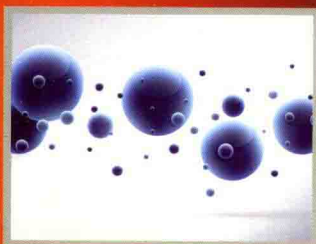


PUTONG WULIXUE
DIANXING WENTI POUXI YU TUOZHAN



普通物理学 典型问题剖析与拓展

■ 黄天成◎著

中国原子能出版社

普通物理学

典型问题剖析与拓展

黄天成◎著



中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

普通物理学典型问题剖析与拓展/黄天成著.--北京:中国原子能出版社,2018.4

ISBN 978-7-5022-8947-8

I. ①普… II. ①黄… III. ①普通物理学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 065471 号

内 容 简 介

本书针对普通物理学中典型的问题展开详细剖析与拓展讨论,内容涵盖力学、热学、电磁学、光学,主要内容包括:质点运动学、牛顿运动定律、力学中的守恒定律、刚体力学、机械振动与机械波、气体动理论、热力学、静止电荷的电场、恒定电流、恒定电流的磁场及电磁感应理论、几何光学等。本书论述严谨,结构合理,条理清晰,内容丰富新颖,是一本值得学习研究的著作。

普通物理学典型问题剖析与拓展

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)

责任编辑 张 琳

责任校对 冯莲凤

印 刷 三河市铭浩彩色印装有限公司

经 销 全国新华书店

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 15.5

字 数 278 千字

版 次 2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5022-8947-8 定 价 62.00 元

网址: <http://www.aep.com.cn>

E-mail: atomep123@126.com

发行电话: 010-68452845

版权所有 侵权必究

前 言

物理学的基本概念和技术被广泛应用到自然科学中,几乎所有重大高新技术领域的创立,如核能的利用、激光器的产生、层析成像技术(CT)和电子计算机等,事先都在物理学中经过长期的酝酿.当今物理学和科学技术的关系是两种模式并存、相互交叉又相互促进.尽管当今科学技术发展、更新很快,但前人总结的自然规律并未过时,高新技术的发展更证实了物理理论的重要性和在技术发展中的原动力作用.这表明将普通物理学定位于阐述基本运动形式的基本规律是很正确的.

据此,作者撰写了本书,以描述不同物质层次(力、热运动、电磁辐射场、光学)的基本规律、研究一定范围内不同现象,得到一些基本规律,解释一些自然现象或说明物理学在生产实际、科学技术中的具体应用,以期帮助读者深入理解和掌握物理学的基本概念、基本规律,进一步提高和增强分析问题和解决问题的能力,充分发挥物理学作为重要基础学科所应起到的重要作用.总体来讲,本书注意把握物理学体系的基本框架,注重物理学思维方法的转变,着眼于实际应用能力的提高.

物理学不仅是一门基础课,也是一门素质课,要尽量做到在传授知识的同时传授科学思维、科学态度和品德以及培养分析、解决问题的能力.因此,本书在概念、思想的阐述上注意了逻辑顺序的统一;在行文叙述上注意了严谨性与可读性的统一,尤其注意了数学与物理的统一,目的是为读者奉献一部既有继承又有发展、比较系统又不庞杂、篇幅适度、便于教学和自学的新著作.

全书共 11 章,分为 4 篇.第 1 篇为力学,包括第 1~5 章,内容分别为质点运动学、牛顿运动定律、力学中的守恒定律、刚体力学、机械振动与机械波;第 2 篇为热学,包括第 6~7 章,内容为气体动理论和热力学;第 3 篇为电磁学,包括第 8~10 章,内容分别为静止电荷的电场、恒定电流、恒定电流的磁场及电磁感应理论;第 4 篇为光学,包括第 11 章,内容为几何光学.

► 普通物理学典型问题剖析与拓展

本书在撰写过程中以作者在物理学方面的研究工作为基础,参考并引用了国内外专家学者的研究成果和论述,在此向相关内容的原作者表示诚挚的敬意和谢意.

由于作者水平有限,加之时间仓促,错误和遗漏在所难免,恳请读者批评指正.

