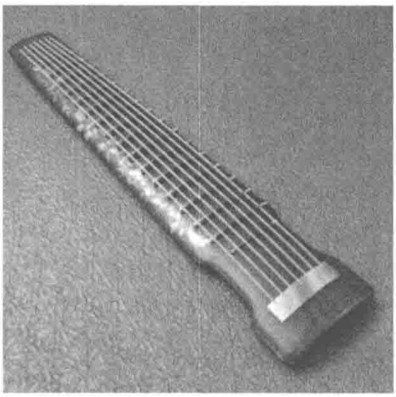

图 1.3　中国古代的乐器——七弦琴

不过，虽然规律一样，中国古琴的弹奏方法还是和竖琴不同的。在制作竖琴时，琴弦的长度就不一样。而中国古琴的弹奏方法是左手按弦，右手拨弦，是借助于两只手的动作来改变所弹琴弦的长度的。

到了十六世纪，意大利数学家、物理学家、天文学家伽利略（Galileo，1564～1642)发现声音是物体振动产生的，而音调决定于振动的频率。因为琴弦

振动的频率跟弦长成反比，所以不同长度的琴弦会弹奏出不同的声音。琴弦律就这样得到了科学的解释。

1.2 分牛和分马

在古代印度流传着这样一个“分牛”的故事。

有一个农夫，死后留下了 19 头牛。他临死前立下了一个奇怪的遗嘱：“19 头牛中的一半分给长子，1/4 分给次子，1/5 分给小儿子。”看到这份遗嘱，大家都感到迷惑不解。19 头活生生的牛怎么能分成相等的两份？或分成 4 份？6 份？正当农夫的儿子们在为怎么分法争论不休时，一个陌生人牵着一头牛正好走过。农夫的儿子们向他求助。这个陌生人把自己的牛也放进了牛群里，然后开始履行遗嘱。他把这些牛的一半，10 头给了老大。老二得到 20 头中的 1/4，即 5 头。小儿子得到 20 头中的 1/5，即 4 头。陌生人分完了以后说：“10 加 5 加 4 正好是 19。余下的那头刚好还给我。”这真是个绝妙的办法，遗嘱的问题就这样解决了。

在古代世界的其他地区，也流传着类似的一些“分遗产”故事。比如说在古老的丝绸之路上，流传着阿凡提分骏马的故事。11 匹骏马，死去的父亲的遗嘱要求三个儿子按照 1/2，1/4，1/6 的比例进行分配。读者们能像聪明的阿凡提一样找到解决问题的办法吗？解决办法和分牛是类似的。阿凡提把他的小毛驴借给了三个儿子。三个儿子按照 1/2，1/4，1/6 的比例分别得到骏马的数量为 6 匹、3 匹、2 匹，然后把小毛驴又还给了阿凡提。

阿凡提真聪明！在故事的背后，隐含着什么样的数学道理呢？如果我们认真分析这个问题，就会发现：遗嘱提出的分配比数相加并不是等于 1 的，即

$$1/2 + 1/4 + 1/5 = 19/20,$$

如果严格按照遗嘱执行的话，肯定有 1/20 无法分配。所以正确的分配比例就应该将 19/20 作为整体，用 1/2 除以 19/20 得到长子合理的分配比例 10/19。同理，也可以得到老二和老三合理的分配比例就是 5/19 和 4/19。

在阿凡提分骏马的故事里，1/2，1/4，1/6 加在一起刚好是 11/12。这就是为什么加了一头小毛驴，分马就可以顺利进行了。

在这些故事背后隐含的就是数学中的“分数”。在人类认识世界的过程中，最初认识到的当然是 1，2，3，…，如果什么都没有，就是 0。这些数的概念都是自然而然的产生的，也就是“自然数”。后来当人们熟悉了减法之后，为了便于小数减大数的运算，就出现了“负数”。加上了负数之后，数的范围就扩大到了“整数”。数的概念还可以再进一步地扩大。为了分配人类的各种物

