高等院校网络教育精品教材
——基础类

高等数学（Ⅱ）

GAODENG SHUXUE（Ⅱ）

陈滋利　陈金喜
张红玲　冯　颖　编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高等院校网络教育精品教材——基础类

高等数学

（Ⅱ册）

陈滋利　陈金喜
张红玲　冯　颖　编

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书共计11章，分Ⅰ、Ⅱ两册，Ⅰ册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程；Ⅱ册内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分、曲线积分与格林公式、无穷级数. 全书取材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用，突出了数学思想和数学方法，内容处理比较新颖，覆盖面广，深入浅出，通俗易懂.

本书既可作为高等职业院校，远程、函授等成人教育的高等数学通用教材，也可作为自学考试的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 2 / 陈滋利等编. —成都：西南交通大学出版社，2012.5

高等院校网络教育精品教材. 基础类

ISBN 978-7-5643-1737-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第084692号

高等院校网络教育精品教材——基础类

高等数学

（Ⅱ册）

陈滋利　陈金喜
张红玲　冯　颖　编

*

责任编辑　张宝华

封面设计　墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段111号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564)

http://press.swjtu.edu.cn

成都勤德印务有限公司印刷

*

成品尺寸：185 mm × 260 mm　　印张：6.25

字数：155千字

2012年5月第1版　　2012年5月第1次印刷

ISBN 978-7-5643-1737-9

定价：12.00元

图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

现代远程教育也称网络教育，即运用网络技术与环境开展的教育，是现代信息技术应用于教育后产生的新概念. 通过网络，教师与学员即使相隔万里也可以开展教学活动，而学员也可以随时随地进行学习，真正打破了时间和空间的限制. 对于工作繁忙、学习时间不固定的自学者而言，网络远程教育是最方便不过的学习方式.

本书是高等学校网络教育学院和广播电视大学专科学历教育“高等数学”公共课教材，也可供高职、高专的学生使用. 全书分为Ⅰ、Ⅱ两册，Ⅰ册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程；Ⅱ册内容为空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分、曲线积分与格林公式、无穷级数. 本书每节附有足够数量的习题以便学生扎实、准确地掌握本书内容.

网络教育高等数学课程的教学内容充分体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以“掌握概念，强化应用能力”为出发点，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，加强对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养. 本书多位作者长期为网络教育学院学生讲授高等数学，深知他们数学基础薄弱，了解他们学习高等数学课程时的疑难与困惑，因此，全书取材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用，突出了数学思想和数学方法. 本书例题丰富，图形直观，富有启发性，便于自学.

由于时间和水平方面的原因，本教材的不足之处在所难免，诚恳地希望广大师生能把使用时发现的问题告诉我们，以便日后修订完善. 若有建设性意见，亦望赐教，在此表示衷心的感谢！

编　者

2012.1

目　录

第七章　空间解析几何

本章主要涉及空间解析几何的基础知识. 正如平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可或缺的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必不可少的. 这部分内容包括空间直角坐标系、平面和空间直线方程，以及常见的空间曲面、曲线的方程. 在曲面方程中，我们着重讨论了柱面、二次曲面的方程. 在讨论平面和直线方程时，向量扮演了重要角色，只要抓住平面的法向量和直线的方向向量，才能抓住这部分的主旨，这是学习时一定要注意的.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

正如平面直角坐标系建立了平面上点与数、图形与方程的联系一样，空间直角坐标系也能建立空间上的点与数、图形与方程的关系，为此，我们引进空间直角坐标系.

过空间一定点 O，作三条互相垂直的直线，在其上分别建立三条坐标轴，依次称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴）. 它们都以 O 为原点且有相同的长度单位，各轴的正方向均符合**右手法则**，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向（见图 7.1）. 这三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 直角坐标系，点 O 称为该坐标系的**原点**，每两个坐标轴确定的平面称为**坐标面**，即 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面.

