



当代世界中的数学 应用数学与数学应用

朱惠霖 田廷彦○编

YINGYONG SHUXUE YU SHUXUE YINGYONG





当代世界中的数学

应用数学与数学应用

朱惠霖 田廷彦○编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书详细介绍了数学在各领域的精华应用,同时收集了数学中典型的问题并予以解答,本书共分两编,分别为应用数学与数学的应用性、数学应用的一个方面:对抗和竞争。

本书可供高等院校师生及数学爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学.应用数学与数学应用/朱惠霖,田廷彦编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019.1

ISBN 978-7-5603-7387-4

I. ①当… II. ①朱… ②田… III. ①数学—普及读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 108843 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 14 字数 348 千字

版 次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-7387-4

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序 言

如今,许多人都知道,国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志,一本是《自然》(*Nature*),一本是《科学》(*Science*)。

恐怕有许多人还不知道,在我们中国,有两本与之同名的杂志^①,而且也是跨学科的学术性杂志,只是通常又被定位为“高级科普”。

国际上的《自然》和《科学》,一家在英国,一家在美国^②。它们之间,按维基百科上的说法,是竞争关系^③。

我国的《自然》和《科学》,都在上海,它们之间,却有着某种历史上的“亲缘”关系。确切地说,从1985年(那年《科学》复刊)到1994年(那年《自然》休刊)这段时期,这两家杂志的主要编辑人员,原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门,甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志,创刊于1978年5月。那个年代,被称为“科学的春天”。3月,全国科学大会召开。科学工作者、教育工作者,乃至莘莘学子,意气风发。在这样的氛围下,《自然》的创刊,是一件大事。全国各主要媒体,都报道了。

这本《自然》杂志,设在上海科学技术出版社,由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编,又调集精兵强将,组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子。正是这个编辑班子,使得《自然》杂志甫一问世,便不同凡响;没有几年,便蜚声科学界和教育界^④。

1983年,当这个班子即将一分为二的时候,上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说,在上海出版界,还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错。1983年,中共上海市委宣传部发文,将《自然》杂志调往上海交通大学。为什么? 此处不必说。我只想说,这次强制性的调动,却有一项

① 其中的《自然》杂志,在创刊注册时,不知什么原因,将“杂志”两字放进了刊名之中,因此正式名称是《自然杂志》。但在本文中,仍称其为《自然》或《自然》杂志。此外,应该说明,在我国台湾,也有两本与之同名的杂志,均由民间(甚至个人)资金维持。台湾的《自然》,创刊于1977年,系普及性刊物,内容以动植物为主,兼及天文、地理、考古、人类、古生物等,1996年终因财力不济而停办。台湾的《科学》,正式名称《科学月刊》,创刊于1970年,以介绍新知识为主,“深度以高中及大一学生看得懂为原则”,创刊至今,从未脱期,令人赞叹。

② 英国的《自然》,创刊于1869年,现属自然出版集团(Nature Publishing Group),总部在伦敦。美国的《科学》,创刊于1880年,属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science),总部在华盛顿。

③ 可参见 [http://en.wikipedia.org/wiki/Science_\(journal\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal))。

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008年第51期上的“一本科普杂志的30年‘怪现象’”一文。

十分温情的举措,即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利.结果是,大约一半人选择去交通大学,大约一半人选择不去,留在了上海科学技术出版社.

我属去的那一半.留下的那一半,情况如何,一时不得而知.但是到1985年,便知道了:他们组成了《科学》编辑部,《科学》杂志复刊了!

《科学》,创刊于1915年1月,是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊,对于中国现代科学的萌发和成长,有着独特的贡献.中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事:华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的.《科学》于1950年5月停刊,1957年复刊,1960年又停刊.1985年的这次复刊,其启动和运作,外人均不知其详,但我相信,留下的原《自然》杂志资深编辑,特别是吴智仁先生和潘友星先生,无疑是起了很大的甚至是主要的作用的.复刊后的《科学》,由时为中国科学院副院长的周光召任主编,上海科学技术出版社出版.

于是,原来是一个编辑班子,结果分成两半(各自又招了些人马),一半随《自然》杂志披荆斩棘,一半在《科学》杂志辛勤劳作.

《自然》杂志去交通大学后,命运多舛.1987年,中共上海市委宣传部又发文:将《自然》杂志从交通大学调出,“挂靠”到上海市科学技术协会,属自收自支编制.至1993年底,这本杂志终因入不敷出,编辑流失殆尽(整个编辑部,只剩我一人),不得不休刊了.1994年,上海大学接手.原有人员,先后各奔前程.《自然》与《科学》的那种“亲缘”关系,至此结束.

