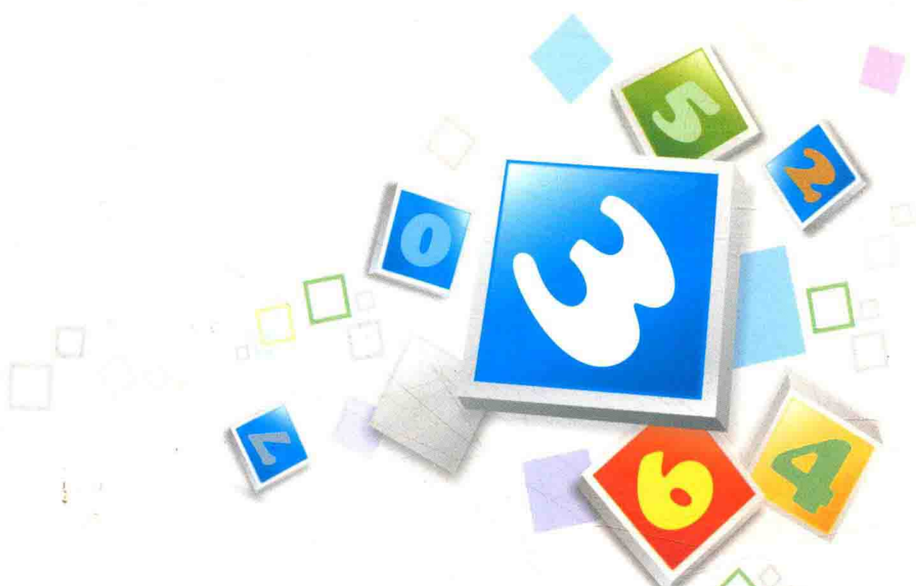
学前教育专业统编教材
公共基础课系列教材
总主编 戚 鹏

XUEQIAN
JICHU SHUXUE 下册

学前基础数学

主审 王明亭
主编 朝泽明 崔继海 郭瑞英



郑州大学出版社

学前教育专业统编教材
公共基础课系列教材

总主编　戚　鹏

XUEQIAN
JICHU SHUXUE　下册

学前基础数学

主审　王明亭

主编　朝泽明　崔继海　郭瑞英

郑州大学出版社

郑州

图书在版编目(CIP)数据

学前基础数学.下册/朝泽明,崔继海,郭瑞英主编.—郑州:郑州大学出版社,2015.6
学前教育专业统编教材
ISBN 978-7-5645-2241-4

Ⅰ.①学… Ⅱ.①朝…②崔…③郭… Ⅲ.①数学-幼儿师范学校-教材 Ⅳ.①01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 062098 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:张功员　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
河南省诚和印制有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:12.5
字数:306 千字
版次:2015 年 6 月第 1 版　　印次:2015 年 6 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-2241-4　　定价:22.60 元

学前教育专业数学教材
编审委员会
下册

主　审

王明亭

主　编

朝泽明　崔继海　郭瑞英

副主编

刘晨艳　郭　华　赵玉洁

编　委

刘晨艳　郭瑞英　崔继海

李立峰　朝泽明　石盛力

郭　华　赵玉洁

内容提要

NEIRONG　TIYAO

本教材共分上、下两册.上册共6章:集合与简易逻辑;不等式;函数;三角函数;直线与方程;圆锥曲线与方程.下册共5章:数列与数学归纳法;排列、组合与概率;复数;空间点、直线、平面之间的位置关系;多面体与旋转体.全书均按自然课时分节,配备练习(附有参考答案),方便教师备课及学生自学.每章最后都有该章的知识结构图、要点及方法总结、练习题,便于学生学习、提高.

本教材适合作为五年一贯制大专、中专(或3+2大专)学前教育专业教材,也可以供职业高中选用.

