# 量子关联的动力学性质

Liangzi Guanlian De Donglixue Xingzhi

仇 亮 石礼伟 寻之朋 著

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

# 量子关联的动力学性质

仇　亮　石礼伟　寻之朋　著

中国矿业大学出版社

## 内 容 提 要

本书介绍了量子纠缠、非局域性和非纠缠的量子关联的动力学性质及其在量子信息处理任务中的应用，发现了诸如突然死亡、突然复生等有趣的物理现象，讨论了利用量子关联标识量子相变点，定义了多体纠缠度量，也考察了量子关联在量子信息处理任务中的资源性作用，为探究量子关联的本质奠定了基础，也为在量子信息处理任务中应用量子关联进行了有益的探索。

本书可以作为量子信息等相关专业方向的研究生教材，也可供研究量子信息科学的教师和科研人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

量子关联的动力学性质/仇亮，石礼伟，寻之朋著. —徐州：中国矿业大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5646-2823-9

Ⅰ.①量… Ⅱ.①仇…②石…③寻… Ⅲ.①量子力学—研究 Ⅳ.①O413.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第214007号

**书　　名** 量子关联的动力学性质
**著　　者** 仇　亮　石礼伟　寻之朋
**责任编辑** 张　岩　郭　玉
**出版发行** 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
**营销热线** (0516)83885307　83884995
**出版服务** (0516)83885767　83884920
**网　　址** http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
**印　　刷** 江苏徐州新华印刷厂
**开　　本** 850×1168　1/32　**印张** 8.625　**字数** 224千字
**版次印次** 2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
**定　　价** 36.00元

# 前　言

量子信息科学是结合电子信息科学、计算机科学和量子物理学等而形成的一门崭新的交叉性学科。它是在近 30 年，由以 R. Feymann, D. Deustsch 和 C. H. Bennett 等为代表的科学家逐步建立和发展起来的。量子信息科学以量子态作为信息的载体，充分利用量子力学的基本原理和基本概念，用不同于经典的方式进行着信息的传输和处理，因此，量子信息科学具有经典信息科学所不具备的、无可比拟的强大威力。量子信息科学在国内的发展真可谓如火如荼，“京沪干线”量子通信工程正在积极建设，“量子科学实验卫星”将于 2016 年发射。量子纠缠、非局域性和非纠缠的量子关联特性是量子物理区别于经典物理最奇特、最不可思议的特征之一。独特的量子关联特性为量子力学挑战局域实在论提供了强有力的支持。同时它也是量子信息科学赖以生存的基础，是很多量子计算和量子信息处理不可或缺的前提。目前出版的量子信息科学方面的丛书比较多，但专门研究量子关联的动力学性质的系列参考资料比较少。作者本人一直从事量子关联的动力学性质的研究，拟通过本书的出版为相关专业方向的研究生和科研人员提供有参考价值的资料。

本书内容共有 6 章。第 1 章介绍量子纠缠、非局域性和非纠缠量子关联的定义和度量，也引入了隐形传态、密集编码和量子远

程操作等几个著名的量子信息处理任务，为量子关联的研究奠定基础。第2章针对具体的模型考察了量子纠缠和非局域性的动力学性质，着重探索影响量子纠缠和非局域性演化性质的因素，并给出纠缠和非局域性突然死亡现象发生的物理原因。第3章研究了基于纠缠的量子信息处理任务，对其中的某些任务探讨了在腔电动力学系统中的实验实现方案。第4章考察了两体系统非纠缠的量子关联的动力学性质，分别考察了内部无相互作用、内部有相互作用的系统的量子关联的演化，并将它和纠缠以及非局域性的动力学性质作对比，分析它们演化性质的异同。第5章在第4章的基础之上，将研究内容向多体系统推广，研究了多体系统量子关联的动力学性质，定义了两个多体量子关联度，并将多体量子关联和纠缠联系起来。第6章讨论了非纠缠的量子关联在量子信息处理任务中的应用，揭示出量子关联不仅仅是个物理概念，而且在量子信息处理任务中扮演着量子资源的角色。

本书内容从量子信息领域研究较多、较透彻的量子纠缠出发，引入两体系统非纠缠的量子关联，并将其推广到多体或高维系统，更进一步探讨了量子关联在标识量子相变点方面的功用和量子信息处理任务中量子关联的应用。可以说，本书的内容将量子信息科学中有关量子资源的内容有机地整合在一起，为进行相关方向研究的研究者提供了必要的信息和参考。