这段多少有点辛酸的历史,在我编这本集子的过程中,时时在脑海里浮现,让我感慨,让我回味,也让我思索……

好了,不管怎么说,眼前这件事还是让人欣慰的:在近20年之后,《自然》与《科学》的数学部分,竟然在这本集子里“久别重逢”了!

说起这次“重逢”,首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生.是他,多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册;是他,了解《自然》和《科学》的这段“亲缘”关系,建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来,实现了这次“重逢”;又是他,在上海教育出版社申报这一选题,并获得通过.

其次,要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生.是他,当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时,毅然伸手相助,接下了这项出版任务^①.

当然,还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生.是他,精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章.

他们三人,加上我,用时下很流行的说法,都是不折不扣的“数学控”.我们

^① 说来有趣,我与刘培杰先生从未谋面,却似乎有“缘”已久.这次选编这本集子,发觉他早年曾向《自然》杂志投稿,且被我录用,即收入本集子的《费马数》一文.屈指算来,那该是20年前的事了.

以我们对数学的热爱和钟情,为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者(相信其中也有不少的“数学控”)献上这本集子,献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章。

这里所说的“数学文章”,不是指数学上的创造性论文,而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章,以及关于人物和史实的介绍性文章。其实,这些文章,都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章。

按美国物理学家、科学普及作家杰里米·伯恩斯坦(Jeremy Bernstein, 1929—)的说法,在与公众交流方面,数学家排在最后一名^①,大概是由于这个原因,国际上的《自然》和《科学》,数学文章所占的份额,相当有限。

然而,在我们的《自然》和《科学》上,情况并非如此。在《自然》杂志上,从1984年起就常设“数林撷英”专栏,专门刊登数学中有趣的论题;在《科学》杂志上,则有类似的“科学奥林匹克”专栏。许多德高望重的数学大师,愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述;许多正在从事前沿研究的数学家,乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者。在数学这个需要人类第一流智能的领域,流传着说不完道不尽的趣事佳话,繁衍着想不到料不及的奇花异卉。这些,都在这两本杂志上得到了充分的反映。

在编这本集子的时候,我们发觉,《自然》(在下文所说的时期内)和《科学》上的数学好文章是如此之多,多得简直令人苦恼:囿于篇幅,我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难,最终又不得不忍痛割爱。即使这样,篇幅仍然宏大,最终不得不考虑分册出版。

现在这本集子中的近200篇文章,几乎全部选自从1978年创刊至1993年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志,和从1985年复刊至2010年年底这段时期的《科学》杂志。它们被分成12个版块,每个版块中的文章,基本上以发表时间为序,但少数文章被提到前面,与内容相关的文章接在一起。

还要说明的是,在“数学的若干重大问题”版块中,破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作,以全面反映当时国际数学界的大事;在“数学中的有趣话题”版块中,破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”,田廷彦先生对这篇文章钟爱有加;在“当代数学人物”版块中,所介绍的数学人物则以20世纪以来为限。

这本集子中的文章,在当初发表时,有些作者和译者用了笔名。这次选人,仍然不动。只是交代:在这些笔名中,有一位叫“淑生”的,即本人也。

照说,选用这些文章,应事先联系作译者,征求意见,得到授权。但有些作译

^① 参见 Mathematics Today: Twelve Informal Essays, Springer-Verlag(1978)p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者,他们的联系方式,早已散失;不少作译者,由于久未联系,目前的通信地址也不得而知;还有少数作译者,已经作古,我们不知与谁联系.在这种情况下,我们只能表示深深的歉意.更有许多作译者,可说是我们的老朋友了,相信不会有什么意见,不过在此还是要郑重地说一声:请多多包涵.

在这些文章中,也融入了我们编辑的不少心血.极端的情况是:有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲,再参考作者已发表的论文,越俎代庖地写成的.尽管我们做编辑这一行的,“为他人作嫁衣裳”,似乎是份内的事,但在这本集子出版的时候,我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑,一一介绍如下,并对其中我的师长和同仁、同行,诚致谢忱.

《自然》上的数学文章,在我1982年2月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前,基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑;在这之后到1987年先生退休,是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果.此后,又有张昌政先生承担了大量编辑工作;而计算机方面的有关文章,在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章,在复刊后,先是由黄华先生负责编辑,直至1996年他出国求学;此后便是由田廷彦先生悉心雕琢,直到现在;其间静晓英女士也完成了一些工作.当然,《科学》杂志负责复审和终审的编审,如潘友星先生、段韬女士,也是付出了心血的.