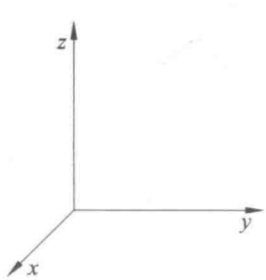

图 7.1

这三个坐标面把空间分成八个部分，每一个部分叫做一个卦限，如图 7.2 所示. 八个卦限分别用罗马字母Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ表示，第一、第二、第三、第四卦限均在 xOy 面的上方，

按逆时针方向排定，其中在 xOy 面上方并在 yOz 面前方、zOx 面后方的是第一卦限；第五、第六、第七、第八卦限均在 xOy 面的下方，也按逆时针方向排定，它们依次分别在第一至第四卦限的下方.

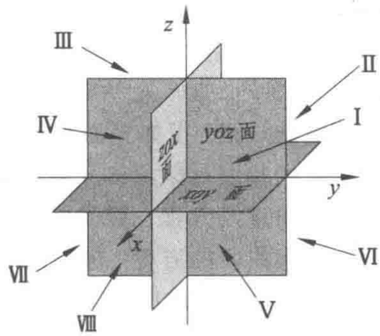

图 7.2

设 M 是空间任一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 P, Q, R 三点. 点 P, Q, R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影点. 设这三个投影点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x, y 和 z，于是空间一点 M 可唯一地确定一个有序数组 x, y, z. 反过来，对给定的有序数组 x, y, z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P, Q, R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平面的交点 M 就是有序数组 x, y, z 所确定的唯一的点(见图 7.3). 这样，空间一点与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应关系. 组数 x, y, z 称为点 M 的坐标，依次称 x，y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，点 M 记为 $M(x, y, z)$.

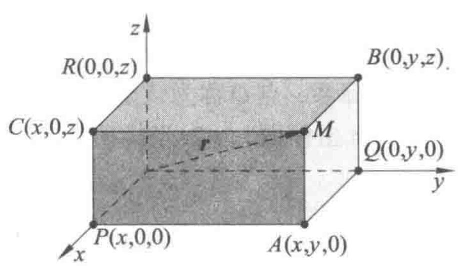

图 7.3

二、两点间的距离公式

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点，为了表达 P_1 与 P_2 之间的距离，过 P_1 和 P_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面. 这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体（见图 7.4）.

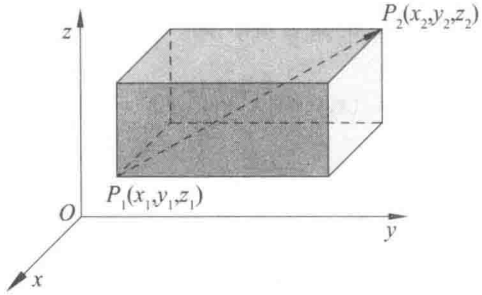

图 7.4

从图中可以看出，该长方体各棱边的长度分别是

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|\ ,$$

于是可以求得对角线 P_1P_2 的长度，即空间两点 P_1,P_2 的距离公式为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \tag{1}$$

例 1 证明：以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明 通过计算得

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14\ ,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6\ ,$$

$$|M_1M_3|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6\ .$$

注意到，

$$|M_1M_3|=|M_2M_3|\ ,$$

故 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

例 2 所有与原点距离为常数 r 的点的坐标 x, y, z 应满足什么方程？

解 设 $M(x, y, z)$ 是满足题设条件的任一点，原点为 $O(0, 0, 0)$ ，则

$$|OM|=r\ ,$$

即

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r\ ,$$

或

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ ,$$

这就是所求的方程.

记所有与原点距离为 r 的点组成的集合 B，则

$$B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r^2\}.$$

它是中心在原点、半径为 r 的球面.