在作者完成前期工作和本书的撰写过程中，王安民教授等给予了悉心的指导和帮助。感谢刘志硕士、张哲硕士和陈祎力硕士，他们完成了部分文字的录入工作并提出了自己的宝贵意见。在本书的出版过程中，得到了中国矿业大学出版社编辑的大力支持和

帮助，作者在这里表示衷心的感谢。本书的出版得到了国家自然科学基金委基金项目61401465和江苏省基础研究计划（自然科学基金）项目BK2014014的资助。

量子信息科学领域的发展日新月异，同时作者本人知识水平有限，书中难免有不全面或是不恰当的地方，恳请本领域的专家和学者批评指正，作者将努力改进，在此一并表示感谢。

**著　者**
2015年1月

# 目　录

1　量子关联概述 …… 1
1.1　量子纠缠的定义、性质和度量 …… 2
1.2　EPR 佯谬和 Bell 不等式 …… 9
1.3　非纠缠的量子关联 …… 13
1.4　常见的量子信息处理任务 …… 18
1.5　本章小结 …… 25
参考文献 …… 25

2　纠缠和非局域性的动力学性质 …… 33
2.1　两原子之间的纠缠演化 …… 33
2.2　三粒子 Bell 不等式违背的突然不成立 …… 47
2.3　Milburn 内在退相干对两 qutrit 纠缠的影响 …… 57
2.4　纠缠和非局域性在系统和环境之间的转移 …… 64
2.5　本章小结 …… 75
参考文献 …… 76

3　基于纠缠的量子信息处理任务 …… 83
3.1　纠缠传递 …… 83
3.2　热纠缠态进行最优的密集编码 …… 95
3.3　基于五量子比特纠缠态的量子信息处理任务 …… 105
3.4　两量子比特远程操作 …… 126

3.5 本章小结 …… 133
参考文献 …… 134

4 两体系统量子关联的动力学性质 …… 146
4.1 自旋链环境中系统量子关联的动力学性质 …… 146
4.2 去极化环境中系统量子失协的突变 …… 166
4.3 有限温度环境中系统的量子关联 …… 174
4.4 内在退相干环境中系统量子关联的动力学性质 …… 184
4.5 系统的热关联 …… 194
4.6 耗散环境中相互作用系统的量子关联动力学 …… 205
4.7 本章小结 …… 213
参考文献 …… 214

5 多体量子关联的动力学性质 …… 223
5.1 基于测量导致的扰动定义多体量子关联度 …… 223
5.2 三体量子失协 …… 236
5.3 本章小结 …… 246
参考文献 …… 246

6 非纠缠量子关联的应用 …… 252
6.1 量子失协和密集编码 …… 252
6.2 测量导致的非局域性和隐形传态 …… 257
6.3 本章小结 …… 265
参考文献 …… 266

# 1　量子关联概述

薛定谔于 1935 年首次将量子纠缠的概念引入量子力学，并认为其为“量子力学的精髓”。研究者通过不断的探索，发现量子纠缠是一种奇特而又十分复杂的纯量子现象，反映了量子理论的本质——相干性、或然性和空间非定域性，并且在蓬勃发展着的量子信息科学中有着广泛的应用。量子纠缠的研究，早期曾停留在思辨的层次上，但自 1964 年 Bell 提出 Bell 定理后情况发生了根本改变，研究者能够通过实验来验证量子理论与局域性隐变量理论的预言，从而科学地揭示了量子纠缠的本质，有力地支持了量子力学的几率解释，为量子纠缠在理论上正名，进一步促使研究者去研究量子纠缠，并把它应用到信息科学和计算机科学中去。量子纠缠在量子信息科学中担当了不可或缺的角色。量子纠缠的研究方向很多，诸如：量子纠缠的本质、度量等基本问题，量子纠缠在量子信息处理任务中的应用，以及退相干影响下量子纠缠的动力学演化等。

从十多年前开始，随着量子信息科学的诸多进展，研究者认识到量子关联比量子纠缠更为广泛和基础；除了量子纠缠作为一种特殊的量子关联以外，研究者进一步发现即使是可分的量子态中也含有非经典关联，即在没有量子纠缠的情况下，量子关联依然可能存在。另外，在分析量子理论中的信息度量时，研究者发现量子纠缠并不能刻画量子系统中的所有量子关联，某些非纠缠（可分）态也包含关联，甚至是非经典的关联。这些非经典的关联最初用量子失协(quantum discord)来度量。

