华南师范大学附属中学校本选修教材

第二版

数学探究与欣赏

罗碎海 ★ 著

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

华南师范大学附属中学校本选修教材

第二版

数学

探究与欣赏

罗碎海 ★ 著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

数学探究与欣赏/罗碎海著．—2 版．—广州：暨南大学出版社，2017.7
（华南师范大学附属中学校本选修教材）
ISBN 978－7－5668－1316－9

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①罗…　Ⅲ．①中学数学课—课外读物　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 120688 号

数学探究与欣赏（第二版）
SHUXUE TANJIU YU XINSHANG（DIERBAN）
著者：罗碎海

出 版 人：徐义雄
责任编辑：暨　南　周玉宏
责任校对：刘舜怡
责任印制：汤慧君　周一丹

出版发行：暨南大学出版社（510630）
电　　话：总编室（8620）85221601
　　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
网　　址：http://www.jnupress.com　http://press.jnu.edu.cn
排　　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：14.25
字　　数：290 千
版　　次：2010 年 5 月第 1 版　2017 年 7 月第 2 版
印　　次：2017 年 7 月第 3 次
定　　价：42.00 元

序 言

《数学探究与欣赏》出版后得到了许多读者的青睐，网名叫“幸运的阿毛”的老师在当当网上对本书的评价如下：

值得高中教师阅读的好书！

离开校园已有十五年，不阅读与高中数学相关的书籍将近十八年，但是当我在当当网上看到罗老师所著的这本《数学探究与欣赏》时，仍然禁不住眼前一亮，倍感亲切！于是毫不犹豫地买了一本。呵呵，果然不负我望，真是值得推荐的好书！

罗老师学识渊博，数学功底深厚，著书立说自然高屋建瓴，深入浅出，全书从更高的层次、更高的角度探究了初中和高中数学知识的美。罗老师在繁忙的工作之余奋笔疾书，为我等提供了一道十分丰富的精神大餐，实在可喜可贺，可感可佩！

全书内容丰富，资料翔实，分析与解题过程独到、新颖、巧妙，采用专题讲座的形式探究数学问题，十分适合基础较好、学有余力、对数学有浓厚兴趣的发烧学生和高中教师阅读，不适合基础不好的学生阅读（里面有少数专题涉及大学数学知识）。

美中不足的是，有些问题分析和解答过程过于简略，跳跃性大，学生不易理解。如第 64 页，在证明 $\sin x < x < \tan x$ 时，要用到扇形（曲边三角形）的面积公式，解答过程没有说明，而是直接给出了公式。再如第 180 页，在讲述超越数 e 时，没有谈到超越数的概念及 e 是超越数的证明，实在遗憾！关于 e 的历史，超越数及其证明，可参看高等教育出版社的《初等数论》和人民邮电出版社的《e 的故事——一个常数的传奇》两本书。

最后一点建议：希望再版时能补充有关斐波那契数列和黄金分割比例的相关知识，以让本书更完善！

首先感谢阿毛老师的指导与建议，也感谢欣赏与评价该书的其他老师及网友。原书中之所以没有“黄金分割”和“斐波那契数列”这两部分有趣内容，是因为

自己未有新发现。这两年，自己在这方面稍有发展，所以在本书重印时首先修正了原书中的个别错漏，其次采纳阿毛老师的建议，在书中添加了“黄金分割”和“斐波那契数列”，另外又加了自己的新成果“杨辉三角形从二项式向多项式推广”。

请各位朋友、各位同道者多多指导，多提意见。

罗碎海

2012年7月

第二版前言

《数学探究与欣赏》不是为应试而编写的一次性的教辅资料，是作者出于对数学至真至美的追求而从心灵发出的反映数学自然美的“声音”。在目前手机信息覆盖领域逐年扩大的环境下，仍然有人能闹中取静、潜心读书，与作者和鸣，倍感欣慰。

在此摘录亚马逊网上书店读者的读后感：这本书是华南师范大学附属中学经典的校本选修教材，里面既有对思维能力的提升引导，也有对课本中知识点的扩展衍生，还有对生活中趣味数学问题的欣赏，我觉得它不为应试而生，但是绝对对现在高中生学习数学、提升思维能力很有帮助……