品，出现了除法。而不可避免的，做除法时会出现除不尽的情况。这样一来，分数就应运而生了。

古代世界各国都相继认识到了分数的存在，也就出现各式各样的“分遗产”故事。毕竟关于分数的加、减、乘、除不是很自然地就能被人认识到的，所以这样的故事还是很迷惑人的。

1.3 满地繁花

小朋友们学数学，都是从加、减、乘、除开始学的。

今天进行加减乘除，小朋友们都是列竖式进行计算(图 1.4)。比如我们计算 25×48，就可以列出下面这样的算式。

在数学的发展历史上，大家一开始并不是这样计算的。一个很重要的问题是，最初并没有这样方便计数的阿拉伯数字。阿拉伯数字是由古代印度人首先发明，后来传到古代阿拉伯，再由阿拉伯人传播到世界各地的。这已经是比较晚的事情了。在中国古代，人们是用算筹来进行四则运算的(图 1.5)。

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 48 \\ \hline 200 \\ 100 \\ \hline 1200 \end{array}$$

图 1.4　竖式计算 25×48

图 1.5　算筹计算

算筹是什么时候开始使用的，历史上找不到记载。但可以肯定的是到了春秋时期，算筹计算已经很普遍了(图 1.6)。在今天能找到的最早的关于算筹计数规律的记载，是公元 4 世纪左右中国的数学书《孙子算经》上：“凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。”另一部数学书《夏阳侯算经》则记载：“满六以上，五在上方。六不积算，五不单张。”

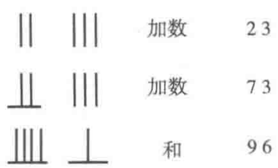

图 1.6　算筹计算 23 + 73 = 96

算筹计算的时候，加一根算筹表示加一个 1。当数字超过 5 的时候，就将一根算筹横过来表示 5。计算的时候，如果用的数字位数太多，为了让计算者便于

区分各位数字，就规定相邻数位摆算筹的方式恰好相反。个位上是竖着摆的，十位上就横着摆以示区分。这样，个位、百位、万位摆放方法是一样的，十位、千位摆放方法是一样的。

经常计算的人会携带很多算筹，需要的时候铺在地上进行计算。有的算筹制作非常精美。进行一个位数比较多的大型计算时，满地都是铺开的算筹，那真是“满地繁花似锦簇”。

到了北宋时期，中国出现了另一个方便的计算工具——算盘(图 1.7)。

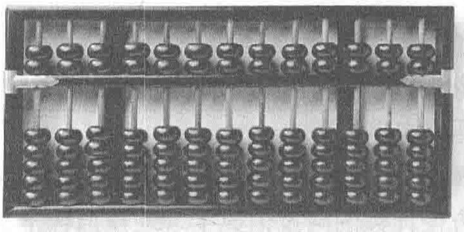

图 1.7　算盘

算盘的携带比算筹方便多了，珠算法的计算过程也比算筹法更为快捷，于是在中国算盘逐渐取代了算筹。不过在手工计算时，人们后来开始使用一种格子算法(图 1.8)。

	一	二	八	
	0 / 三	0 / 六	二 / 四	三
四	0 / 四	0 / 八	三 / 二	四
	三	五	二	

图 1.8　格子算法 $128 \times 34 = 4352$

如图 1.8 所示，我们来计算 128×34。被乘数与乘数分别有 3 个与 2 个有效数字。可以画一个中心是二行三列的方格，外面的一圈方格是记被乘数、乘数和积的，中心的二行三列都画出一系列的对角线，用来记中间计算的过程。

在方格上方的中间依次写上被乘数 128，每个方格写一个数字，右方第一列从上向下写出乘数 34，然后就开始相乘。在中间的方格里，每个方格对应到的是它所在行和所在列数字的乘积。比如中心的第一行第三列对应的是 3 和 8，乘积就是 24，那么 2 写在斜线的上方，4 写在斜线的下方。因为两个 10 以内数字相乘最多 2 位，因此两个位置足够了。如果乘出来还是个位数，就在斜线上方记 0。中心的格子都填满以后，我们就开始做最后的加法。从右下方到左上方，每