量子失协一经提出立刻引起了广泛的关注。研究者发现几乎所有的量子态都含有量子失协，并研究了不同物理体系中的量子失协，包括自旋链、原子系统、光子系统、量子点以及核磁共振(NMR)系统等。最近量子失协的概念还从分离体系推广到连续高斯态体系。此外，研究者又提出很多不同的刻画量子关联的量，如测量诱导的扰动、几何量子失协和迹范数几何量子失协(trace-norm geometric quantum discord)等。量子关联在一些基本的物理问题中也起着重要的作用，如麦克斯韦妖、量子相变等；研究者甚至开始研究具有相对论效应的量子失协。同时，研究者也考虑将量子关联应用到量子信息科学的许多方案和任务中，量子关联已经成为诸多量子信息处理任务中必备的资源。

本章简单介绍了量子纠缠、非局域性和量子失协等量子关联概念；同时也将介绍隐形传态、密集编码和量子远程操作等常见的量子信息处理方案。

## 1.1 量子纠缠的定义、性质和度量

量子纠缠指的是两个或多个量子系统之间的非定域、非经典关联。量子纠缠既是区分经典物理和量子物理的有力工具，又在量子信息科学中有着广泛的应用，因此研究量子纠缠的定义、性质和度量非常必要。在本节中，介绍量子纠缠的定义、性质和几个重要的纠缠度量。

### 1.1.1 纠缠纯态和纠缠混态

量子态可分为纯态和混态。用密度矩阵语言表述时，一个量子态可记为

$$\rho = \sum_i p_i \mid \psi_i \rangle \langle \psi_i \mid, \tag{1-1}$$

其中 $p_i \geqslant 0$，$|\psi_i\rangle$代表系综中第 $i$ 个系统的状态。$\rho$ 称为密度

矩阵，它满足 $\rho^{\dagger}=\rho$、$\mathrm{tr}\,\rho=1$ 且 $\rho$ 是正定算子等性质。密度矩阵 $\rho$ 被用来表示量子系综 $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ 的状态。当系综中所有量子系统处于某一确定 $|\psi\rangle$ 时，称为纯态的系综。显然纯态就是指量子系统处于精确已知状态，此时 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$。反之，当系综中量子系统处于不同纯态时，即系综中某个（或某些）系统处于某个态 $|\psi_i\rangle$，而其他系统处在其他态时，称 $\rho$ 处于混合态。纯态和混合态的一个简单判据是：纯态满足 $\mathrm{tr}(\rho^2)=1$，而混合态满足 $\mathrm{tr}(\rho^2)<1$；纯态和混合态的另一个判据是：纯态满足 $\rho^2=\rho$，而对混合态则有 $\rho^2\neq\rho$。

纠缠态是一类特殊的量子态。其中，纠缠纯态是指在任何表象下复合系统的量子态都不能写成各个子系统波函数的直积形式。用密度矩阵的语言可以描述成：对由 $n$ 个子系统构成的量子系统，即整体的 Hilbert 空间 $H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H$，如果存在 $|\psi_1\rangle\in H_1$、$|\psi_2\rangle\in H_2$、…、$|\psi_n\rangle\in H_n$，使得 $\rho=\rho_1\otimes\rho_2\otimes\cdots\rho_n=|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\otimes|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\otimes\cdots\otimes|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$，称纯态 $\rho$ 为直积态或者非纠缠态，否则称 $\rho$ 为纠缠态。

纠缠混态的定义在 1989 年由 Werner[1] 给出，它目前已被量子信息科学领域的研究者普遍接受和使用。所谓的 $m$ 方（指含有 $m$ 个子系统）纠缠混态是指混态密度矩阵不能被写成如下的分解形式

$$\rho=\sum_i p_i\rho_1^i\otimes\rho_2^i\otimes\cdots\otimes\rho_m^i \tag{1-2}$$

其中 $p_i>0$、$\sum_i p_i=1$。式(1-2)给出的表达式也是 Werner 定义的经典关联态，多数文献中通常也将它称为可分离态。

上述纠缠混态的定义尚有存疑，在文献[2]中有详细的讨论。

有了纠缠态的定义，那么另外一个问题就出来了：怎样判断一个量子态是否纠缠以及纠缠的程度？这两个问题分别对应着可分性判据和纠缠度量。

### 1.1.2 可分性判据

可分性判据要解决的是这样一个问题：给定任意一个量子态 $\rho$，如何判断它是否可分离或是否存在纠缠。可分性判据是量子纠缠研究的一个重要方面，但从数学上讲，可分性判据的研究是一个很困难的问题，不过研究者还是取得了一些可喜的成果。虽然 Bell 不等式最初并不是为了研究可分性而得到的，但 Werner 曾从 Bell 不等式出发得到了可分性的第一个必要性条件[1]，即可分态应该满足所有可能的 Bell 不等式。其他几个重要的可分性判据简介如下：