该书在第一版第二次印刷时应读者要求，添加了“有趣的黄金分割”“斐波那契数列”与“杨辉三角形从二项式向多项式推广”三节。读者又建议：天文学家开普勒指出勾股定理和黄金分割“是几何中的双宝，前者好比黄金，后者堪称珠玉”，若增加勾股定理内容将更加完美。所以这次作者在第二版中增加“勾股定理的证明及衍生的问题”一节，使该书由最初的 24 节变为 28 节。另外修正了原书十多处错漏。

很感谢欣赏本书和对本书提出修改意见的广大读者，也很感谢辛勤组织本书出版的暨南大学出版社的各位编辑。

罗碎海

2017 年 6 月

前　言

阿波罗尼斯（Apollonius of Perga，前 262—前 190）是古希腊亚历山大时代的数学家。他是第一个依据一个平面与一个圆锥相截所得的截面来研究圆锥曲线的人，他的巨著《圆锥曲线论》共八卷 487 个命题，是古希腊几何登峰造极之作，其中椭圆就是其主要问题之一。1609 年，开普勒在《火星运行记》一书中公布了他的发现，行星沿椭圆轨迹绕日运行，太阳位于椭圆的一个焦点上。

18 世纪法国学者马拉尔狄实测了蜂房底部菱形，得出令人惊奇而有趣的结论：拼成蜂房底部的每个菱形蜡板，钝角是 $109°28'$，锐角是 $70°32'$。数学家经过精心计算，得出的结果更令人吃惊：建造同样体积且用料最省的蜂房，菱形两邻角正是 $109°28'$ 与 $70°32'$。

为什么数学家在纸上研究的圆锥曲线竟是空间星球运行的曲线？为什么小小的蜜蜂竟知道用有限的材料造最大容积的蜂房？因为**“世界是按照数学规律形成和发展的”**，这种数学形式的发展与现实内容的统一，正是数学的魅力，数学的价值。正是它才使一代又一代数学家为之折腰、孜孜不倦地追求。

数学的发展主要通过两种方式：一是数学形式的演变；二是现实中的问题。这两种方式是紧密联系在一起的，有时形式先于内容（实际问题），有时内容先于形式。正如电磁感应一样，电变磁、磁变电互相补充促其发展。既然数学是这样发展的，世界是这样形成的，那么我们很自然地应该顺着它发展的道路去认识世界，认识数学，去教数学，去学数学。

本书内容是自己在教学过程中所思考的问题和学生提出的问题的探索过程与结果选编，主要是以中学数学课本中的例题、知识为主进行引申、探索。这种探索既是科学思维方法的形成发展，也是数学内在美的发现和欣赏。书中的有些问题已解决了，有些问题才提出来，其目的是让人们学会思考，学会发现，学会创造。

本书可供中学生课外阅读，作为其数学学习能力提高的辅导书，从中学习发现问题、探究问题的方法与思想，提高分析问题和解决问题的能力，也可作为数学教师教学的参考书和开展研究性学习探讨的专题。对从事数学教育、思维科学的研究人员也有一定的参考价值。更可作为人们提高科学素养，追求至纯、至美，

陶冶情操的读物。

在此感谢华南师范大学附属中学给我提供选修课“数学探究与欣赏”这一平台，这片肥沃的土壤使得我的耕耘取得了丰硕的成果。也感谢我的学生邓健、伍拓奇、李一凡、罗杨等，他们的一些研究方法、结果也被收录在本书中。由于作者水平有限，错误及纰漏之处在所难免，敬请读者指正。

罗碎海

2010 年 3 月

目　录

为了帮助学习者更好地理解和掌握数学发现的逻辑（证明与反驳的方法），戴维斯与赫尔晋就曾设计了这样的教学实例：

1. 如何研究问题

行动 I

原始猜想 1："如果一个数的最后一位数字是 2，它可以被 2 整除."

例子：42 与 172 显然都是这样的例子.