前言

QIANYAN

《学前基础数学》教材是根据当前学前教育专业的发展需要，尤其是幼儿园教师资格考试的要求，并结合该学科的课程标准，在充分调查研究的基础上进行编写的，分上、下两册。

本教材的编写目的是使学生通过学习满足对数学基础知识和基本能力的需要，使学生获得一定的数学素养，为以后从事幼儿教育工作奠定基础，同时为一部分学生继续深造奠定基础。

为适应学前教育专业特定的教学对象、专业目标、学制、学时要求，本教材在内容的深度、广度上考虑到学生的入学水平和接受能力，删除了难、繁、偏、旧的内容，淡化了对解题技巧的训练，强调、突出专业特色，注重基础和应用，注重启发性、探究性、适用性，重视数学思想、方法的渗透，重视知识的产生和形成过程，重视数学知识在现实生活中的应用，重视数学与其他学科间的联系，使学生在获得知识的同时，得到严谨的态度、科学的思维方法等方面的训练，培养学生的逻辑推理和信息处理能力，提升学生的数学素养，为学生成为合格的幼儿教师做好准备。

本教材按照自然课时分节，并结合具体的教学内容，插入了有关的数学发展史、著名数学家的故事及成就、数学名题、数学知识的实际应用、数学与其他学科的联系等与幼儿园教师资格考试相关的内容；本教材还配备了练习及探究与思考的参考答案，以方便教师备课和学生自学；每章最后都有本章的知识结构图、知识要点、方法总结及“练一练”，便于学生抓住重点、突破难点，也为教师的教学留有一定余地，为学生的提高提供一定的空间。本书加*的内容为选学内容。

由于编者水平有限，书中难免还有不当、疏漏甚至错误之处，恳请各位专家、同行和读者赐教，给予批评指正，不胜感激。

编　者

2015 年 6 月

目 录

MULU

注:加“ * ”者为选学内容.

第 7 章

数列与数学归纳法

数列是初等数学的重要内容之一，它与初等数学的许多内容有着密切的联系，在科学技术与日常生活中有着广泛的应用.

在我国古代的数学著作中，曾对数列做过大量的研究，比如《庄子·天下篇》中就有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的论述，意思是说，一尺长的木棒，每天取走它的一半，永远也取不完.

如果把每天取走的木棒长度依次写出来，就得到一列数

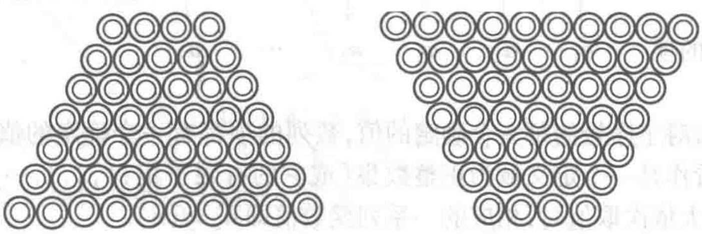
$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots.$$

它们的和是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

学习了本章的知识，你就会用公式计算出这个和，并发现无论天数 n 有多么大，这个和永远小于1.

在本章，我们将学习数列的一些基础知识，并介绍一种证明与正整数有关的数学命题的论证方法——数学归纳法.



$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

7.1 数列

7.1.1 数列及其通项公式

我们看下面的几个例子：

小于 10 的正奇数按从小到大的顺序依次排成一列数

$$1,3,5,7,9. \quad ①$$

正整数 1,2,3,4,…的倒数依次排成一列数

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots. \quad ②$$

小明家里有爷爷、奶奶、爸爸、妈妈和小明共五人,他们的年龄依次排成一列数

$$64,61,35,33,6. \quad ③$$

$\sqrt{2}$精确到 0.1,0.01,0.001,0.000 1,…的不足近似值排成一列数

$$1.4,1.41,1.414,1.414\,2,\cdots. \quad ④$$

-1 的 1 次幂,2 次幂,3 次幂,4 次幂,…排成一列数

$$-1,1,-1,1,\cdots. \quad ⑤$$

无穷多个 1 排成一列数

$$1,1,1,1,\cdots. \quad ⑥$$

上面每个例子中都有一列数,每一列数都是按照一定的次序排列起来的,像这样按照一定次序排列起来的一列数叫作数列. 数列中的每一个数叫作这个数列的项. 在第 1 个位置上的数叫作数列的第 1 项(或首项),在第 2 个位置上的数叫作数列的第 2 项,…在第 n 个位置上的数叫作数列的第 n 项,….

项数有限的数列叫作有穷数列,项数无限的数列叫作无穷数列. 例如,数列①③是有穷数列,数列②④⑤⑥是无穷数列.