习题 7.1

1. 在空间直角坐标系中，各卦限内的点的坐标有什么特征？指出下列各点所在的卦限：
$A(1,-3,2)$;　　$B(3,-2,-4)$；　　$C(-1,-2,-3)$；　　$D(-3,2,-1)$.
2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：
$P(0,2,-5)$;　　$Q(5,2,0)$；　　$R(8,0,0)$；　　$S(0,2,0)$.
3. 求点 $(3,1,2)$ 关于各坐标面、各坐标轴以及坐标原点的对称点的坐标.
4. 求点 $(4,1,9)$ 到坐标原点、各坐标轴以及各坐标面的距离.
5. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

第二节　向量的表示及运算

一、向量的概念及基本性质

客观世界中有很多量，比如物体的体积、质量、两点间的距离等，它们只有大小，可用数字来表示，处理这些量的方法也与实数的运算规则相同. 通常称这些量为**纯量**. 然而，客观世界中还存在另一种量，例如位移、速度、加速度、力、力矩等，它们既有大小，又有方向，处理这类量的规则也不能像实数那样去处理. 这种既有大小、又有方向的量称为**向量**.

向量通常用黑体字母或上方加箭头的字母来表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{s},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{v},\vec{s},\vec{F}$ 等. 由于向量既有大小又有方向，故常用有向线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（见图 7.5）.

图 7.5

需要指出的是，向量虽然有大小和方向，但不涉及向量的起点，因此如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与

$\boldsymbol{b}$ 的大小相同、方向一致，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},$$

并把这样的向量叫做**自由向量**.

向量的大小叫做向量的**模**. 例如，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$ 的模用 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\vec{a}|$ 来表示. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于零的向量叫做**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或者相反，则称这两个向量**平行**，记作

$$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}.$$

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在同一条直线上，因此，两向量平行，又称两向量**共线**.

向量的加法（几何法则）：

从物理学与力学中我们知道，力、速度的合成都符合平行四边形法则，因此可以定义向量的加法：

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB, AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线是 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 7.6）.

此规则叫做向量加法的**平行四边形法则**，它亦适用于平行向量相加.

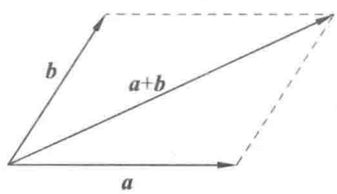

图 7.6

此外，设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连结 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 7.7）.

这一规则叫做向量加法的**三角形法则**.

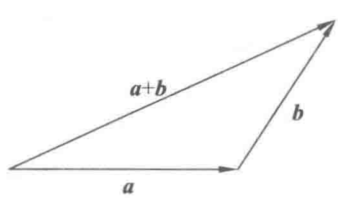

图 7.7

由向量加法的定义及图 7.8 可以看出：向量的加法满足：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

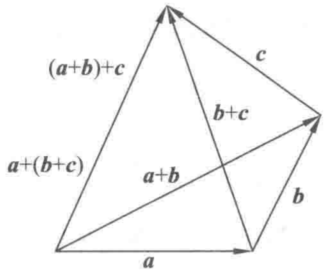

图 7.8

向量的数乘(几何法则):

对任意实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，定义 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的**乘积**(简称**数乘**)是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$.

它的模与方向规定如下:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

(2)当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证，向量的数乘满足结合律和分配律:

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

其中 λ,μ 为实数，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量.

对于向量 $\boldsymbol{a}$，称向量 $(-1)\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$，即

$$-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}.$$

显然，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同，方向相反. 进而可规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差是向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $(-\boldsymbol{a})$ 的和(见图 7.9).

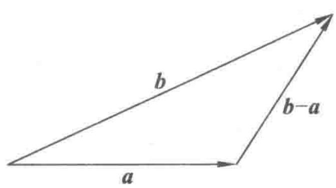

图 7.9

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，且它的模

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1.$$

故 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的**单位向量**，记作 $\boldsymbol{e}_a$，即有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

于是，我们有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

这说明任意非零向量可以表示为它的模与同向单位向量的数乘.

二、向量的坐标表示及向量的运算

向量的运算仅靠几何方法远远不够，因此需要将向量的运算代数化，为此先建立向量的坐标表示.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，在 x 轴、y 轴、z 轴上与该轴正向同方向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称为**标准单位向量**. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点位于坐标原点 O，终点为 $M(a_x,a_y,a_z)$，那么 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$（见图 7.10）. 由向量的加法可得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

我们称 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示，记为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z),$$

其中 (a_x,a_y,a_z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

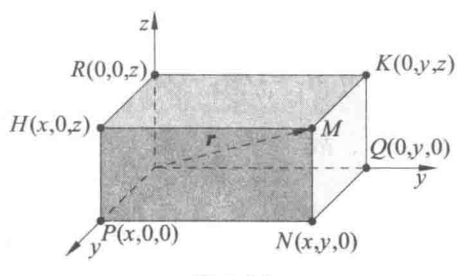

图 7.10

注意：空间任意一点 $P(x,y,z)$，都对应一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，它称为点 P（关于原点）的**向径**. 显然，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，即点与该点的向径有相同的坐标.