证明：一个数是偶数，当且仅当它的最后一位数字是 0，2，4，6，8，所有的偶数都可以被 2 整除，特殊地，最后一位数字是 2 的数可以被 2 整除.

证明（更为精致地）：如果一个数在十进位中是$\overline{ab\cdots c2}$，那么，它就有形式$(\overline{ab\cdots c0})+2$，进而 $10Q+2=2(5Q+1)$.

猜想 2："如果一个数的最后一位是 N，它可以被 N 整除."

评论：这一步十分大胆并做出了明显的一般化，即使它被证明是假的，天也不会因此而塌下来.

例子：如果一个数的最后一位数字是 5，它可以被 5 整除，这是无可置疑的，如 15，25，128 095 等等.

反例：如果一个数的最后一位数字是 4，它能被 4 整除吗？14 被 4 整除吗？糟了！

反驳：但有些以 4 结尾的数可以被 4 整除，如 24. 某些以数字 9 结尾的数可以被 9 整除，如 99.

经验的概括：看来数字 1，2，…，9 分成了两大类：第一类是指这样的数字 N，以 N 结尾的数可以被 N 整除；第二类是指这样的数字 N，以 N 结尾的数并不总能被 N 整除.

第一类：1，2，5；

第二类：3，4，6，7，8，9.

问题：应当怎样看待以 0 结尾的数？它们能被 0 整除吗？不能，但是它们能

被 10 整除，看来我们应当注意这一情况，这一情形不能被表述成原始的猜想的形式.

定义：让我们把第一类数称为“魔数”. 它们具有令人高兴的性质.

暂时性的定理：1，2 和 5 是魔数，它们并不是仅有的魔数.

反例：我们应当怎样去看待 25 呢？它是魔数吗？如果一个数是以 25 结尾的，它可以被 25 整除.

例如，225，625.

反驳：我想我们讨论的是一位数.

回答：就算是这样，但 25 的情形很有趣，让我们把原来的研究拓宽一些.

重新表述：现在 N 未必表示一位数，而也可以是像 23，41，505 这样的数字的组合. 称 N 为魔数，如果以数字组 N 结尾的数可以被 N 整除，这样的推广合适吗？

回答：可以.

例子：25 是魔数，10 是魔数，20 是，30 也是.

反例：30 不是，130 不能被 30 整除. 想一想：你是怎样知道 25 是一个魔数的？

定理 1　25 是一个魔数.

证明：如果一个数是以 25 结尾的，它有形式 $\overline{abc\cdots e25}=\overline{abc\cdots e00}+25$，进而有 $100Q+25=25\ (4Q+1)$.

目标的重新表述：找出所有的魔数.

经验的积累：1，2，5，10，25，50，100，250，500，1 000 等都是魔数.

观察：我们重新找到的魔数看来都是 2 和 5 的乘积，上面所列举的数显然都是这样的情况.

猜测：所有具有以下形式的数 N 都是魔数：$N=2^p\cdot 5^q$，其中 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$ 且 p，q 是整数.

评论：这一猜测看来是合理的，还有没有什么问题？

反例：取 $p=3$，$q=1$，就有 $N=2^3\times 5=40$. 以 40 结尾的数总能被 40 整除吗？不！例如，140.

重新表述：那么反面的论题怎么样？所有我们发现的魔数都具有形式 $2^p\cdot 5^q$，也许所有的魔数都具有这样的形式？

反驳：这是您刚才所提出的论题吗？

回答：不！刚才提出的反面的论题：具有形如 $2^p\cdot 5^q$ 的数是魔数．你看到两者的不同了吗？

定理 2　如果 N 是一个魔数，则有 $N=2^p\cdot 5^q$ 且 p，q 是整数.

