



信息与通信技术

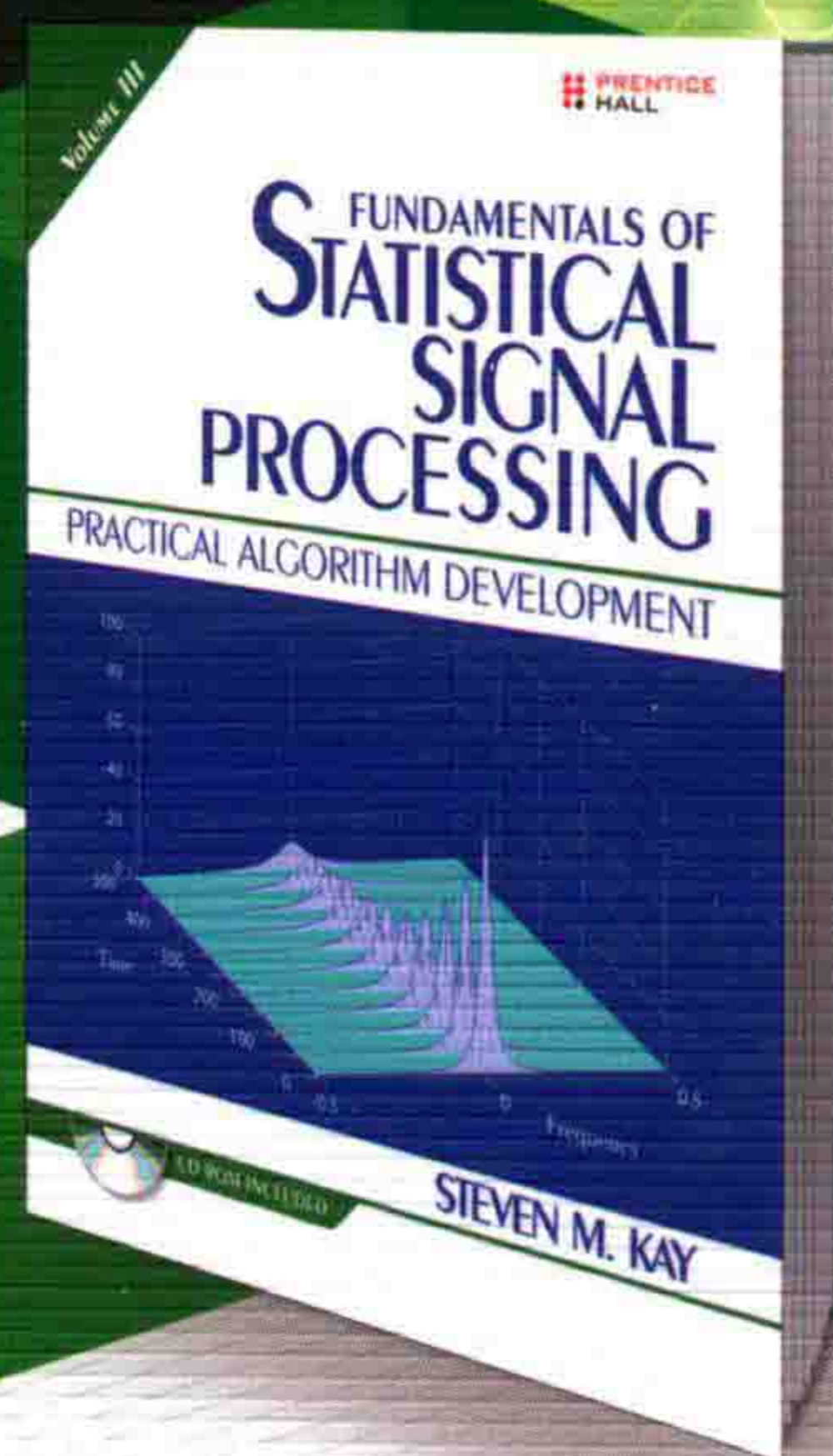
# 统计信号处理基础 ——实用算法开发（卷III）

## Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III Practical Algorithm Development

【美】 Steven M. Kay 著

罗鹏飞 张文明 韩 韬 译

Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical Algorithm Development



# 统计信号处理基础

## ——实用算法开发(卷III)

Fundamentals of Statistical Signal Processing

Volume III: Practical Algorithm Development

[美] Steven M. Kay 著

罗鹏飞 张文明 韩 韬 译

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书是作者 Steven M. Kay 关于统计信号处理三卷书中的最后一卷，该卷建立了覆盖前两卷的综合性理论，在设计解决实际问题的优良算法方面帮助读者开发直观和专业的方法。本书首先评述开发信号处理算法的方法，包括数学建模、计算机模拟、性能评估。通过展示设计、评估、测试的有用解析结果和实现，将理论与实践联系起来。然后从几个关键的应用领域重点介绍了一些经典的算法。最后引导读者将算法转换成 MATLAB 程序来验证得到的解。全书主题包括：算法设计方法；信号与噪声模型的比较和选择；性能评估、规范、折中、测试和资料；使用大定理的最佳方法；估计、检测和谱估计算法；完整的案例研究：雷达多普勒中心频率估计、磁信号检测、心率监测等。

本书可以作为电子信息类相关专业研究生的统计信号处理课程的教材或教学参考书，也可供从事信号处理的教学、科研和工程技术人员参考。

Authorized translation from the English language edition, entitled *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical Algorithm Development*, 9780132808033 by Steven M. Kay, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2013 Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY Copyright © 2018.