作 者

2017 年 12 月

目 录

第 1 篇 力 学

第 1 章 质点运动学	1
1.1 质点运动的描述	1
1.2 已知质点运动方程求速度与加速度	6
1.3 已知速度或加速度求质点运动方程	9
1.4 曲线运动切向速度与加速度	10
1.5 相对运动相关问题	12
1.6 质点运动相关热点问题与方法拓展研究	15
第 2 章 牛顿运动定律	20
2.1 恒力下的直线运动与曲线运动	20
2.2 变力作用下的质点运动问题	24
2.3 非惯性系下的物体运动问题	25
2.4 牛顿运动定律相关热点问题与方法拓展研究	29
第 3 章 力学中的守恒定律	34
3.1 动量、冲量与动量定理	34
3.2 质点系的动量定理与动量守恒定律	36
3.3 功与动能定理	38
3.4 保守力、非保守力与势能	42
3.5 功能原理与机械能守恒定律	44
3.6 变质量问题	46
3.7 质点的角动量与角动量守恒定律	46
3.8 碰撞问题	49
3.9 力学中的守恒定律相关热点问题与方法拓展研究	52
第 4 章 刚体力学	57
4.1 刚体及其运动的描述	57
4.2 力矩与转动惯量的计算	59
4.3 刚体定轴转动定律	61

► 普通物理学典型问题剖析与拓展

4.4	定轴转动中的功能关系	63
4.5	角动量定理和角动量守恒定律	65
4.6	刚体力学相关热点问题与方法拓展研究	67
第5章	机械振动与机械波	72
5.1	简谐振动的描述	72
5.2	简谐振动的合成	80
5.3	阻尼振动、受迫振动与共振	86
5.4	机械波的产生与传播	89
5.5	与波的表达式相关的常见问题	91
5.6	波的叠加原理——干涉与驻波	95
5.7	多普勒效应	98
5.8	机械振动与机械波相关热点问题与方法拓展研究	99

第2篇 热 学

第6章	气体动理论	101
6.1	分子热运动的描述	101
6.2	理想气体模型与状态方程	104
6.3	能均分定理与理想气体内能的计算	106
6.4	统计方法与气体分子的麦克斯韦速率分布	110
6.5	分子碰撞与平均自由程	114
6.6	气体输运现象	116
6.7	气体动理论相关热点问题与方法拓展研究	121
第7章	热力学	125
7.1	热力学第零与第一定律及其应用	125
7.2	循环过程以及热效率与冷却系数的计算	131
7.3	热力学第二定律及其应用	133
7.4	卡诺定理	136
7.5	熵的计算与玻耳兹曼关系	138
7.6	熵增加原理与热力学第二定律的统计诠释	144
7.7	热力学相关热点问题与方法拓展研究	146

第3篇 电磁学

第8章	静止电荷的电场	150
8.1	电荷与库仑定律	150
8.2	静电场与电场强度	152

8.3	电通量与高斯定理	157
8.4	静电场中的安培环路定理与电势	161
8.5	静电场与导体的相互作用	163
8.6	电介质与外电场的相互作用	166
8.7	电容器与静电场能的计算	170
8.8	静电场相关热点问题与方法拓展研究	175
第9章	恒定电流	179
9.1	恒定电流与电阻的计算	179
9.2	欧姆定律及其应用	182
9.3	基尔霍夫定律及其应用	184
9.4	恒定电流相关热点问题与方法拓展研究	187
第10章	恒定电流的磁场及电磁感应理论	190
10.1	恒定电流的磁效应与磁感应强度的计算	190
10.2	稳恒磁场的高斯定理与安培环路定理	194
10.3	带电粒子在稳恒磁场中的运动	196
10.4	磁场对电流的作用力	198
10.5	磁介质及其与磁场的相互作用、铁磁质	200
10.6	电磁感应现象及电磁感应定律	206
10.7	动生电动势、感生电动势与感生电场的计算	209
10.8	自感、互感与磁能	211
10.9	麦克斯韦方程组与电磁波理论	215
10.10	电磁场相关热点问题与方法拓展研究	218
第4篇 光 学		
第11章	几何光学	224
11.1	光的直线传播、反射与折射	224
11.2	薄透镜成像规律及其应用	227
11.3	光的色散现象	229
11.4	几何光学相关热点问题与方法拓展研究	233
参考文献		238