回顾往事,感悟颇多.但作为这两本杂志的编辑,应该有这样的共同感受:一是荣幸,二是艰辛.荣幸方面就不说了,而说到艰辛,无论是随《自然》杂志流离,还是在《科学》杂志颠沛,都可用八个字来概括:“筚路蓝缕,以启山林”.

是的,筚路蓝缕,以启山林!

如今,蓦然回首,我看到了:

一座巍巍的山,一片苍苍的林!

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任
朱惠霖

2017年5月于沪西半半斋

第一编 应用数学与数学的应用性 // 1

谈谈应用数学的作用 // 3

应用数学三十年 // 12

应用数学的特点和重要性 // 16

数学的可应用性 // 20

数学与应用 // 24

仆人与皇后——谈谈数论和它的应用 // 31

纯粹数学:用武何地 // 39

应用数学与复杂网络 // 49

第二编 数学应用的一个方面:对抗和竞争 // 57

军事运筹学概述 // 59

兰彻斯特作战理论简介 // 68

对策论,外交谈判及其他 // 77

名额分配问题——数学在政治中的应用一例 // 90

公平的名额分配 // 100

关于体育竞赛的数学理论——试论竞赛制度的改革 // 108

关于体育赛制的数学问题 // 120

密码学与数学 // 127

密码与运筹——日本的暗号研究简介 // 143

密码技术的回顾和展望 // 152

现代保密通信中的安全技术(1)——消息认证 // 165

现代保密通信中的安全技术(2)——身份验证 // 174

信息安全与数学科学 // 184

数论密码 // 193

编辑手记 // 200

第一编

应用数学与 数学的应用性

谈谈应用数学的作用^①

本书分析了应用数学与纯粹数学、理论科学(指理论物理、理论化学等)的不同之处,从而阐明了应用数学作为一门独立学科所具有的特点和作用,提出了关于培养应用数学家的教学计划的建议.

一、应用数学的作用

应用数学家的作用,是促进数学最有效地应用在自然科学、社会科学、应用科学、工程、工业、管理,以及所有其他各种人类活动方面.但是,这些还不是他的全部职能.作为一个有才智的科学家,他还能够提出一些聪明的问题和新颖的想法,这些虽然与数学关系疏远,或者只是部分地与数学有关,但却极端重要.不过在本书中,将局限于讲数学在科学上的有效应用,以及如何通过这种努力来促进纯粹数学的研究.我们讨论的焦点之一将是如何使这种作用变得有效.

^① 林家翘,《自然杂志》第1卷(1978年)第2期.作者是马萨诸塞理工学院教授,本刊译载这篇文章时做了删节.

二、应用数学的性质和范围

应用数学介于实验科学与纯粹数学之间,它是以一种态度、一种手段、一种思想方法为特征的.主要论题是数学与科学的相互依赖.应用数学家和纯粹数学家一样,关心促进新数学的发展(参阅[1]),但他首先侧重于直接地或至少很强烈地被科学问题所推动的方面.和理论科学家一样,应用数学家利用数学方法去寻求对于科学事实和现实世界现象的认识和理解.

特别值得注意的是:发现一些新的想法,使数学能应用于那些迄今为止尚未受到系统数学处理的科学门类,并在这些门类中发展数学理论(社会科学和生物学是常被引用的例子).通过这些努力,可产生新的数学概念和理论(经过抽象、推广或其他方法).作为纯粹数学的一部分,这些概念和理论本身就使人感兴趣.承认应用数学家活动的二重性,对掌握应用数学的精神很重要.强调了这种二重性,在应用数学与纯粹数学或实验科学之间就显然呈现出侧重点的区别.

应用数学的范围是很广范的,它可以借用 A. 爱因斯坦下面的几句话(见[2])来做最好的说明:

“它的范围可定为
我们全部知识中
能够用数学语言
表达的那个部分.”

这几句话原是用来给物理学下定义的.从字面上看,这种说法显然包括了其他学科的数学理论,因而它可能是应用数学比较恰当的描述.