证明：假设任一以 N 结尾的数，它具有形式 $\overline{abc\cdots eN}$. 我们希望能像先前那样

把这一个数分割开来. 为此，设 N 有 $d(N)$ 数位，从而数 $\overline{abc\cdots eN}$ 事实上就等于 $\overline{ab\cdots e00\cdots0}+N$，其中在结尾处共有 $d(N)$ 个 0，亦即有形式 $Q\cdot10^{d(N)}+N$[就 $d(N)=2$，3 等的情况试一下]. 所有以 N 结尾的数都具有这样的形式. 反过来，不管 Q 是什么数，数 $Q\cdot10^{d(N)}+N$ 总是以 N 结尾的. 现在，如果 N 是魔数，它就能整除 $Q\cdot10^{d(N)}+N$. 由于 N 能整除 N，因此对任意的 Q 来说，N 总能整除 $Q\cdot10^{d(N)}$，例如，Q 可以是最简单的数 1，因此 N 必须能整除 $10^{d(N)}$. 由于 $10^{d(N)}=2^{d(N)}\cdot5^{d(N)}$ 是一个质因数分解式，因此，N 本身就必定可以分解成若干个 2 和 5 的乘积.

新的立场：我们现在已经知道任一魔数必有形式 $N=2^p\cdot5^q$，其中 $p\geqslant0$，$q\geqslant0$，我们希望能将它反过来，这样我们就将获得关于魔数的一个充分必要条件.

经验的重新审视：由于我们已经知道任一魔数都具有形式 $N=2^p\cdot5^q$，现在问题就是：p，q 应满足什么条件才能使 N 成为魔数?

猜测：$p<q$?

反例：$p=0$，$q=4$，$N=2^0\times5^4=625$，625 是否是魔数? 不，例如 1 625 不能被 625 所整除.

猜测：$p=q$?

反驳：这时 $N=2^p\cdot5^p=10^p$，即 1，10，100，…，这些数确实是魔数，但还有其他魔数.

猜测：$p>q$?

反例：$p=3$，$q=1$，$N=2^3\times5^1=40$，这不是魔数.

观察：在此需要更深入地研究，行动 I 到此结束. 对于那些具有足够兴趣和毅力的人，这一过程将继续下去.

行动Ⅱ

（在这一行动中，启发性的成分将写得十分简练）

策略的讨论：让我们回到关于形式 $N=2^p\cdot5^q$ 的必要性的证明，我们发现如果 N 是魔数，则它能整除 $10^{d(N)}$. 我们在此是用 $d(N)$ 代表 N 的数位. 也许这就是一个充分条件? 哈哈，一个突破?

定理 3　N 是魔数当且仅当它能整除 $10^{d(N)}$.

证明：必要性已经得到了证明. 如果一个数以 N 结尾，那么，正如我们所知道的，它具有形式 $Q\cdot10^{d(N)}+N$. 由于 N 整除 N，而由假设 N 又能整除 $10^{d(N)}$，从而它确实可以整除 $Q\cdot10^{d(N)}+N$.

美学的反驳：我们的确获得了关于魔数的一个充分必要条件，但这一条件是关于 $d(N)$ 的，应当是关于 N 的或关于 N 的质因数分解式 $2^p\cdot5^q$ 的（更具体）.

讨论：什么时候 $N=2^p\cdot5^q$ 能够整除 $10^{d(N)}$？由于 $10^{d(N)}=2^{d(N)}\cdot5^{d(N)}$，从而其充分必要条件就是 $p\leqslant d(N)$，$q\leqslant d(N)$，后者就相当于 $\max(p,\ q)\leqslant d(N)$，我们仍然未能摆脱那个讨厌的 $d(N)$，我们希望能得到一个关于 N 本身或关于 p 和 q 的条件. 我们怎样才能将 $\max(p,\ q)\leqslant d(N)=d(2^p\cdot5^q)$ 转变成一个较为简便的形式？即如所知，在 $p=q$ 的情形下是没有问题的，写出来就是：$p=\max(p,\ q)\leqslant d(2^p\cdot5^q)=d(10^p)$，$10^p$ 有 $p+1$ 位数字，从而就有$p\leqslant p+1$. 在一般情况下，如果我们把 2 的指数与 5 的指数逐个"抵消"了会怎么样？写出$q=p+h$，其中 $h>0$.