一条斜线表示一个数位。个位上是 2，十位上 $4+3+8=15$ 写 5 进 1，百位上 $2+6+0+4$ 加进位的 1 等于 13 写 3 进 1，千位上 $0+3+0+1=4$。这样，我们就得到了乘法的计算结果即 $128\times34=4352$。

这种算法据说是意大利人发明的，后来辗转传入中国。在明朝程大位（明代商人、算学家，1533～1606）所著的《算法统宗》一书中将之称为“铺地锦”。

1.4 勾股定理与无理数

如果一个分数的分子、分母除了 1 以外没有其他公约数，就称为简分数。能够用简分数形式表示的数，称为有理数。如果不能用简分数表示的，那么就不是有理数。随着有理数出现的新的“数”是无理数。历史上首先发现无理数的是古希腊数学家希帕索斯（Hippasus）。

2500 多年前的古希腊时代，曾经有一个著名的“毕达哥拉斯学派”，它的创立者是数学家毕达哥拉斯。希帕索斯是毕达哥拉斯的学生，属于毕达哥拉斯学派。毕达哥拉斯最伟大的贡献是“勾股定理”：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方。

古代巴比伦和古代中国都比古希腊更早知道勾股定理。公元前 3000 年左右古巴比伦人就知道和使用这个定理了。现存发现的一块公元前 18 世纪的古巴比伦石板，记载了若干勾股数，最大的一组为（18541，12709，13500）。也就是说，如果直角边分别长 13500 和 12709，那么斜边就应该是 18541。在中国古代的数学书《周髀算经》中记录了商高同周公的一段对话：“商高说：‘故折矩，勾广三，股修四，经隅五。’”周公是公元前 11 世纪的古人。《周髀算经》还记载了周公的后人陈子的一段话：“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日”。因此，中国称之为勾股定理（图 1.9，图 1.10）。

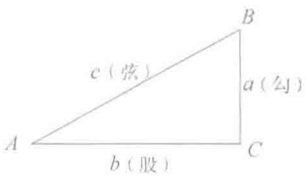

图 1.9　勾股定理示意图

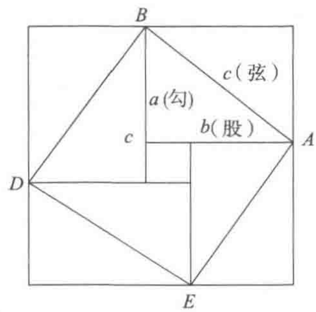

图 1.10　中国古代用来证明勾股定理的勾股圆方图

但是由于定理的第一个严格证明是毕达哥拉斯给出来的，所以直到现在，西方人仍然称勾股定理为“毕达哥拉斯定理”。据传说，当勾股定理被发现之后，毕达哥拉斯学派的成员们曾经杀了 99 头牛来大摆筵席，以示庆贺。

古代的科学家有很多喜欢把自己的发现哲学化。毕达哥拉斯的哲学观点是“万物皆数”。他所说的“数”，仅仅是整数与整数之比，也就是现代意义上的“有理数”。他认为除了有理数以外，不可能存在另类的数。然而，希帕索斯利用勾股定理，发现边长为 1 的正方形的对角线长度 $\sqrt{2}$ 并不是有理数。

我们来看看他是怎么证明的呢？假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，可以表示成 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，这里 p，q 是无公约数的整数。两边取平方，我们可以得到 $p^2=2q^2$。右边显然是偶数，所以 p^2 也一定是偶数，从而 p 也应该是偶数(因为奇数 $2k+1$ 的平方后是 $4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ 仍旧是奇数)。所以我们可以设 $p=2a$，代入上式得 $(2a)^2=4a^2=2q^2$，两边同时消掉 2 可得 $2a^2=q^2$，这样我们可以知道 q 也是偶数。