#### 1.1.2.1 Peres 判据

Peres 于 1996 年提出了两子系统可分性的必要条件：两子系统中任一子系统做部分转置后得到的矩阵是半正定的[3]。

部分转置的定义是：对一个由两子系统复合而成的系统的密度矩阵 $\rho$，作部分转置后，其密度矩阵元的变换为

$$\rho_{m\mu,n\nu} \Rightarrow \sigma_{n\mu,m\nu} \tag{1-3}$$

其中 $\rho_{m\mu,n\nu}=\langle i_m \otimes j_\mu | \rho | i_n \otimes j_\nu \rangle$，$\sigma_{n\mu,m\nu}$ 的表达式类似，$|i_m\rangle$、$|j_\mu\rangle$ 分别是两个子系统的正交归一化基矢。

当 $\rho$ 为可分态时，对两子系统中任一子系统作部分转置后的矩阵仍然是密度矩阵。随后，Horodecki 等用正定算子的数学方法证明了当子系统密度矩阵是 $2\times2$、$2\times3$ 维时，此判据是充分必要的[4]。也就是说，由 $2\times2$ 维或 $2\times3$ 维子系统复合而成的系统量子态 $\rho$ 可分当且仅当其部分转置仍是密度矩阵。

#### 1.1.2.2 约化判据

约化判据是在 1999 年由 Horodecki 等人提出的[4]：如果量子态 $\rho$ 可分，则

$$\rho_A \otimes I - \rho \geqslant 0 \tag{1-4}$$

$$\rho - I \otimes \rho_B \geqslant 0 \tag{1-5}$$

对于子系统是 $2\times2$、$2\times3$ 维的情形，Peres 判据与约化判据等价；而对子系统是高维的情形，Peres 判据比约化判据强。所谓 Peres 判据比约化判据强，指的是存在一些量子态能用 Peres 判据去识别而不能用约化判据去识别。

1.1.2.3 控制判据

控制判据是 Nielsen 和 Kempe 在 2001 年基于控制这个数学工具提出的[5]。首先来介绍控制的概念，假设两个 $n$ 维实矢量 $x^{\downarrow}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$、$y^{\downarrow}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的各个分量分别满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$、$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$，如果当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时有关系式

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{j=1}^{k} y_j \tag{1-6}$$

成立；且当 $k=n$ 时上式等号成立，则称 $x<y$，读作"$x$ 被 $y$ 控制"，表示 $x$ 比 $y$ 更混乱。

如果将密度矩阵 $\rho$ 的本征值按从大到小的顺序排列而成的矢量为 $\lambda(\rho)$，Nielsen 等给出了控制判据[5]：如果 $\rho_{AB}$ 为可分态，那么

$$\lambda(\rho_{AB})<\lambda(\rho_A),\lambda(\rho_{AB})<\lambda(\rho_B) \tag{1-7}$$

其中 $\lambda(\rho_A)$、$\lambda(\rho_B)$ 分别是约化密度矩阵 $\rho_A$、$\rho_B$ 的本征值按从大到小排列而形成的矢量。当矢量 $\lambda(\rho_A)$、$\lambda(\rho_B)$ 的维数不够时，可添加 0 使得它们的维数与 $\lambda(\rho_{AB})$ 相同。虽然约化判据与控制判据极为相似，但确实存在量子态满足控制判据而不满足约化判据。在子系统为 $2\times2$、$2\times3$ 维的情形下，满足约化判据的量子态一定满足控制判据[6]。

可分的必要性判据还有一些，如可以识别束缚纠缠态的重排判据[7,8]，包含 Peres 判据、重排判据为特例的推广的部分转置(GPT)判据[9]，包含 GPT 判据为特例的推广的约化判据[10]等判据。近来研究者还探索了可分的充分必要性判据并取得了可喜的结论[11-14]。