第 1 篇 力 学

第 1 章 质点运动学

广泛而言,自然界的一切变化过程都可称为运动(motion). 运动是物质的基本属性,是物质存在最普遍的形式. 一切物质都处在永不停息的运动中. 运动的这种永恒性、普遍性称为运动的绝对性. 物质的运动形式多种多样,如机械的、热的、电磁的、化学的、生命的、思维的等. 其中,机械运动(物体相对位置的变化)是最简单的运动形式. 力学就是研究机械运动的规律和处理机械运动方法的. 所谓机械运动是指物体位置的变化. 机械运动有两种运动形式:质点运动和刚体运动. 本章主要对质点运动进行介绍.

1.1 质点运动的描述

1.1.1 参照系

世界是物质的,物质是运动的. 宇宙中的任何物体都在不停地运动. 绝对静止的物体是不存在的. 我们知道,要描述一个物体的运动,需要选择其他物体作为参考,然后才可以研究物体相对于这些参考物体是如何运动的. 为描述物体的运动而选取的这个其他物体称为参照系. 同一个物体的运动,选取的参照系不同,物体的运动形式也就不同. 一切物体的运动,既是绝对的,又是相对的. “绝对”是指运动本身,宇宙中所有的物体都处于永不停息的运动中. “相对”是指对运动的描述,对于同一物体运动的描述,在不同参照系中会得到不同的结果.

为了对物体的运动做出定量描述,需要在参照系上建立适当的坐标系,坐标系实质上是参照系的数学抽象. 常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系、自然坐标系和柱面坐标系等,如图 1-1 所示. 处理实际问题时,原则上

坐标系的选取是任意的,但是选择适当的坐标系可以使运动的描述变得简便,使处理问题的过程加以简化.

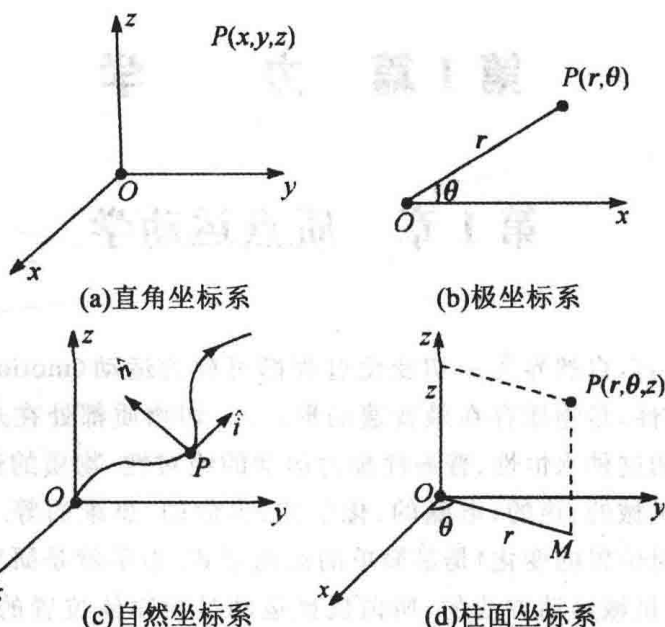


图 1-1 常用坐标系

1.1.2 质点

物体都有大小和形状,运动方式又都各不相同.例如,太阳系中,行星除绕自身的轴线自转外,还绕太阳公转;从枪口射出的子弹,它在空中向前飞行的同时,还绕自身的轴转动;有些双原子分子,除了分子的平动、转动外,分子内各个原子还在振动.这些事实都说明,物体的运动情况是十分复杂的.物体的大小、形状、质量也都是千差万别的.