显然,在每一门科学的活动中,主要的努力并不是很带数学特征的.例如,对日斑和太阳风情形的观察、放射性元素的分离、民意投票的计数(不是分析)和细菌培养等活动.因此,应用数学并不包括所有的科学.它只是与所有的科学有重叠.重叠的程度可大(例如物理学)可小(目前说来例如生物学).应用数学家所应当关心的是扩展这个重叠范围.同时,由于应用数学家对于数学方法的丰富知识和他对许多种数学应用的经验所产生的智慧,使他最有权利来判断,某一特殊的数学分支在各类科学领域或问题中的有效程度.他必须致力于那些

能有效地应用数学方法的科学部门. 有经验的应用数学家必须继续增进自己的数学知识^①, 必要时, 还应该创造新的数学.

总括起来说, 一个训练有素的应用数学家必须对上面提到的二重性的精神实质有清楚的认识, 并对数学科学的整个图景有广博的知识.

三、应用数学家的创造性活动(第一部分)^②

应用数学家常从事下列工作: (a) 用数学语言表达科学的概念和问题, (b) 给出所得数学问题的解, (c) 讨论、解释和评价分析结果, 包括做出明确的预示. 但是特定问题的解往往只用作达到更深理解的一个焦点和一种帮助. 应用数学家上述工作的最终目的在于 (d) 为所研究的课题创造一些具有基本意义而又普遍可用的想法、概念和方法, 其中包括对一般原理的公式表达. 这些工作的结果会导致 (e) 创造出新的数学概念和理论. 可以补充一点: 由于这种数学理论是如此得来的, 它们将更有希望应用于其他科学部门.^③

纯粹数学家和应用数学家在研究动机方面的基本区别, 反映在他们活动的习惯和实践中. 虽然应用数学家了解并重视严格的证明, 但在他活动的 (b) 方面, 基本注意力总是直指最后的解, 因而他常用启发式科学推理来达到这一目的. 这样一来, 分析就可能做得更便于求解, 可能会引入一些近似, 或做出一些似然的论证. 尽管如此, 他应在纯粹数学方面有足够的基础, 才能看出严格的证明、清楚的证明、似然的论证和有希望的推测之间的区别, 特别是当应用数学家致力于创造新数学时, 他应按照纯粹数学中的做法 (包括严格程度) 来表述他的结果. 由于他的专业背景, 无疑会强调运用启发式推理来引导到理论的最后形式.

在许多情况下, 数学方法或理论的严格形式不可能发展成功, 但是不得不用的只包含似然论证的方法, 却支持了结论的可靠程度. 大部分求出科学问题数值解的工作都属于这一类.

在应用数学家的另两个活动方面 (a) 和 (c) 中, 他就必须按照理论科学家的做法行事了. 做出理想的数学模型确实是最重要和最困难的方面, 特别是在数学的新应用范围内. 它通常需要对于所考察的实验事实有广博的知识和深刻的理解, 并需要敏锐的见解和成熟的判断. 这些在他的活动的 (d) 和 (e) 方面也

① 例如参阅 T. von Kármán 八十岁时[3]序言中的见解.

② 参阅[4].

③ 参阅 H. Cohen[5]. 在这篇文章中, 他指出这些数学问题及其解与力学和经典应用数学中的那些问题及其解的性质相似. 又 L. Klein 在[6]中说: “……但是很少有这样的例子: 其中的课题可以说是已经产生了自己的数学分支, 或已经启示了巨大的数学新发现.”

是需要的,在这些方面,应用数学家必须检验他的结果,以便更深刻地理解手头的问题,并试着概括出实质,形成可普遍应用的概念.同时,他的结论当然还需与已有的知识对照,并将新推论或新预示通过进一步的试验和观察予以证实,因为它们的真实性是不能由纯逻辑方法来决定的.经过补充的理论和实验工作后,就可以获得更深刻、更敏锐的理解.

虽然在活动方面有上述相似点,在理论科学家与应用数学家之间还是存在着态度方面的细微差别.例如,理论物理学家的主要兴趣在于发现新的物理定律.事实上,一个正确的理论只有在经过许多次尝试和错误之后才能表述出来(考察一下高能物理中当前的工作).相反地,应用数学家却更注意利用数学方法通过已知物理学定律来描述物理现象(考察一下数值天气预报中当前的工作).他对激起新的数学概念也有很大的兴趣.我们可以说,差别就在于两门学科中归纳推理和演绎推理被强调的相对程度.

但是,在研究动机方面的这些细微差别,能在教学计划的选择和个人态度等方面产生实质性的差别,这又转而使他的活动具有不同的色彩.例如,在现代,经典力学(包括粒子力学和连续区力学)已不大让学物理的学生去详细研究了,但是在培养应用数学家时,它仍是一门主课.通过这一课程而学到的基本概念和数学方法仍然是数学应用的主要基础,而不管要研究的特殊课题是什么.