如果依次用 $a_1,a_2,a_3,\cdots$来表示数列中的各项,数列的一般形式就可以写成

$$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots.$$

其中,a_n 是数列的第 n 项,叫作数列的通项,a_n 的下标 n 叫作这一项的序号. 我们常把一般形式的数列简记作$\{a_n\}$.

数列中的各项与它们的序号之间有下面的对应关系：

序　号	1	2	3	4	…	n
	↓	↓	↓	↓		↓
数列的项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n

这就是说,对于序号的每一个确定的值,数列的项都有一个确定的值与它相对应,因此,数列可以看作是一个定义域为正整数集(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)的函数,当自变量从小到大依次取值时,相应的一系列函数值即 $a_n=f(n)$.

如果数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫作

这个数列的通项公式. 数列的通项公式就是相应函数的解析式.

例如：数列①的通项公式是 $a_n=2n-1(n\leqslant 5, n\in\mathbf{N}^*)$；

数列②的通项公式是 $a_n=\dfrac{1}{n}$；

数列⑤的通项公式是 $a_n=(-1)^n$；

数列⑥的通项公式是 $a_n=1$.

像数列⑥这样,各项都是同一个常数的数列叫作常数列.

想一想 数列③有通项公式吗?

如果知道了一个数列的通项公式,那么只要依次用 1,2,3,…代替公式中的 n,就可以求出这个数列的各项.

例 7.1 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式,写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n(n+3)$； (2) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$.

解：(1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$,得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$4,10,18,28,40;$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$,得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},-\frac{5}{6}.$$

如果已知一个数列的前若干项,也可以通过对已知各项与其序号之间关系的分析、归纳,总结出数列的一个通项公式.

例 7.2 写出下面数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2,4,6,8；

(2) $\dfrac{2^2-1}{2},\dfrac{3^2-1}{3},\dfrac{4^2-1}{4},\dfrac{5^2-1}{5}$；

(3) $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},-\dfrac{1}{16}$.

分析：为了推测通项公式,我们研究数列的已知各项(或每一项的某个组成部分),并把它们与序号相比较,找出相互联系的规律.

解：(1) 这个数列的前 4 项 2,4,6,8 分别是相应序号的 2 倍,所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n.$$

(2) 这个数列的前 4 项$\dfrac{2^2-1}{2},\dfrac{3^2-1}{3},\dfrac{4^2-1}{4},\dfrac{5^2-1}{5}$都是分式,分母都是序号加上 1,分子是分母的平方减去 1,所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1},\text{即 } a_n=\frac{n^2+2n}{n+1}.$$

(3)这个数列的前4项$\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16}$的符号是正、负相间的，分子都是1，分母依次为$2,2^2,2^3,2^4$，是以2为底数、以序号为指数的幂，所以它的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}.$$

应用赏析

巧用数字对对联

宋代大诗人苏东坡年轻时与几个学友进京考试. 他们到达试院时为时已晚，考官说："我出一联，你们若对得上，我就让你们进考场."考官的上联是：一叶孤舟，坐了二三个学子，启用四桨五帆，经过六滩七湾，历尽八颠九簸，可叹十分来迟.

苏东坡对出的下联是：十年寒窗，进了九八家书院，抛却七情六欲，苦读五经四书，考了三番两次，今日一定要中.

考官与苏东坡都将一至十这十个数字嵌入对联中，将读书人的艰辛与刻苦情况描写得淋漓尽致. 在这些对联中巧妙将两个数列：1,2,3,4,5,6,7,8,9,10和10,9,8,7,6,5,4,3,2,1中的数字填了进去，生动有趣！

练习 7.1

1. 分别写出下面的数列：

(1)20以内的质数按从小到大的顺序构成的数列；

(2)π精确到1,0.1,0.01,0.001,…的近似值(四舍五入)构成的数列.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前5项：

(1)$a_n=n^2-2n$；　(2)$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$；

(3)$a_n=3\times(-1)^{n+1}$；　(4)$a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

3. 写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1)$0,-2,-4,-6$；

(2)$\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}$；

(3)$-\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{4}$；

(4)$1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1)3,6,(　　),12,15,(　　),21,…；

(2)(　　),4,9,16,(　　),36,49,…；

(3)1,$\sqrt{2}$,(　　),2,$\sqrt{5}$,(　　),$\sqrt{7}$,…；

(4)$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$,(　　),$\frac{7}{16}$,$\frac{9}{32}$,(　　),$\frac{13}{128}$,….