### 1.1.3 纠缠度量

在判定了一个量子态是纠缠态以后，紧接着的一个问题是如何表示纠缠的程度，为此研究者引入了纠缠度的概念。根据考虑问题角度的不同，纠缠度定义的形式不同，然而不论如何定义，作为量子纠缠的定量描述，都应当满足下列条件[15,16]：

(1) 在局域幺正变换下纠缠不变，这是最重要的一条准则，至今仍然在定义纠缠度中起着重要的作用。Vedral 等人首先提出纠缠度的定义需要满足一定的准则，并且认为纠缠度就是满足单调性准则以及其他一些准则的函数[17]。随后，Vidal 等人提出单调性是纠缠度需要满足的唯一准则，其他的准则要么能够从这一基本准则推导得出，或者不是对每个纠缠度都必需的而只是针对特定的纠缠度而言的[18]。单调性准则的数学表达式是，对于任意的属于局域操作和经典通信(LOCC)的操作 $\Lambda$，要求

$$E(\Lambda(\rho)) \leqslant E(\rho) \tag{1-8}$$

$\Lambda$ 的数学表示通常可以写成可分操作形式，即 $\Lambda(\rho)=\sum_i(A_i \otimes B_i)\rho(A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger)$[17,19]，这种数学表示可以很容易地推广到多体系统。需要指出的，任意 LOCC 操作可以写成可分操作形式，反之能写成可分操作形式的不一定都是 LOCC 操作。

关于单调性准则，一个易于理解的例子就是，在双方的 LOCC 操作下，四个 Bell 态之间可以相互转换，但是它们的纠缠却是相等的。

目前已知的纠缠度通常都满足一个更强的准则：它们的平均值是不增的，也就是 $\sum_i p_i E(\sigma_i) \leqslant E(\rho)$，其中 $\{p_i, \sigma_i\}$ 是通过 LOCC 操作从量子态 $\rho$ 得到的系综。这个准则最初被认为是纠缠度必须满足的，现在发现单调性准则才是纠缠度必须满足的；但是平均值不增对很多纠缠度来说是易于证明的。

(2) 可分态的纠缠为零，对于可分态，任意纠缠度给出的纠缠

值都应该为 0。这个准则可以说明如下，如果一个纠缠度满足单调性准则，那么对于可分态它的值应该为一常数。而一个可分态可以通过 LOCC 操作转变成任意其他可分态，所以对于可分态，任意纠缠度给出的值必须是最小的。由此，就能得到可分态纠缠为 0 这一更为基本的准则。与可分态的纠缠为零相对应的是，两个 $d$ 维子系统形成的最大纠缠态的纠缠为 $k\log_2 d$。

(3) 对于量子态 $\rho$ 的 $n$ 份相同的拷贝，其包含的纠缠应该为单份拷贝所包含纠缠的 $n$ 倍；而对两个不同的量子态 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的直积态，其所包含的纠缠不应该大于两个态各自纠缠之和：$E(\rho_1\otimes\rho_2)\leqslant E(\rho_1)+E(\rho_2)$。

(4) 此外，纠缠度还应该是凸函数：$E(\lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2)\leqslant\lambda E(\rho_1)+(1-\lambda)E(\rho_2)$。

纠缠纯态的度量相对来说较为简单，例如对两方纯态，可以用约化熵和 Schmidt 数来度量。对于混态，情况比较复杂，除了两方混态的纠缠度得到解决之外，多方混态的纠缠度仍在解决之中。这里介绍几个常用的纠缠度。

1.1.3.1 结构纠缠度

对密度矩阵的任一分解 $\{p_i,|\psi_i\rangle\}$，即 $\rho=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$，结构纠缠 $E_F$ 定义为[20]

$$E_F=\min_{\{p_i,|\psi_i\rangle\}}\sum_i p_i S(|\psi_i\rangle) \tag{1-9}$$

其中 $S$ 是单方约化密度矩阵的冯·诺依曼(von Neumann)熵。从式中可以看出，对 $\rho$ 的所有可能的纯态分解的冯·诺依曼熵的平均值求极小值就是结构纠缠度。显然对于纯态，结构纠缠和冯·诺依曼熵相等。

对任意维的两方纠缠态计算结构纠缠不是一件简单的事，但是当两个子系统均是 2 维时，研究者已经给出了结构纠缠便于计算的解析形式[21,22]

$$E_F(\rho_{AB}) = H\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho_{AB})}}{2}\right) \tag{1-10}$$