本书中文简体字版专有出版权由 Pearson Education（培生教育出版集团）授予电子工业出版社。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书贴有 Pearson Education（培生教育出版集团）激光防伪标签，无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字：01-2013-4031

### 图书在版编目(CIP)数据

统计信号处理基础：实用算法开发. 卷III / (美)凯(Kay, S. M.)著；罗鹏飞等译.

北京：电子工业出版社，2018.2

(经典译丛·信息与通信技术)

书名原文：Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical Algorithm Development

ISBN 978-7-121-27607-1

I. ①统… II. ①凯… ②罗… III. ①统计信号—信号处理 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 277759 号

策划编辑：马 岚

责任编辑：冯小贝

印 刷：涿州市京南印刷厂

装 订：涿州市京南印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：787×1092 1/16 印张：20 字数：538 千字

版 次：2018 年 2 月第 1 版

印 次：2018 年 2 月第 1 次印刷

定 价：79.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn)，盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

本书咨询联系方式：[classic-series-info@phei.com.cn](mailto:classic-series-info@phei.com.cn)。

# 前 言<sup>①</sup>

《统计信号处理基础——实用算法开发》一书是同名系列教材的第三卷。前两卷描述了估计与检测算法涉及的理论，本卷将介绍如何将这些理论转换成数字计算机上实现的软件算法。在介绍实践方法和技术时，并没有假定读者已经学习过前两卷，当然我们还是鼓励大家这样做，我们的介绍将集中在一般概念上，尽可能少用数学知识，而用 MATLAB 的实现来进行详细的阐述。对于那些希望为实际系统设计好的和可实现的统计信号处理算法的工程师与科学工作者来说，本书毫无疑问是有吸引力的，这些实际系统在许多信号处理学科中常常会遇到，包括但不限于雷达、通信、声呐、生物医学、语音、光学、图像处理等。此外，由于强调实际的工作算法，对于那些希望得到一些实用技术的统计信号处理领域的研究者，本书提供的内容应该是有用的，而对那些涉足该领域的新手来说，要从大量良莠不齐的算法中挑选好的算法，本书也是很好的参考。

本书的总体目标是帮助读者提升统计信号处理的实践能力，为了完成这一目标，我们要努力做到：

1. 描述一套用来建立算法的方法，包括数学建模、计算机模拟、性能评估；
2. 通过典型工具的实践，允许读者深刻理解一些重要的概念，包括有用的分析结果和设计、评估和测试的 MATLAB 实现；
3. 强化一些实际中已有的方法和特定算法，这些算法已经经受了时间的检验；
4. 通过描述和求解现实生活中的实际问题来介绍相关的应用领域；
5. 给读者介绍实际中要求的扩展；
6. 将数学算法转换成 MATLAB 程序并验证解的完整性。

在教学方面，我们相信强调通过 MATLAB 实现有助于理解算法的实际工作情况及不同算法的细微差别，读者将在“做中学”。同样，教材中加入了許多供学生练习的分析练习题，完整的解答包含在每章的附录中，书中也给出了 MATLAB 练习题，每章的附录列出了简化的解答，所有答案及可运行的 MATLAB 程序都放在随书的光盘上<sup>②</sup>。在每章的结尾都有一节“小结”，其中给出的结论都是非常重要的，旨在提供算法内在运行的深入理解以及常用的拇指法则，这些内容对建立成功的算法都是关键的。本书的大部分主题来自 *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory* (1993) 和 *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory* (1998)，也从 *Modern Spectral Estimation: Theory and Application* (1988) 加入了许多材料，后一本书包含了许多数据模拟和分析所要求的技术。最后，我们希望本书对自学也是有用的。尽管没有 MATLAB 作为实践工具也是可以学习本书的，但却失去 MATLAB 实践所获得的许多理解。

① 中文翻译版中的一些字体、正斜体、符号等沿用了英文原版的写作风格。

② 光盘上的相关文件可登录华信教育资源网 ([www.hxedu.com.cn](http://www.hxedu.com.cn)) 注册下载，翻译版不再配有光盘。

本书假定读者具有微积分和基本线性系统的背景知识，包括某些数字信号处理、概率和随机过程导论、线性和矩阵代数等相关知识。正如前面提到的，我们在算法描述时尽量少用数学知识和相关背景材料，然而算法在最终总是以数学形式呈现的，因此这一目标也只是部分地实现。

作者要感谢许多人所做的贡献，在过去的许多年里，他们提供了许多教学和研究问题中富有启发的讨论以及应用研究结果的机会。感谢罗德岛大学的同事 L. Jackson、R. Kumaresan、L. Pakula 和 P. Swaszek；感谢我目前和以前的所有研究生，他们在平时教学和研究中的许多讨论以及他们具体的注释和评论，对本书最终的定稿都做出了贡献。特别是 Quan Ding 和 Naresh Vankayalapati，他们做了许多注释，并在练习的解答方面提供了许多帮助。此外，William Knight 对初稿也提供了许多有价值的反馈意见。作者还要感谢许多资助其研究的机构和项目主管，这些主管包括 Jon Davis、Darren Emge、James Kelly、Muralidhar Rangaswamy、Jon Sjogren 和 Peter Zulch，相关机构包括美国海军海底作战中心、海空作战中心、空军科研办公室、海军研究办公室、空军研究实验室、爱德华化学和生物中心。作者咨询了许多工业公司，从他们那里获得了许多实践经验，在此一并表示感谢。作者也非常欢迎读者提出疑问和修改意见，有任何疑问和建议请发邮件至 [kay@ele.uri.edu](mailto:kay@ele.uri.edu)。