反驳：如果 $p>q$ 就不可能有 $q=p+h$ 且 $h>0$？

回答：这留待以后再说.

讨论：$\max(p,\ p+h)\leqslant d(2^p\cdot5^{p+h})=d(2^p\cdot5^p\cdot5^h)=d(10^p\cdot5^h)$，由于 $h>0$，$\max(p,\ p+h)=p+h$，另外，对任意的数 Q 来说，$10^p\cdot Q$ 中的数字个数 $=p+$（Q 中数字的个数）. 从而 $p+h\leqslant p+d(5^h)$，即 $h\leqslant d(5^h)$.

问题：什么时候才有 $h>0$ 且 $h\leqslant d(5^h)$？

实验：$h=1$ 时：$1\leqslant d(5^1)$，没有问题. $h=2$ 时：$2\leqslant d(5^2)$，没有问题，$h=3$ 时：$3\leqslant d(5^3)$，没有问题. $h=4$ 时：$4\leqslant d(5^4)=d(625)=3$，不对.

猜测：$h\leqslant d(5^h)$ 当且仅当 $h=1,\ 2,\ 3$.

证明：（略）

重新开始：$p>q$ 怎么样呢？

讨论：设 $p=q+h$，其中 $h>0$，$q+h=\max(q+h,\ h)\leqslant d(2^{q+h}\cdot5^q)=d(10^q\cdot2^h)=q+d(2^h)$，即 $h\leqslant d(2^h)$. 何时有 $h\leqslant d(2^h)$？

实验：$h=1$ 时：$1\leqslant d(2^1)$，没有问题. $h=2$ 时：$2\leqslant d(2^2)=d(4)=1$，不对.

猜测：$h\leqslant d(2^h)$ 当且仅当 $h=1$.

证明：（略）

定理 4 N 为魔数当且仅当它等于 10 的幂乘上 1，2，5，25，125.

证明：（略）

2. 对整除性与循环小数的探究

先来看两个归纳的例子：

德国大数学家莱布尼茨曾研究过自然数 n 的分拆方法：

$$\left.\begin{array}{l}2=2\\2=1+1\end{array}\right\}\text{即 } p(2)=2;$$

$$\left.\begin{array}{l}3=3\\3=2+1\\3=1+1+1\end{array}\right\}\text{即 } p(3)=3;$$

$$\left.\begin{array}{l}4=4\\4=3+1\\4=2+2\\4=2+1+1\\4=1+1+1+1\end{array}\right\}\text{即 } p(4)=5;$$

同理，$5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$，即 $p(5)=7$.

$6=6=5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=3+1+1+1=2+2+2=2+2+1+1=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$，即 $p(6)=11$.

由此猜想：$p(n)$ 等于第 $n-1$ 个质数. $p(7)$ 应等于 13.

而实际上，

$7=7=6+1=5+2=5+1+1=4+3=4+2+1=4+1+1+1=3+3+1=3+2+2=3+2+1+1=3+1+1+1+1=2+2+2+1=2+2+1+1+1=2+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1$，即 $p(7)=15\neq13$，15 更不是质数.

所以，莱布尼茨称“这是归纳法骗人的极好例子”，我们也不能由此就否定归纳法的价值. 其实科学上（特别是在数论中）有许多重要的结论最初都是用归纳法得到的.

在中学数学课本中有一个有趣的习题：“立方和 = 和平方” 问题. 它也源于归纳法.

对于正整数 n，总成立：

$$1^3=1^2$$
$$1^3+2^3=(1+2)^2$$
$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$

由此可以归纳出统一结论：

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2$$

即前 n 个自然数的立方和等于它们的和的平方. 我们可以证明（数学归纳法可证）此结论是正确的.