我们看到,在描述物体的运动时,如果连同物体本身的大小和形状都考虑在内,对物体运动的描述是很困难的.但是,在有些情况下,如果物体本身的大小和形状可以忽略,对物体运动的描述就可以得到简化.例如,一列火车在铁轨上行驶,它的发动机、传动机构及车轮的运动是很复杂的,但人们衡量火车从甲地到乙地的运动速度时,火车内部的运动被撇开不管.地球在绕太阳公转的同时又在自转,因此,地球的各部分离太阳的远近在不断变化.但是,由于地球至太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍,因此,在研究地球的公转时,由地球的大小而引起的地球上各部分的运动差异就可以忽略不计了.像这样,在研究的问题中,若物体的大小和形状可以忽略,那么该物体上的一个点的运动,就可以代表整个物体的运动了.这时,

我们突出物体具有质量和占有位置这两个要素,把它简化为一个有质量的点,称为质点.于是,对实际物体运动的描述,就转化成对质点运动的描述.

质点是经过科学抽象而形成的物理模型.把物体当作质点是有条件的、相对的,要看所研究的问题的性质.在前面的例子中,研究火车从甲地到乙地的运动速度时,可以把火车看作质点,而如果研究整列火车通过某一路标所用的时间,显然不能忽略火车的长度,这时火车就不能被看作质点.研究地球的公转,可以把地球看作质点,但在研究地球的自转时,其大小、形状就不能忽略.

在物理学中,忽略次要因素,建立理想化的“物理模型”,并将其作为研究对象,是经常采用的一种科学研究方法,在实践上和理论上都具有非常重要的意义.当我们所研究的运动物体不能视为质点时,质点的概念仍然十分有用.因为可以把物体视为由许多小体积元组成,每个体积元都小到可以按质点来处理,则整个物体可以看成是由若干质点组成的系统,即质点系.这样,以对质点运动的研究为基础,就可以研究任意物体的运动了.所以,研究质点的运动是研究物体运动的基础.

1.1.3 描述运动的物理量

1. 位矢

如图 1-2(a)所示,为了表示质点的位置,从原点 O 到质点所在位置引一矢量 $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ 称为位置矢量(简称位矢).位置矢量用来指明质点的位置,当然,坐标 (x, y, z) 也可指明质点的位置.按矢量的解析表示法,位矢与坐标的关系为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-1-1)$$

式中, $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 为笛卡儿直角坐标系的单位矢.

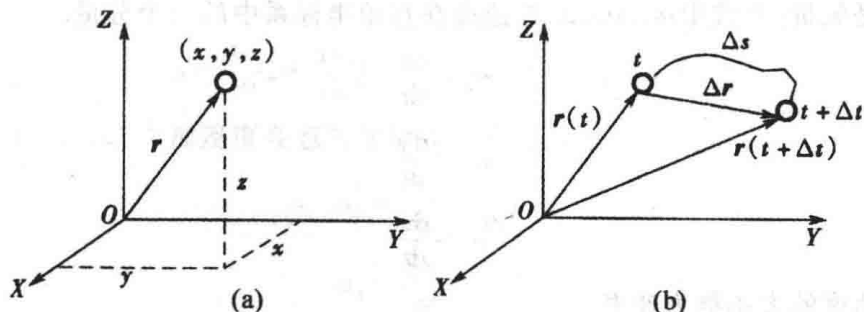


图 1-2 位矢与位移

2. 位移

如图 1-2(b) 所示, 由 t 时刻质点位置画到 $t + \Delta t$ 时刻质点位置的一个矢量 $\Delta \mathbf{r}$, 可以用来表示位置变化的大小和方向, 称为位移. 依矢量运算可知, 它与质点两个时刻位矢的关系为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

由式(1-1-1)有

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}$$

图中质点运动轨迹的长度称为路程 Δs . 一般, 路程不等于位移的大小, 即

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$$

但当 Δt 趋于 0 时

$$|d\mathbf{r}| = ds \quad (1-1-2)$$

3. 速度

速度 $\mathbf{v}$ 表明物体运动的快慢和方向, 对运动快慢和方向的粗糙表示可用平均速度. 如果质点在 Δt 时间内的位移为 $\Delta \mathbf{r}$, 则平均速度

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

平均速度与取平均的时间有关, 它不能反映物体在某一时刻或某一点运动的快慢和方向. 为了对运动快慢和方向有精确表达, 可对平均速度取极限, 得瞬时速度, 即瞬时速度

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

由式(1-1-1)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

速度是矢量, 上式中 v_x 、 v_y 、 v_z 是速度在直角坐标系中的三个分量.