Steven M. Kay  
University of Rhode Island  
Kingston, RI

# 目 录

## 第一部分 方法论与通用方法

第 1 章 引言	2
1.1 动机和目标	2
1.2 核心算法	3
1.3 容易的、难的和不可能的问题	3
1.4 增加成功的概率——提升直觉	8
1.5 应用领域	8
1.6 注意事项	9
1.6.1 信号类型	9
1.6.2 本书的特点和符号表示	9
1.7 小结	10
参考文献	10
附录 1A 练习解答	11
第 2 章 算法设计方法	13
2.1 引言	13
2.2 一般方法	13
2.3 信号处理算法设计实例	18
2.4 小结	29
参考文献	29
附录 2A 多普勒效应的推导	30
附录 2B 练习解答	31
第 3 章 信号的数学建模	33
3.1 引言	33
3.2 信号模型的分层(分类)	34
3.3 线性与非线性确定性信号模型	37
3.4 参数已知的确定性信号(类型 1)	38
3.4.1 正弦信号	38
3.4.2 阻尼指数信号	39
3.4.3 阻尼正弦信号	39
3.4.4 相位调制信号	39
3.4.5 多项式信号	40

3.4.6	周期信号	41
3.5	具有未知参数的确定性信号(类型 2)	42
3.5.1	一般考虑	42
3.5.2	多项式信号模型	42
3.5.3	周期信号模型	44
3.5.4	非线性和部分线性信号	47
3.6	具有已知 PDF 的随机信号(类型 3)	49
3.6.1	一般考虑	49
3.6.2	随机正弦模型——零均值	51
3.6.3	随机正弦模型——非零均值	51
3.6.4	贝叶斯线性模型	52
3.6.5	其他具有已知 PDF 的随机模型	53
3.7	PDF 具有未知参数的随机信号(类型 4)	53
3.8	小结	53
	参考文献	54
	附录 3A 练习解答	54
<b>第 4 章</b>	<b>噪声的数学建模</b>	<b>57</b>
4.1	引言	57
4.2	一般噪声模型	57
4.3	高斯白噪声	59
4.4	高斯色噪声	61
4.5	一般高斯噪声	66
4.6	IID 非高斯噪声	71
4.7	随机相位正弦噪声	74
4.8	小结	75
	参考文献	76
	附录 4A 随机过程的概念和公式	76
	附录 4B 高斯随机过程	78
	附录 4C AR PSD 的几何解释	79
	附录 4D 练习解答	80
<b>第 5 章</b>	<b>信号模型选择</b>	<b>84</b>
5.1	引言	84
5.2	信号建模	85
5.2.1	路图	85
5.3	示例	86
5.4	参数估计	89
5.5	模型阶数的选择	90
5.6	小结	94

参考文献	94
附录 5A 练习解答	94
<b>第 6 章 噪声模型选择</b>	<b>97</b>
6.1 引言	97
6.2 噪声建模	97
6.2.1 路图	97
6.3 示例	99
6.4 噪声特性的估计	105
6.4.1 均值	106
6.4.2 方差	106
6.4.3 协方差	107
6.4.4 自相关序列	108
6.4.5 均值向量和协方差矩阵	108
6.4.6 PDF	110
6.4.7 PSD	114
6.5 模型阶数的选择	116
6.6 小结	117
参考文献	118
附录 6A 置信区间	118
附录 6B 练习解答	120
<b>第 7 章 性能评估、测试与文档</b>	<b>124</b>
7.1 引言	124
7.2 为什么采用计算机模拟评估	124
7.3 统计意义下的性能度量指标	125
7.3.1 参数估计的性能度量指标	126
7.3.2 检测性能的性能度量指标	127
7.3.3 分类性能的性能度量指标	130
7.4 性能边界	133
7.5 精确与渐近性能	134
7.6 灵敏度	135
7.7 有效性能比较	136
7.8 性能/复杂性的折中	138
7.9 算法软件开发	138
7.10 算法文档	142
7.11 小结	142
参考文献	143
附录 7A 算法描述文档中包括的信息检查表	143
附录 7B 算法描述文档样本	145
附录 7C 练习解答	153



第 8 章 使用大定理的最佳方法 .....	155
8.1 引言 .....	155
8.2 大定理 .....	156
8.2.1 参数估计 .....	156
8.2.2 检测 .....	161
8.2.3 分类 .....	163
8.3 线性模型的最佳算法 .....	165
8.3.1 参数估计 .....	166
8.3.2 检测 .....	167
8.3.3 分类 .....	168
8.4 利用定理导出新结论 .....	169
8.5 实用最佳方法 .....	170
8.5.1 参数估计: 最大似然估计 .....	171
8.5.2 检测 .....	172
8.5.3 分类 .....	173
8.6 小结 .....	173
参考文献 .....	173
附录 8A 参数估计的一些分析 .....	174
8A.1 经典方法 .....	174
8A.2 贝叶斯方法 .....	176
附录 8B 练习解答 .....	177

## 第二部分 特定算法

第 9 章 估计算法 .....	182
9.1 引言 .....	182
9.2 信号信息的提取 .....	182
9.3 噪声/干扰时的信号增强 .....	199
参考文献 .....	206
附录 9A 练习解答 .....	207
第 10 章 检测算法 .....	209
10.1 引言 .....	209
10.2 已知信号形式(已知信号) .....	210
10.3 未知信号形式(随机信号) .....	215
10.4 未知信号参数(部分已知信号) .....	218
参考文献 .....	224
附录 10A 练习解答 .....	224
第 11 章 谱估计 .....	226
11.1 引言 .....	226