下面给出向量加法、减法以及数乘的代数方法.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律，以及向量与数乘法的结合律和分配律得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}.$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\ \text{（}\lambda\ \text{为实数）}.$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z).$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},$$

坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.\text{[①]} \tag{1}$$

例 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式，其中 M_1 的坐标是 (x_1,y_1,z_1)，M_2 的坐标是 (x_2,y_2,z_2).

解 由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

而 $OM_2=(x_2,y_2,z_2)$, $OM_1=(x_1,y_1,z_1)$，故

$$\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

从而得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1). \tag{2}$$

---

① 当 a_x, a_y, a_z 有一个为零，例如 $a_x=0$, $a_y,a_z\neq0$ 时，(4) 式应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z};\end{cases}$$

当 a_x,a_y,a_z 有两个为零，例如 $a_x=a_y=0$, $a_z\neq0$ 时，(4) 式应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\ b_y=0.\end{cases}$$

习题 7.2

1. 设 A, B, C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

4. 设 C 为线段 AB 上一点，且 $|CB|=2|AC|$，O 为 AB 外一点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

5. 已知点 $A(2,1,4)$, $B(4,3,10)$，写出以线段 AB 为直径的球面方程.

6. 已知两点 $M_1(4,3,1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标.

7. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 的坐标以及在 y 轴上的分向量.

第三节　向量的数量积

一、数量积的概念及性质

由物理学知道，某物体在常力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下沿直线从点 M_0 移动至点 M，用 $\boldsymbol{s}$ 表示物体的位移 $\overrightarrow{M_0M}$，那么力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角（见图 7.11）. 由此可以定义向量的数量积.

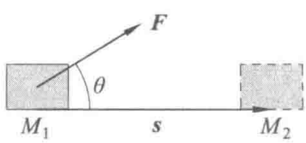

图 7.11

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，

$$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

定义 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模以及它们夹角 θ 的余弦的乘积，用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 来表示，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{1}$$

向量的数量积也叫**点积**或**内积**. 按此定义，力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功就可以表达为

$$W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}.$$

显然，对任何向量 $\boldsymbol{a}$ 及常数 a，有

$$\boldsymbol{a}\cdot 0 = a\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，（1）式中的因子 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 也称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，因此（1）式可写作

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

由此得

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{e}_{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

上式表明，向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与它在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$ 的数量积.

容易验证，数量积有如下运算性质：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

（2）结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

（3）分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

与此同时，由数量积的定义可知：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

特别地有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1.$$

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **正交**（或**垂直**），记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

（2）两个向量垂直的充分必要条件是数量积为 0，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

特别地有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0.$$

二、数量积的坐标计算公式

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，利用运算法则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &= a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\ &\quad a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\ &= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ ,\tag{2}$$

即两向量的数量积等于两向量对应坐标的乘积之和.

作为应用有：向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角应满足公式：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).\tag{3}$$

若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2+{b_z}^2}}.\tag{4}$$

特别地，向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 垂直的充分必要条件是

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 1　已知点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解　$\angle AMB$ 可以看成向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角，而

$$\overrightarrow{MA}=(2-1,2-1,1-1)=(1,1,0)\ ,$$

$$\overrightarrow{MB}=(2-1,1-1,2-1)=(1,0,1)\ ,$$

故

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1\ ,$$

$$\overrightarrow{MA}=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}\ ,$$

$$\overrightarrow{MB}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}\ .$$

由公式（3）得

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{2}\ ,$$

所以 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

例 2　设 $\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,4,2)$，证明 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

证明　因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6-8+2=0\ ,$$

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.