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

速度的大小称为速率

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{ds}{dt} \quad (1-1-3)$$

上式表明,速率可由速度的三个分量确定.依式(1-1-2)和式(1-1-3),速率亦可由路程对时间的导数确定.

速度的方向总是沿着轨道的切向,引入轨道切向单位 $\hat{\tau}$,速度可由它的大小(速率)和轨道切向单位 $\hat{\tau}$ 表示为

$$\mathbf{v}(t) = v\hat{\tau}$$

4. 加速度

加速度 $\mathbf{a}$ 表示速度变化的快慢和方向.

由图 1-3, t 时刻速度为 $\mathbf{v}(t)$, $t + \Delta t$ 时刻速度为 $\mathbf{v}(t + \Delta t)$, t 到 $t + \Delta t$ 时间内速度增量为

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$$

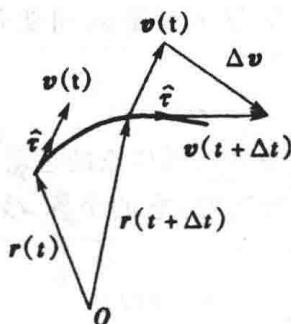


图 1-3 加速度

t 到 $t + \Delta t$ 时间内的平均加速度定义为

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

平均加速度与取平均的时间 Δt 有关,平均加速度对时间取极限,得瞬时加速度,即瞬时加速度

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

或

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

其中, a_x 、 a_y 、 a_z 为加速度在直角坐标系的三个分量.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

加速度大小

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

关于加速度有需要注意的是：

(1) 加速度是个矢量，是速度对时间的变化率，不管速度的大小改变或方向改变，都存在非零的加速度；

(2) 加速度描写速度变化，某时刻的加速度与该时刻的速度值没有关系；

(3) 加速度是个瞬时量。

1.1.4 运动方程

质点运动时，它的位置矢量 r 是随时间变化的，因此 r 是时间的函数，即

$$r = r(t) \quad (1-1-4)$$

这个 r 随时间变化的关系式叫做质点的运动方程。

在直角坐标系中，质点运动时，它的坐标 x 、 y 、 z 都是时间的函数，可写为

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1-1-5)$$

这个方程组即是质点的运动方程(1-1-4)在直角坐标系中的分量表示式。式(1-1-1)运动方程又可写为

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

当质点在空间运动时，位置矢量 r 不断地改变其大小和方向，其末端在空间描绘出一条曲线，该曲线称为质点运动的轨迹。

从质点的运动方程(1-1-5)中，消去参变量时间 t ，就得到质点的轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$

轨迹为直线就称为直线运动，轨迹为曲线则称为曲线运动。

1.2 已知质点运动方程求速度与加速度

对于这类问题需用求导数方法求解。将已知 $r(t)$ 函数对时间求导数即可得待求的速度和加速度，即

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

要确定 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{a}$ 的量值和方向, 需要求出它们的分量式.

有些习题还需要根据题设条件、几何关系确定质点的运动学方程. 为正确写出质点的运动学方程, 先要确定参考系, 选择坐标系, 找出质点坐标随时间变化的函数关系.

【例 1-1】 如图 1-4(a) 所示, 直杆 AB 两端可以分别在两个固定而相互垂直的直线导槽上滑动, 试求杆上任意点 M 的轨迹方程. 已知 M 点距 A 端的距离为 a , 距 B 端的距离为 b . 又设杆上 A 端以匀速率 v_0 运动, 求 M 点的速度和加速度.