11.2	非参量(傅里叶)方法	227
11.3	参量(基于模型)谱分析	232
11.3.1	AR 模型阶数的估计	237
11.4	时变功率谱密度	238
	参考文献	238
	附录 11A 傅里叶谱分析及滤波	238
	附录 11B 补零及精度问题	240
	附录 11C 练习解答	241

### 第三部分 实例扩展

<b>第 12 章</b>	<b>复数据扩展</b>	244
12.1	引言	244
12.2	复信号	247
12.3	复噪声	247
12.3.1	复随机变量	247
12.3.2	复随机向量	248
12.3.3	复随机过程	249
12.4	复最小均方及线性模型	251
12.5	复数据的算法扩展	252
12.5.1	复数据的估计	252
12.5.2	复数据的检测	258
12.5.3	复数据的谱估计	261
12.6	其他扩展	263
12.7	小结	264
	参考文献	264
	附录 12A 练习解答	264

### 第四部分 真实应用

<b>第 13 章</b>	<b>案例研究——统计问题</b>	270
13.1	引言	270
13.2	估计问题——雷达多普勒中心频率	270
13.3	小结	277
	参考文献	278
	附录 13A AR 功率谱密度的 3 dB 带宽	278
	附录 13B 练习解答	279
<b>第 14 章</b>	<b>案例研究——检测问题</b>	280
14.1	引言	280

14.2 估计问题——磁信号检测 .....	280
14.3 小结 .....	290
参考文献 .....	291
附录 14A 练习解答 .....	291
<b>第 15 章 案例研究——谱估计问题 .....</b>	<b>292</b>
15.1 引言 .....	292
15.2 提取肌肉噪声 .....	294
15.3 肌肉噪声的谱分析 .....	296
15.4 改善 ECG 波形 .....	297
15.5 小结 .....	299
参考文献 .....	299
附录 15A 练习解答 .....	299
附录 A 符号和缩写术语表 .....	301
附录 B MATLAB 简要介绍 .....	305
附录 C 随书光盘内容的描述 <sup>①</sup> .....	309

① 中文翻译版不再配有光盘，相关文件可登录华信教育资源网([www.hxedu.com.cn](http://www.hxedu.com.cn))注册下载。

# 第一部分 方法论与通用方法

第 1 章 引言

第 2 章 算法设计方法

第 3 章 信号的数学建模

第 4 章 噪声的数学建模

第 5 章 信号模型选择

第 6 章 噪声模型选择

第 7 章 性能评估、测试与文档

第 8 章 使用大定理的最佳方法

# 第1章 引言

## 1.1 动机和目标

在过去的40多年中，数字信号处理(Digital Signal Processing, DSP)的概念、方法、技术及在民用产品和军事系统中的应用得到了爆炸式的实际增长。一些致力于数字信号处理的基础刊物，如创刊于1974年的《IEEE 声学、语音及信号处理学报》(*IEEE Transaction on ASSP*)最初是双月刊，每期约100页。而在今天，专注于信号处理的《IEEE 信号处理学报》(*IEEE Transaction on Signal Processing*)则是月刊，每期约500页，在论文的数量上呈现了10倍的增长，这还没有考虑一些扩展出来的刊物，例如《IEEE 声学、语音及语言处理学报》(*IEEE Transaction on Audio, Speech, and Language Processing*)、《IEEE 图像处理学报》(*IEEE Transaction on Image Processing*)等。那些必须选择并实现一种方法的算法设计者现在不得不面对着许多可用算法。这些算法令人眼花缭乱，甚至从公开文献中找出一种期望的算法也是一项巨大的工作。因此，对于算法设计者来说，拥有一个他尝试过并信赖的算法库显得尤为重要。这些方法可能不能完全解决他所面临的问题，但至少为算法的开发提供了一个良好的开端。

除了积累一套可信的算法之外，关键的问题是理解这些算法是如何工作的，以及何时可能失效。DSP算法以及更特殊的统计信号处理算法从本质上来讲都是高度数学化和统计化的，并不能轻易地产生应用的秘诀。但当设计者实现这些算法并考察其性能时，他们的直觉与未来算法选择的成功息息相关，这种直觉只能从实践中获得。幸运的是，我们无须在硬件上实现算法才能评估它们的性能，软件实现很容易，并且允许进行性能的无损评估。MATLAB是一种流行的多功能软件，它是实现算法和评估性能的工具，它的应用允许我们“运行”提出的算法，提供一种软件上的“首次切割”实现。事实上，MATLAB的实现也常常带来DSP上或专用数字硬件上的实现。基于以上理由，我们将在本书中强调MATLAB的应用。

本书的内容是关于统计信号处理的算法。另一方面，那些数学形式完全已知且没有受到过多噪声影响的信号的处理，已经有很多标准的、十分可靠的技术存在。例如，典型的技术包括滤波器设计和傅里叶变换的计算(即快速傅里叶变换, FFT)。很多优秀的教材描述了这些算法以及它们的实现[Ingles and Proakis 2007, Lyons 2009]。而我们的目的是介绍可用来从随机数据中分析和提取信息的那些算法。例如，给定一些指标，如信号的频谱本质上是低频的信号，那么在做进一步处理之前，应当先通过低通数字滤波器进行滤波，这样的指标要求自然就需要根据一个预先设定的截止频率来进行数字滤波器设计。而对于一个中心频率未知的带通信号的滤波，其指标就会有些差别。第一种情况下，其指标是完备的；而在第二种情况下，需要确定如何调整好滤波器的中心频率让信号通过，从而尽可能地消除噪声。前者称为确定性信号的处理；而后者要求中心频率的估计，最好是在线估计，以便在信号中心频率变化时我们的算法仍能提供合适的带通滤波器。当信号的特性存在不确定性时，只有统计学的方法才能奏效。