以数学为工具来打破传统科学学科界限的欲望和能力,或许是应用数学家独具的特点.事实上,培养一个应用数学家必须使他在数学方面和科学基础方面都具备一定广度的知识.这样他才有足够的能力,通过创造合适的数学模型,通过他审慎而精确的思考,并通过移用他在另一学科的研究中所得到的数学知识,来推进一项特殊的课题.

为了培养应用数学家,必须就本科生和研究生两种水平制订学习计划,也应该提供高于博士水平的研究机会.特别是必须有一门学习本节开头所述五步程序的基本原理的课程,尤其要着重重视其中的第一步,即在研究各种问题时做出合适的数学模型.这最后的部分在大多数数学课程中通常是缺少的.

四、应用数学家的创造性活动(第二部分)

应用数学家有时也解决一些从他们的科学问题中产生的数学问题.应重视这种存在于数学与各种科学间的相互作用.这里引[7]中的一段话:“傅里叶把数学当作描述自然的一种工具.傅里叶在物理学和工程上产生了重要的影响,但是在几个最纯粹的数学分支中却特别感觉到了他的影响.”

为了继承傅里叶这个传统,应用数学家显然必须受到现代纯粹数学知识的

教育.在大学,要计划开设专门课程,将纯粹数学的要点介绍给学应用数学的学生(参阅本书第7节).应用数学家也必须准备在一生中任何需要的时候去学习新的数学.

对于应用感兴趣的纯粹数学家,可以在科学与数学的这种相互作用的方面做出极大的贡献.他们时常能够帮助把特殊的结果加以抽象、整理和一般化,使它们的结构变得更精美、有力.自然他们也有助于促成数学上的其他发展,这些发展在开始时可能显得无用,但后来会在科学上得到重要的应用,但是从应用数学家的立场出发,我还要补充一点.我们所需要的定理往往不是最一般性的,有一些在适当的限制下证明的定理,我们就完全满意了.

五、举例

我们现在来研究几个物理数学中的例子,看看上述关于应用数学创造性活动的理想化的描述,如何与具体的情况相符合.

(1) 傅里叶分析,一个完全成功的例子.

考察傅里叶分析的情况,这大概是一个完整“循环”的最好例子.数学物理学中比较简单的一类问题,即热传导问题,是按照本书第三节中列出的(a)~(c)的步骤解决的.傅里叶级数、傅里叶积分和广义调和函数等数学理论都是使人获得深刻印象的成果.勒贝格测度理论容易由一个简单问题的提出而得到推动,这问题就是:巴塞伐尔定理的逆定理是否正确?现代射电天文学依靠傅里叶分析进行运算.傅里叶分析的程序已经编入自动联机数据处理设备.从远距离天体来的信号的光谱分析实际上是通过自相关函数及其傅里叶变换的计算来进行的(参阅[8],图5).

在微尺度时,分子结构的研究是通过X射线衍射图形的研究来完成的.其分析也是以傅里叶方法为基础的.在理论方面,量子力学的基本概念即波粒二象性可利用傅里叶积分得到最好的理解.

(2) 湍流,一个不完全成功的图景.

像上述类型的完全成功是稀少的,在许多情况下,成功只是部分的.

现在来考察湍流的问题.傅里叶分析是这一理论的一个必需的部分,事实上提供了这课题的基本语言,但在其他方面还有实质性的困难.湍流基本上是一种非线性的随机过程,其中耗散效应起着随机过程的最大作用.现在还没有关于湍流的数学理论,虽然几十年来已经有许多人为此付出了巨大的劳动.

即使是在单一流体运动的情况下,可以用已经确立的一组偏微分方程(纳维埃-斯托克斯方程)来支配它,但不能靠严格的数学理论提供多少帮助.方程是拟线性的.这一组偏微分方程的存在理论,只是在雷诺数值很小时才成立,

所谓雷诺数是这个问题的一个特征无维参数. 而要研究湍流理论, 就必须考察雷诺数极大时的流体运动.

在局限性更大的流体动力学稳定性问题中, 因为可取首次近似将方程变成线性, 严格的数学理论就显得更为有用. 由于解物理问题的需要, 已促成了一些很有趣的新数学进展.

(3) 数值分析, 一个包含了默许的例子.