7.1.2　数列的递推公式

正奇数列1,3,5,7,…的通项公式是$a_n=2n-1$，只要依次用$n=1,2,3,4,\cdots$代替公式中的n，就可以求出这个数列的各项，因此我们常用通项公式来给出数列. 观察这个数列还容易发现，从第2项起，它的每一项都比前一项增加了2，因此这个数列也可用下面的方法给出

$$a_1=1,\quad a_n=a_{n-1}+2\quad(n\geqslant2).$$

这就是说，由这个数列的第1项以及项a_n与a_{n-1}之间的关系式，也可以写出这个数列.

再如数列1,1,2,3,5,8,13,21,…虽然它的通项公式①不容易写出，但通过观察可以认识到它的规律，即从第3项起，每一项都等于与它相邻的前两项的和，即

$$a_1=1,$$
$$a_2=1,$$
$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}\quad(n\geqslant3).$$

像这样，如果已知数列的第1项(或前几项)，且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫作这个数列的递推公式. 递推公式也是给出数列的一种方法.

例7.3　已知数列$\{a_n\}$的第1项是1，以后各项由公式$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$给出，写出这个数列的前5项.

解：$a_1=1$,

$$a_2=a_1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=a_2+\frac{1}{a_2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

$$a_4=a_3+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=\frac{29}{10},$$

$$a_5=a_4+\frac{1}{a_4}=\frac{29}{10}+\frac{10}{29}=\frac{941}{290}.$$

---

① $a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

在数学及现代工程技术中，递推是一种常用的、非常重要的思想方法.

知识链接

斐波那契数列

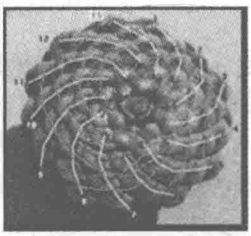
斐波那契是中世纪最有才华的数学家，出生于意大利的比萨. 公元 1202 年，他写了一本有关数学的书《算盘书》，在《算盘书》中记载了以他为名的“斐波那契数列”：假设每一对新生的小兔子，一个月后便会长大，且每一个月都生一对小兔子. 已知每次新生的一对兔子都是一雄一雌，而所有兔子都没有死去，且隔代的兔子不会互相交配. 若现有一对小兔子，问一年后共有兔子多少对呢？

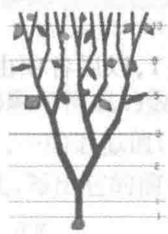
若将第 1 个月，第 2 个月，第 3 个月，…的兔子对数依次写下来，得到这样一个数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…

这就是斐波那契数列. 其中的任一个数，都叫斐波那契数. 该数列最大特点就是从第三项起，每一项是之前两项之和.

斐波那契数是大自然的一个基本模式，它出现在许多场合. 如大多数植物的花，其花瓣数都恰是斐波那契数. 例如，有 1 个花瓣的马蹄莲，有 2 个花瓣的虎刺梅，有 3 个花瓣的兰花，有 5 个花瓣的飞燕草，有 8 个花瓣的翠雀属植物，有 13 个花瓣的万寿菊属植物，有 21 个花瓣的紫菀属植物，雏菊属植物有 34、55 或 89 个花瓣. 连续的斐波那契数会出现在松果左和右两种螺旋形走向的数目之中，会出现在树枝的生长数目中(如图).





斐波那契数列组成的分数数列 $\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$：$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \cdots$ 的极限正是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$，它正是世界上最美的黄金分割数，因此斐波那契数列又称黄金分割数列.

练习 7.2

1. 根据下面数列$\{a_n\}$的递推公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_1=1, a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\quad(n\geqslant2)$；

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}, a_n=4a_{n-1}+1\quad(n\geqslant2)$；

(3) $a_1=1, a_2=-2, a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\quad(n\geqslant3)$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的递推公式：$a_1=\dfrac{1}{8}, a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant2)$，写出数列的前 4 项，并猜想它的通项公式.

7.2 等差数列及其通项公式、前 n 项的和

7.2.1 等差数列及其通项公式

观察下面的数列有什么共同特点：

2014 年 9 月份里星期日的日期为

$$7, 14, 21, 28. \tag{①}$$

正奇数列

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots. \tag{②}$$

一个梯子共 8 级，各级的宽度依次是

$$72, 68, 64, 60, 56, 52, 48, 44. \tag{③}$$

不难看出：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 7；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 2；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于−4.