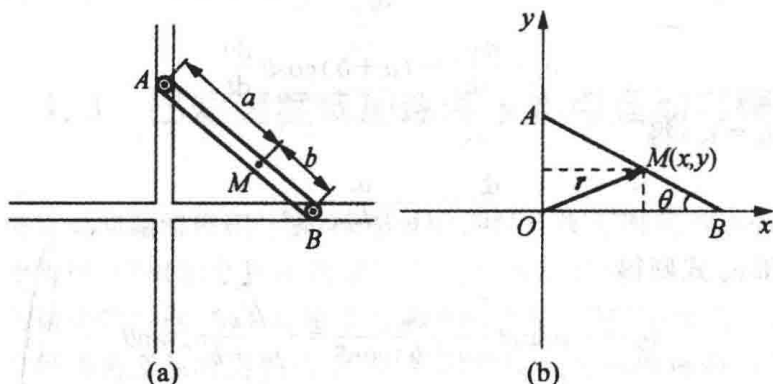


图 1-4 例 1-1 图

分析: 在这道题中, 没有直接给出质点的运动学方程, 因此首先要建立运动学方程. 在运动过程中的任意一位置, 可运用几何关系把质点的位置坐标表示为时间的函数.

解: 沿直线导槽作直角坐标系 xOy , 如图 1-4(b) 所示. 设某时刻 t , 直杆 AB 与 x 轴间的夹角为 θ , 它是 t 的函数, 那么, M 的坐标

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

这就是用直角坐标系表示的 M 点的运动学方程.

从坐标原点 O 向 M 点作位矢 $\mathbf{r}$, 有

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = a \cos \theta \mathbf{i} + b \sin \theta \mathbf{j}$$

在运动学方程两式中消去 t , 即消去 θ , 得 M 点的轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

它是一椭圆. 椭圆的中心在坐标原点, 半轴长分别为 a 和 b .

M 点的速度分量分别为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

式中 $\frac{d\theta}{dt}$ 是未知的, 为求 $\frac{d\theta}{dt}$, 可从 A 端的运动情况分析. 因 A 端在任意时刻的坐标为

$$x_A = 0$$

$$y_A = (a+b) \sin \theta$$

所以 A 端的运动速度分量

$$v_{Ax} = \frac{dx_A}{dt} = 0$$

$$v_y = \frac{dy_A}{dt} = (a+b) \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

按题意, $v_A = v_0$, 得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{(a+b) \cos \theta}$$

代入 v_x 和 v_y 式则得

$$v_x = -a \sin \theta \frac{v_0}{(a+b) \cos \theta} = -\frac{a}{a+b} v_0 \tan \theta$$

$$v_y = b \cos \theta \frac{v_0}{(a+b) \cos \theta} = \frac{a}{a+b} v_0$$

所以 M 的速度大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{a^2 \tan^2 \theta + b^2}}{a+b} v_0$$

速度的方向为与 x 轴正方向所成的夹角

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \left(-\frac{b}{a \tan \theta} \right)$$

M 点的加速度分量分别为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - a \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -b \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + b \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

式中的 $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ 可由杆的 A 端运动加速度求得. 由于杆的 A 端沿 y 轴做匀速直线运动, 所以 $a_A = 0$, 即 $a_{Ay} = 0$, 而

$$a_{Ay} = \frac{dv_{Ay}}{dt} = -(a+b)\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (a+b)\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

由此得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tan\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

代入 a_x 和 a_y 可得 M 点的加速度分量

$$a_x = -a\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - a\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{a}{\cos\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_y = 0$$

所以 M 点的加速度大小

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{a}{\cos\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{a}{(a+b)^2} \frac{1}{\cos^3\theta} v_0^2$$

加速度的方向是沿 y 轴的负向。

1.3 已知速度或加速度求质点运动方程

处理这类问题需用积分法。根据已知的加速度与时间的函数关系和必要的初始条件,应用积分法才能求出质点的运动速度,再一次积分才能得到质点的运动学方程。如果加速度是速度的函数,则以速度为变量,分离变量后积分可得速度与时间的关系。如果加速度是坐标的函数,则需变换变量,由 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$, 然后积分可得速度与坐标的函数关系。

【例 1-2】 一艘正在沿直线行驶的快艇,在发动机关闭后,其加速度方向与速度方向相反,大小与速度的平方成正比,试求快艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度。

分析:此题已知加速度与速度关系,求速度与距离之间的关系,可用积分法求解。

解:由于加速度的大小与速度的平方成正比,即

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

式中, k 为常量。欲求速度与距离的关系,可用变量代换得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

于是

$$v \frac{dv}{dx} = -kv^2$$