其中的 $C$ 函数就是普遍使用的两量子比特系统纠缠度——并协度(concurrence),其表达式为 $C(\rho_{AB})=\max\{0,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\}$,这里的 $\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$、$\lambda_4$ 是算符 $\rho(\sigma^y\otimes\sigma^y)\rho^*(\sigma^y\otimes\sigma^y)$ 的本征值的平方根降序排列,* 表示取复共轭。而函数 $H$ 的定义是

$$H(p) = -p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p) \tag{1-11}$$

1.1.3.2 负性纠缠度

负性纠缠(Negativity)[20-22]是另外一个可操作性和可计算性较好、且能够应用于混态的量子纠缠度。负性纠缠作为量子纠缠度是 Zyczkowski 在 1998 年根据部分转置判据引入的[23,24],而真正命名为负性纠缠则是 Vidal 和 Werner 的贡献[25]。对密度矩阵 $\rho$,其负性纠缠表达式为

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{T_i}\|-1}{2} \tag{1-12}$$

负性纠缠其实就是密度矩阵部分转置后的负本征值的绝对值之和。$\rho^{T_i}$ 表示对密度矩阵 $\rho$ 的第 $i$ 部分作转置,而 $\|\rho^{T_i}\|$ 表示部分转置矩阵 $\rho^{T_i}$ 的本征值的绝对值之和。负性纠缠可以用来考查多方量子态的任何两部分的纠缠性质[26,27],但其作为纠缠度有着局限性:它是基于只对 2×2 维和 2×3 维子系统才充分必要的部分转置判据而得到的。但由于其具有很多纠缠度不具备的良好的可计算性和可操作性,因此受到了广泛的关注[28]。

在本书中,并协度被用来度量由 2×2 维子系统复合而成的体系的纠缠,负性纠缠被用来度量 2×2 维、2×3 维或 3×3 维体系的纠缠。后面用到这两个纠缠度时,不再赘述它们的定义。

1.1.3.3 相对熵纠缠度

对于量子态 $\rho$,相对熵纠缠度[17]定义为

$$E_r(\rho) = \min_{\sigma\in \mathrm{Sep}} S(\rho\|\sigma) \tag{1-13}$$

也就是量子态 $\rho$ 对于全体可分离态的相对熵的最小值。其中相对熵定义为

$$S(\rho \| \sigma) = \mathrm{tr}[\rho(\log_2\rho - \log_2\sigma)], \tag{1-14}$$

而 Sep 表示全体可分离态的集合。相对熵纠缠度可以理解为 $\rho$ 和最近的可分离态 $\sigma$ 之间的距离。从定义可以看出，它常常难于计算，因为涉及对量子态空间的遍历问题。

#### 1.1.3.4 蒸馏纠缠

如果有 $N$ 份两体量子态 $\rho$ 为 Alice 和 Bob 共享，那么蒸馏纠缠度[20]的定义可以用 Alice 和 Bob 通过 LOCC 能得到的两体最大纠缠态的个数 $k(N)$ 与 $N$ 的关系来确定

$$D(\rho) = \lim_{N\to\infty}\frac{k(N)}{N} \tag{1-15}$$

根据 LOCC 中经典信息的传递方式，将蒸馏纠缠进一步分为双向蒸馏纠缠 $E_{\mathrm{D}}$、单向蒸馏纠缠 $E_{\mathrm{D}_0}$ 和无经典信息传递的蒸馏纠缠 $E_{\mathrm{D}_1}$，它们满足下列关系[29]：① 对于纯态，$E_{\mathrm{D}} = E_{\mathrm{D}_1}$，且等于冯·诺依曼熵；② $E_{\mathrm{D}_0} \leqslant E_{\mathrm{D}_1} \leqslant E_{\mathrm{D}} \leqslant E_{\mathrm{F}}$。蒸馏纠缠很容易理解，物理意义也很清晰，但是它也不具备可操作性和可计算性。

纠缠度还有很多，例如对数负纠缠度[25]、几何纠缠度[30,31]等，这里不再详细介绍。然而，它们都在可计算性、物理意义等各方面有着各种各样的缺陷，研究者仍然在寻找更好的纠缠度。

## 1.2 EPR 佯谬和 Bell 不等式

量子纠缠和非定域性是量子信息科学中的两个核心问题。自从 1935 年 Einstein、Podolsky 和 Rosen 等人发表那篇著名的文章以来[32]，引起了研究者极大的兴趣，直到今天仍然是量子信息领域的研究热点之一。在本节中，介绍 EPR 佯谬和 Bell 不等式。