这就是说，这些数列具有这样的共同特点：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列. 这个常数叫作等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示.

上面的三个数列都是等差数列，它们的公差依次是 7, 2, −4.

特别地，常数列，如

$$3, 3, 3, 3, \cdots,$$

是公差为 0 的等差数列.

例 7.4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=-2n+3$.

(1) 计算 $a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3$；

(2) 计算 $a_{n+1}-a_n$;

(3) 试问这个数列是等差数列吗?

解: (1) 由通项公式得

$a_2-a_1=-2\times2+3-(-2\times1+3)=-2$,

$a_3-a_2=-2\times3+3-(-2\times2+3)=-2$,

$a_4-a_3=-2\times4+3-(-2\times3+3)=-2$.

(2) 由通项公式得

$a_{n+1}-a_n=-2(n+1)+3-(-2n+3)=-2$.

(3) 因为 n 是任意正整数,(2) 的结果已说明这个数列从第 2 项起,每一项与它前一项的差都等于 -2,故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且公差 $d=-2$.

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1,公差是 d,那么根据等差数列的定义得到

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ a_4-a_3=d,\ \cdots,$$

于是有

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

由此归纳出等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

例 7.5 (1) 已知等差数列的首项为 5,公差为 $\frac{2}{3}$,求这个数列的第 40 项;

(2) 求等差数列 8, 5, 2, …的第 20 项.

解: (1) 由 $a_1=5$, $d=\frac{2}{3}$, $n=40$,代入等差数列的通项公式得

$$a_{40}=5+(40-1)\times\frac{2}{3}=31.$$

(2) 由 $a_1=8$, $d=5-8=-3$, $n=20$,得

$$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$$

练习 7.3

1. 指出下面数列中哪些是等差数列,并求出这些等差数列的公差:

(1) 1, 1.1, 1.3, 1.9, 2.1, …;

(2) −2, 1, 4, 7, 10, …;

(3) 4, 2, 0, −2, −4, …;

(4) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ….

2. (1) 求等差数列 5, 9, 13, …的第 4 项与第 10 项;

(2)求等差数列 10,8,6,…的第 20 项;

(3)求等差数列 0,-3,-6,…的第 $n+1$ 项.

例 7.6 已知等差数列-3,-7,-11,…,问-85 是不是这个数列的项? -215 是不是这个数列的项? 如果是,是第几项?

解: 这个等差数列中,$a_1=-3$,$d=-7-(-3)=-4$,所以,通项公式为

$$a_n=-3-4(n-1).$$

如果-85 是这个数列中的项,则方程

$$-85=-3-4(n-1)$$

有正整数解. 解这个方程得 $n=\frac{43}{2}$,不是正整数,说明-85 不是这个数列的项.

如果-215 是这个数列的项,则方程

$$-215=-3-4(n-1)$$

有正整数解. 解这个方程得 $n=54$,所以-215 是这个数列的第 54 项.

例 7.7 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_4=10$,$a_7=19$,求 a_1 与 d,并写出这个等差数列的通项公式.

解: 由题意可知

$$\begin{cases}a_1+3d=10,\\a_1+6d=19.\end{cases}$$

这是一个以 a_1 和 d 为未知数的二元一次方程组,解这个方程组,得

$$a_1=1,\quad d=3.$$

所以这个等差数列的通项公式是

$$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2.$$

例 7.8 梯子的最高一级宽 44 cm,最低一级宽 72 cm,中间还有 6 级,各级的宽度成等差数列. 求中间各级的宽度.

解: 设梯子各级宽度组成的等差数列为$\{a_n\}$,依题意知

$$a_1=44,\ a_8=72,\ n=8.$$

由等差数列的通项公式,得

$$a_8=a_1+(8-1)d,$$

即

$$72=44+7d,$$

解得

$$d=4.$$

因此

$$a_2=44+4=48,\ a_3=48+4=52,\ a_4=52+4=56,$$
$$a_5=56+4=60,\ a_6=60+4=64,\ a_7=64+4=68.$$

答: 梯子中间各级的宽度从上到下依次是 48,52,56,60,64,68 cm.