随机数据分析的算法是针对一些特定问题的。也就是说，每一个实际的信号处理问题都

是独一无二的，需要特定的方法，尽管它们通常可以和许多其他问题联系起来。因为新的电子系统和产品的开发是无止境的，不可能使用一些现成的算法。令人欣慰的是，还是存在一组“核心”算法，它们位于大多数实际的信号处理系统的中心，这就是本书要介绍并用 MATLAB 实现的算法，下面我们对这些核心算法做一般性的讨论。

## 1.2 核心算法

信号处理问题要求信号的检测和信号参数的估计，这就存在一些统计的且被广泛接受的方法。例如，用于检测的匹配滤波器，用于参数估计的最大似然估计器及其实现、最小二乘估计等，我们重点关注的正是这些广泛接受的方法。在实际工作中，信号处理的算法设计者至少有一个好的起点来开始实际的设计，这是令人鼓舞的。许多核心的方法(除了一些高级的但还没有得到实践检验的方法)在 *Fundamentals of Statistical Signal Processing* [Kay 1993, Kay 1998] 的前两卷和 *Modern Spectral Estimation: Theory and Application* [Kay 1988] 中进行了详细的介绍，后一本书是关于谱分析的，对于随机信号的建模是十分重要的，该书还提供了有关随机信号的由计算机产生的许多有用算法。鼓励读者参考这些书，以便充分理解这些方法的理论基础。本书内容包括：

1. 介绍实际应用的重要算法；
2. 介绍这些算法得到成功应用的一些假设；
3. 介绍它们的性能和实际中的一些限制。

本书将完成上述目标而不参考上面提及的书籍。

## 1.3 容易的、难的和不可能的问题

由于我们的目标是介绍在实际中广泛使用的统计信号处理算法，或许会问，这些算法获得了这么高的荣耀值得我们去介绍吗？这有两方面的原因。第一是它们在“工作”，第二是它们可以方便地用数字软件/硬件来实现。一个算法在“工作”，它必须满足系统的性能指标。例如，可能是估计一个参数所要求的性能指标，估计器的性能应该是相对误差不大于 2.5%。因此，一个算法是否在“工作”并不取决于算法本身，如果提出的性能指标不合理，那么所提出的算法或者任何一种方法都不能“工作”。因此，评估满足性能要求的可行性则是重要的。对于后一个例子，常用的可行参数估计精度是克拉美-罗下限(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB) (参见 8.2.1 节)，它提供了无偏估计器(即估计器的均值等于真值)方差的下限。如果性能指标在理论上不能满足，那么做进一步的设计是毫无意义的。如果可能，或许我们需要更精确的传感器，或者更多的数据。给定一个信号模型和噪声模型(我们将在第 3~6 章做进一步的讨论)，信号处理有能力提供获取所有有用信息的可实现算法，我们希望这些信息足以产生期望的性能。然而，信号处理也不能做不可能的事情，尽管我们是多么想要这么去做。例如，假定希望估计一个恒定的离散时间信号  $s[n]$  的值  $A$ ，该值也称为 DC(直流)电平信号(假定是连续时间信号经 A/D 转换器采样而来)。这个信号为

$$s[n] = A \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

信号被淹没在功率为  $\sigma^2$  的零均值高斯白噪声(White Gaussian Noise, WGN)中(参见 4.3 节)。

那么,观测数据为  $x[n] = A + w[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ 。我们希望根据这些数据尽可能精确地确定  $A$  的值。众所周知,这样做的最佳方法是采用由样本均值给出的估计器

$$\hat{A}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

(字母上的“帽子”总是表示估计)。假定  $A = 10$ , 我们的指标要求是:对于  $N = 20$ 、 $\sigma^2 = 1$ , 按 2.5% 的最大相对误差, 估计值应当落在  $[A - 0.25, A + 0.25]$  内, 也就是  $[9.75, 10.25]$ 。计算机模拟结果如图 1.1 所示, 图中给出的是估计量  $\hat{A}_N$  与数据记录长度  $N$  之间的关系图<sup>①</sup>。由于对应的是  $N = 20$  时的指标, 因此结果看起来是满足的, 也就是当  $N = 20$  时, 估计值落在虚线 9.75 和 10.25 之间。