由于 p，q 都是偶数，它们有一个公约数 2，这和我们最初假设 p，q 是无公约数的整数矛盾了，所以我们假定 $\sqrt{2}$ 是有理数不正确。

希帕索斯的发现非常重要，但是却惹祸了。毕达哥拉斯无法忍受自己的理论将被推翻，他下令：“关于另类数的问题，只能在学派内部研究，一律不得外传。”[①] 可是希帕索斯出于对科学的尊重，并没有严守秘密，将他的发现公之于众。这令毕达哥拉斯怒不可遏，下令弟子们对希帕索斯进行惩罚。希帕索斯最后被毕达哥拉斯学派的人扔进了大海。

为了科学，希帕索斯献出了自己宝贵的生命，这在科学史上留下了悲壮的一页。如果没有希帕索斯的发现，“无理数”的概念也不会那么早就引入到数学研究中来。正因为希帕索斯发现了无理数，数的概念才得以扩充。从此，数学的研究范围扩展到了实数领域。

毕达哥拉斯学派的最终结局也很悲惨。据说他们得罪了古希腊的权贵，后来遭到了权贵们的大屠杀。在科学的发展中，暴力和权力永远只会阻碍科学的进步。

---

① K V Fritz. 2004. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. Annals of Mathematics. 46（2）：242-264.

1.5 割圆术与圆周率

中国古代有一句话：“圜，一中同长也”。意思是说：“圜”只有一个中心，周围的每一点到中心的距离都相等。当然这就是圆了。世界各国的古代都有对圆的研究。那么在中国，圆是怎么被研究的呢?

早在中国先秦时期，《墨经》上就已经给出了圆的这个定义，《周髀算经》里也记载了数学家商高与周公讨论过圆与方。认识了圆，人们也就开始了有关于圆的种种计算，特别是经常需要计算圆的面积。中国古代数学经典著作《九章算术》(图 1.11)在第一章“方田”中写到“半周半径相乘得积步”，也就是我们现在所熟悉的圆面积公式。

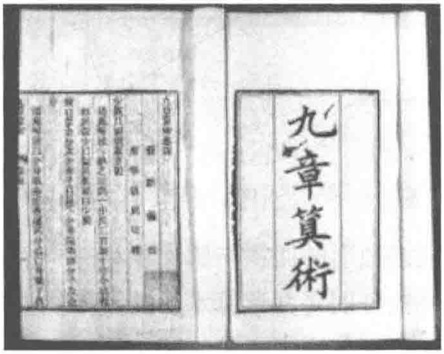

图 1.11　九章算术

为了证明这个公式，中国三国时期数学家刘徽(约 225～295)(图 1.12)于公元 263 年撰写了《九章算术注》，在公式后面写了一篇 1800 余字的注记，这篇注记就记载了数学史上著名的“割圆术”。

图 1.12　刘徽

根据刘徽的记载，在他之前，人们求证圆面积公式时，是用圆内接正十二边形的面积来代替圆面积的。应用出入相补原理，将圆内接正十二边形拼补成一个长方形，借用长方形的面积公式来计算《九章算术》中的圆面积公式。刘徽指出，这个长方形是以圆内接正六边形周长的一半作为长，以圆半径作为高的长方形，它的面积是圆内接正十二边形的面积(图 1.13)。这种论证“合径率一而弧周率三也”，也就是后来常说的“周三径一”。圆周长是半径的三倍，当然这是不严密的近似值。

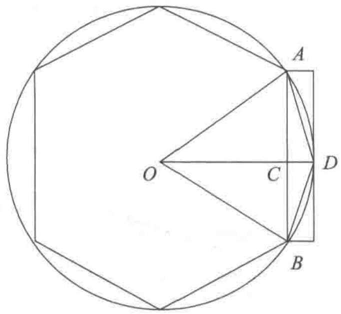

图 1.13　割圆术：正六边形到正十二边形

刘徽认为，圆内接正多边形的面积与圆面积都有一个差，只对圆形做有限次的分割、拼补，是没有办法证明《九章算术》的圆面积公式的。因此，他大胆地进一步分割圆周，从圆内接正六边形开始割圆，将圆内接正多边形的边数不断加倍。这样一次次的计算结果，就构成了一个序列，它们与圆面积的差将越来越小。当边数不能再加的时候，圆内接正多边形的面积的极限就是圆面积。用刘徽的话来说，就是“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体，而无所失矣。”