在需要进行大规模的数值计算, 而又缺乏数学定理来保证这种过程的收敛性时, 处理非线性偏微分方程的困难表现得更明显. 可举有关流体动力学问题的数值解和数值天气预报的大量工作为例. 应用数学家对包含默许的手段是很在行的, 因为有各种不同的方法可以保证这种过程的正确性能够有说得通的理由.

(4) 等离子体物理学和星体动力学, 一个相互支持但并没有坚实数学基础的例子.

等离子体保持问题仍然是一个没有解决的问题. 我知道还没有什么新的数学定理对这门科学有重大的贡献. 大部分的理论进展还都是在应用数学的风格下做出的. 事实上, 一些目前正在做的探索性计算中, 所用的程序会使理论流体动力学感到十分烦恼. 这种理论分析的证实在很大程度上依赖实验证明. 除了极少数例子外, 大部分必需的实验还有待去做.

但是同时, 这些理论计算却能从遥远的地方得到间接支持. 从对银河系中旋臂结构的研究引导出了星系中聚焦模式的研究, 这种模式实质上具有等离子体状态的性质. 通过这些模式对星球形成的作用, 对这些模式进行了观察. 在这些情况下, 分析确是很仔细地做出了, 可是在等离子体物理学中, 甚至经同样仔细计算的模式也还没有被观察到.

我提到这一例子, 是为了强调类比推理在应用数学家工作中的重要性. 虽然对银河系的研究并没有包含电磁等离子体范围内的逻辑演绎, 但我们却可以从中获得对于等离子体物理学理解的信心和洞察力.

(5) 跨声速流, 一个数学与科学配合不当的例子.

当开始设计以亚声速飞行的飞机时, 有个局部超声速流区域存在的问题变得重要了. 人们关心着震动可能会发展到影响边界层的情况, 从而产生严重增大的阻力. 但是后来才明白, 如果采取合理而巧妙的措施来避免强的震动, 就可以克服阻力剧增的问题.

与此同时, 上述问题推动了一项数学研究, 即获得椭圆和双曲线混合型(在过渡线上是抛物线形) 偏微分方程光滑解的可能性. 这本身是一项很有趣的数学成果, 但它对于实际问题的价值有限. 因为要保证光滑流, 所必需的严格数学条件将排斥很弱的震动, 但在实际问题中, 弱震动的发生并没有多大影响.

我举这个例子是为了提醒我的同事们：在找出数学问题解的真实性质和内容之前，不要对科学家和工程师们提出的问题花费过多的精力。在本例中，花费的工夫还不是没有结果的，因为数学问题本身有意义，但在其他情况下，几乎可能会一无所得。

六、作为独立学科的应用数学

本书的中心点，就是希望成立一个健全的应用数学家团体，并加强对于应用数学教育和研究工作的支持，特别是对学术活动的支持。如果不是经常不断地培养出高级应用数学家，就不能期望应用数学发挥重要作用。只靠纯粹数学家把一小部分精力花在教育应用数学上是远远不够的。只有理论的科学家而他们对用在其他科学中的数学方法缺乏了解，这同样是不够的。必须训练出具备在可应用的数学方面的丰富知识，并广泛接触过数学的应用的应用数学家。

我想，现在是应该承认应用数学是一门独立的，并且是与纯粹数学大不相同的学科的时候了。

纯粹数学和应用数学在风格上有很大的区别。上面举的一些例子清楚地表明了纯粹数学家和应用数学家在方法上的区别，但是需要将应用数学家培养得具有本书中所描述的广博的气质，这是普遍被忽视的。

有人会问：采用这种广博的手段究竟是否现实？根据我们自己对这一问题的研究，回答是无条件的“是”。我最近读了一些关于生态学、数学人口论、经济学、组合分析等方面的论文和书籍。我看到人们用着同样的数值分析方法和同样的计算机。

七、应用数学家的培养

我们怎样才能安排好应用数学的教学计划来完成上述各节所提出的目标呢？

首先，应用数学的教学必须从本科生年级，即在青年的性格形成时期开始。如果一个人已经形成了一种态度，认为证明代数学中一个漂亮的定理较之用数学方法去解释大气中或银河系中观察到的现象要更有价值得多（或者认为后者是“别人的事”），那就很难使他的信念转变成另一种类型。如果一个人迫切地想用他的数学才能去阐明高能物理中的一个论点，他对于钻研生物学或经济学中的问题可能就不会同样热心。

因此教材（或应用数学学生的主要知识内容）的基础，必须是综述所有各种科学中以往数学的令人印象深刻的典型成就。必须采用实例研究法。同时还