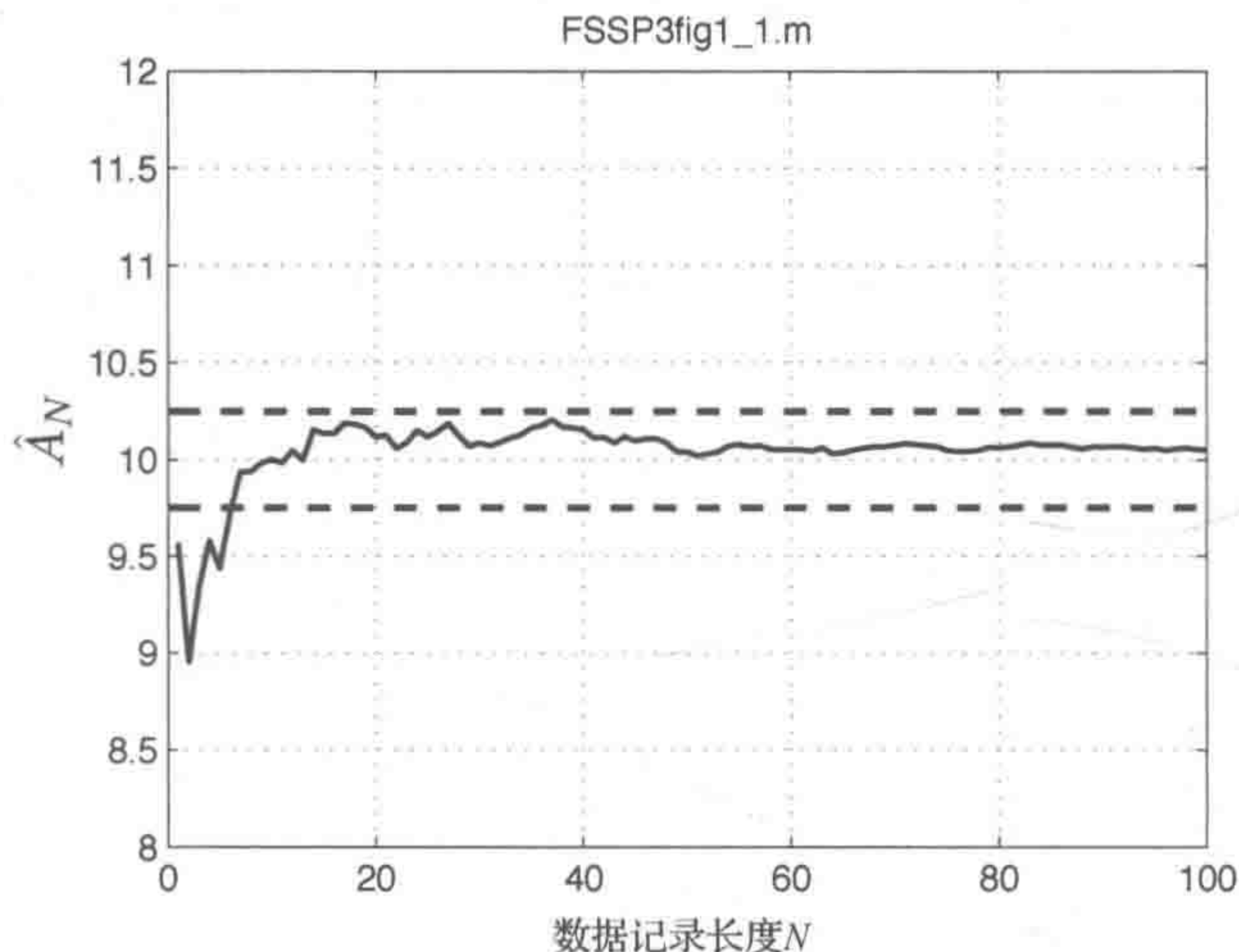


图 1.1 DC 电平  $A$  的估计与数据记录长度  $N$  的关系

然而,如果我们重复进行实验,这样好的结果可能只是偶然出现,对于不同的 WGN 样本  $w[n]$ , 可能得到不同的结果。对于 5 个不同的 WGN 现实(每个现实是不同的,它们的长度都是  $N = 100$ ), 在图 1.2 中给出了 5 个不同的实验结果。