刘徽考察了内接多边形的面积，也就是它的“幂”，同时提出了“差幂”的概念。“差幂”是后一次与前一次割圆的差值。刘徽指出，在用圆内接正多边形逼近圆面积的过程中，圆半径在正多边形与圆之间有一段余径。以余径乘正多边形的边长，即 2 倍的“差幂”，加到这个正多边形上，其面积则大于圆面积。这是圆面积的一个上界。同样的多次分割，也构成一个序列。刘徽认为，当圆内接正多边形达到与圆相合的极限状态时，“则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。”[①]也就是说，余径消失了，余径的长方形也不存在了。这时候，圆面积的这个上界序列的极限也是圆面积。于是内外两侧序列都趋向于同一数值，即等于

① 刘徽. 公元 263 年. 九章算术注.

圆面积。这样就能完全证明圆面积公式，随着圆面积公式的证明，刘徽也同时创造出了求圆周率近似值的科学程序。为了得到高精度的结果，刘徽又利用“差幂”对割到 192 边形的数据进行再加工，通过简单的运算，附加的计算量几乎可以忽略不计，竟然可以得到 3072 多边形的效果。基于这样精妙的运算，刘徽最终得出的圆周率 π，为 3.1416，这个计算精度在古代已经是非常高了，甚至超过了古希腊数学家计算的最高精度。

刘徽在《九章算术注》的自序中表明，他把探究数学的根源，作为自己从事数学研究的最高任务。“割圆术”将极限和无穷小分割引入数学证明，成为人类文明史中不朽的篇章。

1.6 牟合方盖的故事

“牟合方盖”(图 1.14)，这个奇怪的东西是什么呢？原来这是大数学家刘徽想出的立体图形，指的是两个同样大小的圆柱体垂直相交时，相交的这部分：作一立方体，先自左而右作内切圆柱，再自前而后作内切圆柱。正立方体经过两次切割得到一个立体图形，像是上下相对的两把方伞，故名“牟合方盖”(牟，上下相等之意；盖，伞也)。

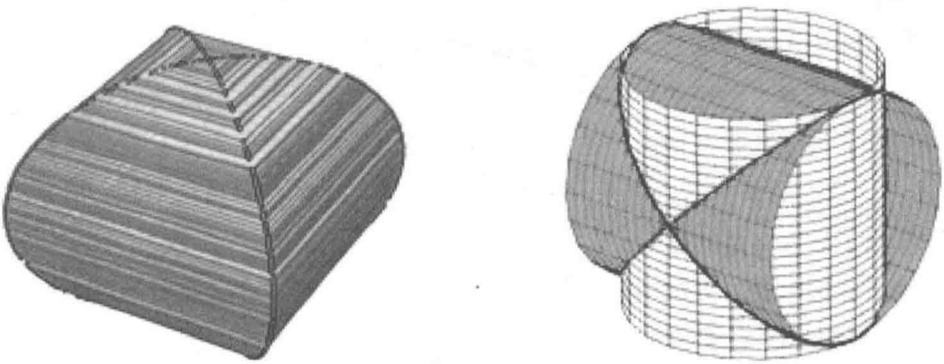

图 1.14　牟合方盖

这个立体好像很古怪。其实，它是中国古代的数学家们为了解决球的体积计算问题而提出来的。当数学家们知道了圆面积等于圆周率乘以半径的平方之后，很自然的，又会想去计算球的体积。然而这可是一个更为困难的工作，耗费了许多中国古代数学家们的精力。

中国西汉末年成书的《九章算术》中，已经记载着柱、锥、台、球等各种体积的计算问题。除了球以外，其他各项的体积公式都和现在是一致的。但是由于