我们一般人往往满足于所得到的结论，但科学家不会就此罢手，法国数学家柳维尔就想："这么奇妙的问题背后有什么本质东西，别的自然数组有无此性质？"他最终探讨出本质内容，按如下步骤所得的自然数组也有此性质：

对于任一自然数 N，比如6，先确定 N 的正因子，这些因子是1，2，3，6. 再确定这些因子的正因子个数为1，2，2，4. 我们得到的数组（1，2，2，4）就具有上述性质，即

$$1^3+2^3+2^3+4^3=81=9^2=(1+2+2+4)^2$$

到此可知，（1，2，3，…，n）是 2^{n-1} 的因子的因子数，当然有性质

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2$$

这就验证了数学大师波利亚的名言："吃到树上的禁果之后，还应该好好地寻找一下，地下有没有足以使你大开胃口的野蘑菇？"这句话也说明了事物的特殊性与普遍性的辩证关系和相对关系（一个普遍性也可能是另一个普遍性中的特殊性）.

现在我们就学习科学家的方法：争取在任一个问题上都能向前走一步. 用特殊性与普遍性的辩证关系和相对关系作指导，从平凡的树上找到禁果，在树的周围寻找蘑菇，再在其地下寻找宝藏，使我们的思维世界更加丰富多彩.

1. 关于"9 的乘法"的新发现

有文章报道，有人曾经给南极冰层中的冻鱼加温，冰融化后反而鱼开始游动. 又经常有报道说某地的一棵死去几年的树又开始发芽了. 这些枯木发芽、死灰复燃的事并非天方夜谭，数学上是没有死火山的，说不准突然间会爆发出令人惊异的光亮. "9 的乘法"是很古老的知识，也是大家都很熟悉的数学知识，天天在使用，我们是否对它有新感觉？能否向前走一步，进而从中发现数字之间更有趣、更本质的规律？能否看到它耀眼的新光芒？

$$1\times9=09$$
$$2\times9=18$$
$$3\times9=27$$
$$4\times9=36$$
$$\underline{5\times9=45}$$
$$6\times9=54$$
$$7\times9=63$$
$$8\times9=72$$
$$9\times9=81$$
$$10\times9=90$$

从表中可发现以下规律：

①上下与横线等距离的两个结果是个位数与十位数对调位置；

②结果中个位数字从 9 依次递减 1 到 0，十位数字从 0 依次递增 1 到 9；

③结果中的数的数字和是 9（如 $2+7=9$，$3+6=9$ 等）.

2. 用代数形式表示所发现的规律

代数就是将数、式、问题用字母代替，许多数学问题的证明主要依赖于代数形式.

对于规律③，我们可归纳出以下定理：

定理 1 如果一个自然数的各位数字之和能被 9 整除，则原数能被 9 整除；反之亦真.

证明：设原数为 $\overline{abc\cdots de}$ 是 n 位数，

则 $\overline{abc\cdots de}=a\times10^{n-1}+b\times10^{n-2}+c\times10^{n-3}+\cdots+d\times10+e$(科学记数法)

$=a\times(10^{n-1}-1)+b\times(10^{n-2}-1)+c\times(10^{n-3}-1)+\cdots+d\times(10-1)+(a+b+c+\cdots+d+e)$.

由于 $a\times(10^{n-1}-1)+b\times(10^{n-2}-1)+c\times(10^{n-3}-1)+\cdots+d\times(10-1)$ 能被 9 整除，所以只要 $(a+b+c+\cdots+d+e)$ 能被 9 整除，则 $\overline{abc\cdots de}$ 能被 9 整除.

反之，只要 $\overline{abc\cdots de}$ 能被 9 整除，$(a+b+c+\cdots+d+e)$ 就能被 9 整除.

3. 代数形式的不变性

在三角函数的诱导公式［如 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$］，不管 α 是锐角还是别的角，只要我们将它看成锐角，公式是不变的. 这就体现了代数形式的不变性. 在复合函数的求导中，代数形式的不变性就体现得更充分了.

定理 1 的证明过程中，我们由数 $\overline{abc\cdots de}$ 得到数字和 $(a+b+c+\cdots+d+e)$，可以继续计算该数的数字和（如：95 436——$9+5+4+3+6=27$——$2+7=9$），直到得到一个一位数. 我们把最后这个一位数叫原数的根.

显然，若一个数的根是 9，则这个数是 9 的倍数. 可是如果一个数的根不是 9