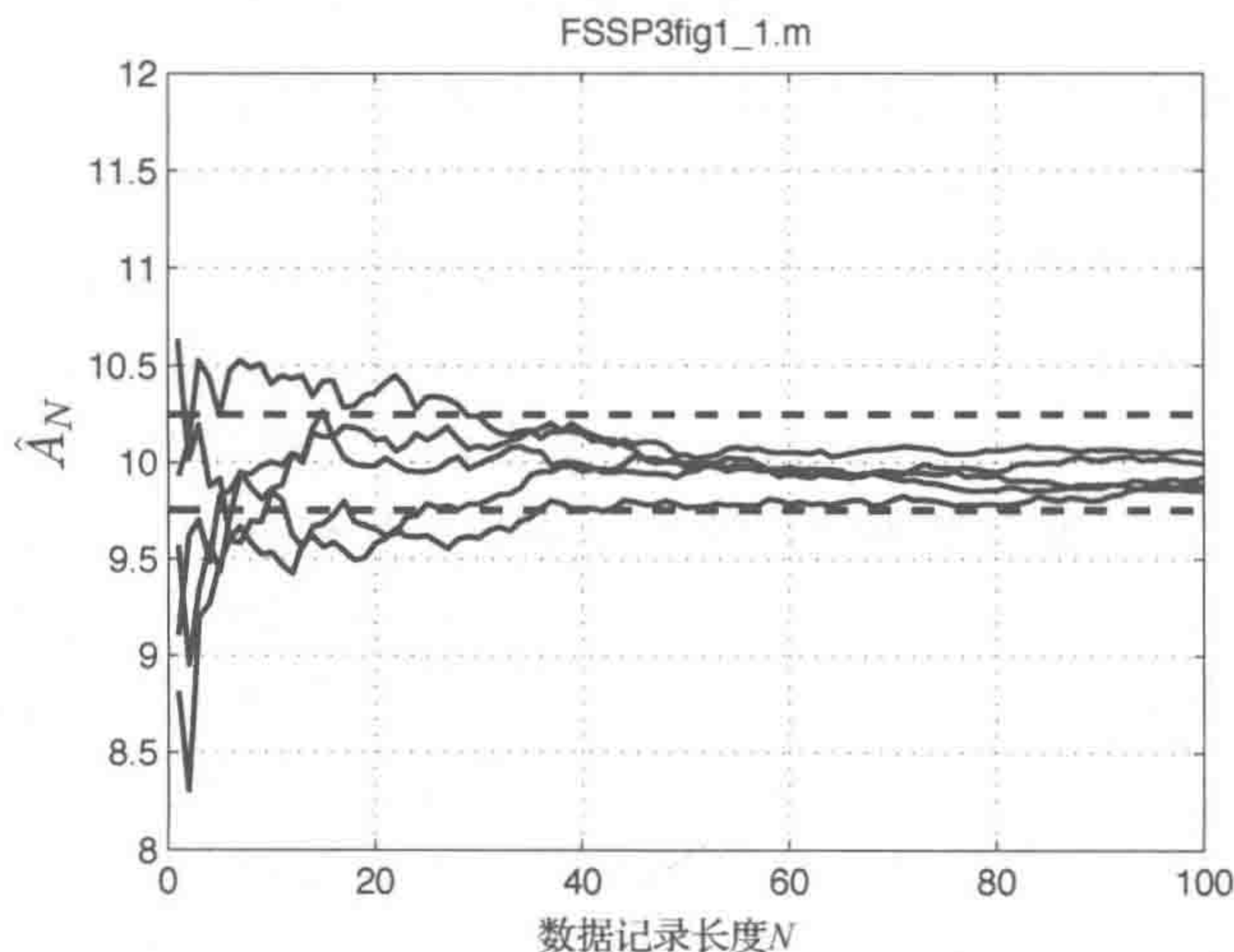


图 1.2 DC 电平估计器的 5 个不同现实

<sup>①</sup> 产生本图的 MATLAB 程序名列在图的顶部, 这一程序可以从作者那里获得。

现在看来在  $N=20$  个数据点时性能指标并不满足, 似乎只有当  $N>40$  个点时才满足。事实上, 如果要求  $N=20$  时估计值有 95.5% 的值落在虚线内, 那么可以证明估计量的方差  $\text{var}(\hat{A}_N)$  必须满足

$$2\sqrt{\text{var}(\hat{A}_N)} \leq 0.25$$

或者等价于

$$\text{var}(\hat{A}_N) \leq \frac{1}{64}$$

但是克拉美-罗下限却说明所有无偏估计必须满足

$$\text{var}(\hat{A}_N) \geq \frac{\sigma^2}{N} \quad (1.1)$$

在  $\sigma^2=1$ 、 $N=20$  时得到的下限是  $1/20$ , 所以, 这时的性能指标是无法满足的。后面将会看到, 估计量  $\hat{A}_N$  称为样本均值估计, 它确实会达到下限值, 所以它的方差由式 (1.1) 给出。因此, 要满足性能指标必须要求

$$\frac{\sigma^2}{N} = \frac{1}{64}$$

也就是说, 当  $\sigma^2=1$  时,  $N$  最小为 64。顺便提醒一下, 读者只要留意一下图 1.1 和图 1.2 就可知道其含义, 由于结果依赖于产生的特定的噪声序列, 实验必须重复多次, 没有什么结论只从少数几个现实得出。实际上, 图 1.2 中应当增加更多的现实。

### 练习 1.1 性能分析时多个现实的必要性

- 运行 MATLAB 程序 FSSP3exer1\_1.m, 取 100 个噪声现实,  $N=64$ 。大约有 95 个估计值落在指定的间隔  $[9.75, 10.25]$  之内吗?
- 如果精度的性能指标增加到 1% 的最大相对误差, 要求将误差控制在 1% 内, 方差  $\text{var}(\hat{A}_N)$  应该是多少? 数据记录长度  $N$  应该等于多少才能满足达到要求的方差? 最后, 修改 FSSP3exer1\_1.m 的程序代码来模拟这个更大的  $N$  的性能, 有多少估计值满足性能指标?

信号处理在许多领域都有应用。例如, 当信号淹没在噪声中时, 如何精确地确定正弦信号的频率? 数学上最佳的方法就是使用周期图, 这是一种谱估计器, 取周期图最大值的位置作为频率的估计 (见算法 9.3), 这在实际工作中很有效并被广泛采用。此外, 即使最佳算法所假定的条件有些不符合, 性能也不会显著下降, 这就是“稳健算法” (robust algorithm) 的例子。在实践中, 稳健性是一个算法非常重要的特性。现实的数据极少完全符合理论上的假设, 这些假设通常都是为了简化最佳算法的数学推导而给出的。我们可以把单一正弦信号频率的估计器的设计称为“容易问题”, 因为它的解就是周期图, 并且性能好、实现方便 (通过傅里叶变换)。当然, 在应用中, 我们假定了单一的正弦信号加上高斯白噪声, 这是不可忽视的假设。如果出现其他的正弦信号或干扰信号, 或者噪声是高度相关的, 那么这一方法就没有所说的那样好。特别是, 如果有另一个正弦信号的频率靠近感兴趣的正弦信号的频率, 那么频率估计器就可能有严重的偏差, 从而产生了一个不精确的估计。图 1.3 中给出了这样一个例子。在



图 1.3(a) 中, 显示一个幅度为 1、频率为 0.2 的正弦信号的周期图, 从图中可以看出周期图的最大值出现在正确的频率位置。而图 1.3(b) 给出了两个正弦信号的和, 期望信号的频率为 0.2, 干扰信号的频率为 0.22, 幅度都为 1。可以看出峰值现在偏离期望的频率 0.2。为了考虑这种可能性, 我们必须改变想法, 要认识到潜在的有一个或者多个干扰正弦信号。增加的复杂性就导致了“难的问题” [Kay 1988], 可能没有一种好的解决方法, 尤其是当干扰正弦信号的频率未知时。读者会毫不怀疑地认为, 对于一个算法, 当设计的假设得到满足时, 这个算法就会工作得很好(有一些可以说性能是最佳的)。因此, 问题的关键就是要验证这些假设在实际中成立。为了对令人失望的结果有所准备, 我们不仅需要评估算法的性能, 还要评估算法的局限性。

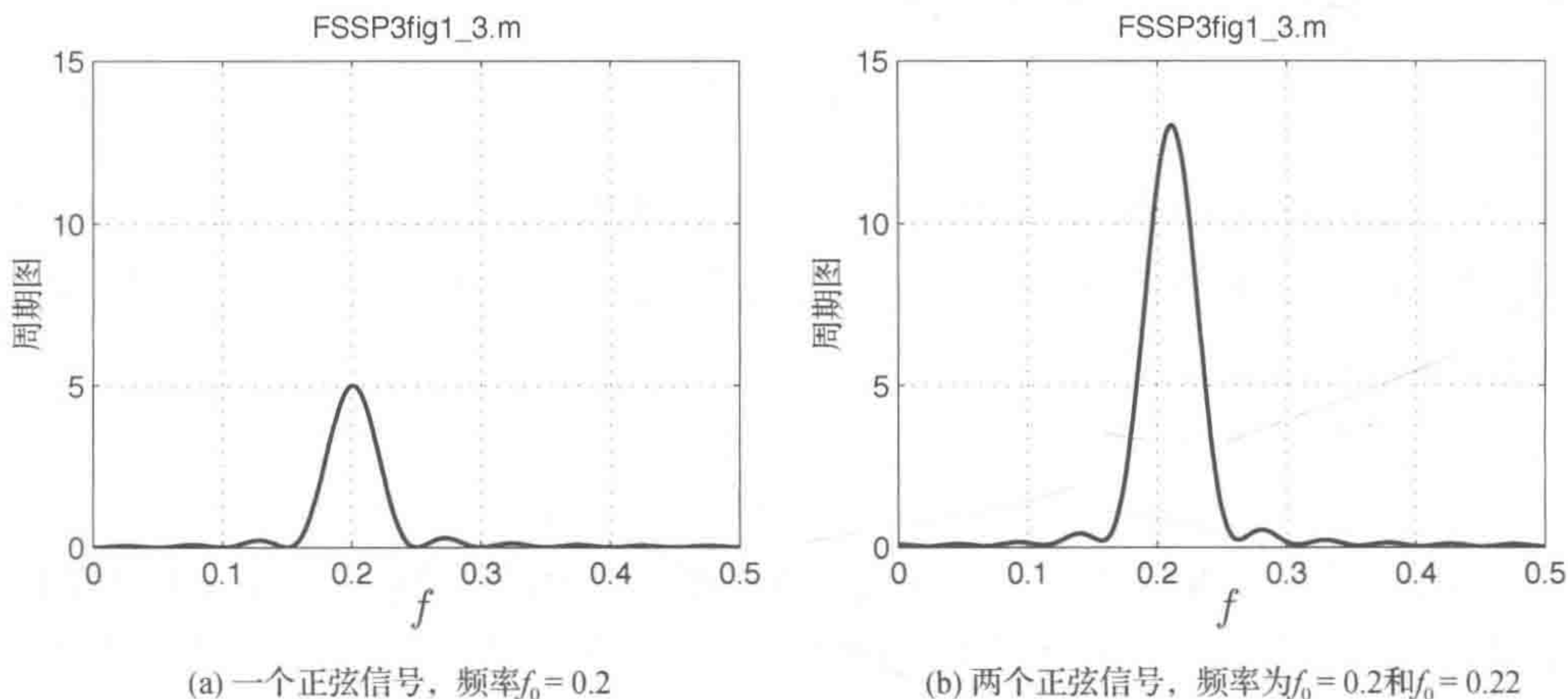


图 1.3 一个正弦信号和一个正弦信号加一个干扰信号的周期图

往往会有这样的情况, 一个看似非常困难的或者“难的问题”, 如果处理得当, 能将问题转化为一个容易解决的问题。众所周知, 线性信号模型(见 3.5 节和 3.6.4 节)能够得出最优性能和易于实现的算法。在现实世界中, 并非所有信号都适合使用线性模型。然而, 一旦知道了线性模型所期望的性质, 我们会理所当然地将非线性模型变换成线性模型。仍以正弦信号为例, 它可以用离散时间信号的形式来描述,

$$s[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \phi) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.2)$$

其中  $A$  是未知幅度, 并且  $A > 0$ ;  $f_0$  是未知的频率, 并且  $0 < f_0 < 1/2$ ;  $\phi$  是未知的相位, 并且  $-\pi \leq \phi < \pi$ , 我们想要估计未知的幅度和未知的相位。按照现在的情况, 这个信号与相位之间是非线性关系(因为  $A \cos(2\pi f_0 n + \phi_1 + \phi_2) \neq A \cos(2\pi f_0 n + \phi_1) + A \cos(2\pi f_0 n + \phi_2)$ ), 这将使估计算法的建立变得复杂。为了使问题更易于处理, 利用三角恒等式  $\cos(C+D) = \cos(C)\cos(D) - \sin(C)\sin(D)$ , 可得

$$s[n] = A \cos(\phi) \cos(2\pi f_0 n) - A \sin(\phi) \sin(2\pi f_0 n)$$

然后令  $\alpha_1 = A \cos(\phi)$ ,  $\alpha_2 = -A \sin(\phi)$  (刚好是极坐标到直角坐标的变换), 可得

$$s[n] = \alpha_1 \cos(2\pi f_0 n) + \alpha_2 \sin(2\pi f_0 n) \quad (1.3)$$

现在信号与未知的变换后的参数  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  是线性的, 这样就把原来难的问题转化为一个相对容易的问题, 并且它的解也是众所周知的。可以证明, 如果观测到的为正弦信号加噪声, 那么