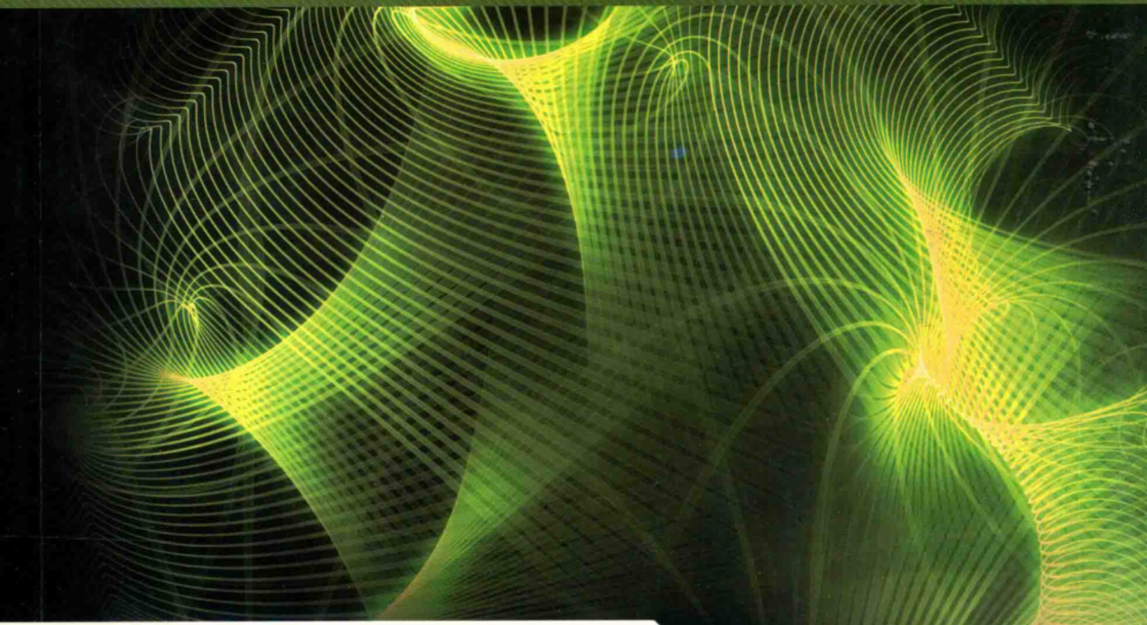
GAODENG SHUXUE



高等数学（下册）

王顺凤　孟祥瑞　吴亚娟　杨　阳·编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

（下册）

王顺凤　孟祥瑞　吴亚娟　杨　阳　编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内容提要

本书根据编者多年的教学实践与教改经验，结合教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书分上、下册出版. 本书为下册部分. 下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积、曲线积分与曲面积分、微分方程与无穷级数共六章内容. 书后还包括习题参考答案与附录[MATLAB软件简介(下)与常见曲面]. 每节都配适量的习题，每章后附有总复习题，便于教师因材施教或学生自主学习.

本书突出重要概念的实际背景和理论知识的应用. 全书结构严谨、逻辑清晰、说理浅显、通俗易懂. 例题丰富且有一定梯度，便于学生自学. 本书可作为高等院校理、工、经管各类专业高等数学的教材使用，也可作为工程技术人员与考研复习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/王顺凤等编. —南京：东南大学出版社，2018. 2

ISBN 978-7-5641-7451-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第254185号

高等数学(下册)

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼2号
邮　　编	210096

经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	兴化印刷有限责任公司
开　　本	700 mm×1000 mm 1/16
印　　张	23.5
字　　数	461千字
版　　次	2018年2月第1版
印　　次	2018年2月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-7451-4
定　　价	42.00元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025-83791830)

前　言

本教材是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲和南京信息工程大学理、工、经管类高等数学教学大纲，以及2004年教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》，并汲取近年来南京信息工程大学及滨江学院高等数学课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校数学教学改革的成功经验，由南京信息工程大学滨江学院第四期教学建设与改革立项中的教材《高等数学(下)》项目资助编写而成. 本书力求具有以下特点：

1. 突出培养通适型、应用型人才的宗旨，注重介绍重要概念的实际背景，强调数学的思想和方法，适当弱化理论教学，强化应用教学，力求使学生会用数学知识解决相应较简单的实际问题.

2. 在保证科学性的前提下，充分考虑高等教育大众化的新形势，构建学生易于接受的微积分系统. 如对较难理解的极限、连续等概念部分，先介绍其描述性定义，在此基础上再介绍极限、连续的精确定义，使学生易于接受；如对微分与积分部分，都以实际问题为背景引入概念；在积分的应用部分，都强调应用元素法解决实际问题，使学生对微积分的思想及其应用有更全面的认识.

3. 为了便于教师因材施教以及适应分层次教学的需要，对有关例题和习题进行了分层处理. 每节的后面都配有适量梯度明显的习题给不同程度的学生选用，习题主要包括基础题与少量的综合题，基础题用于训练学生掌握基本概念与基本技能；综合题用于训练学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力；每章的最后还配有总复习题，用于学生复习与巩固知识.

4. 充分注意与现阶段中学教材的衔接，本书对反三角函数作了简要介绍，并在附录中补充介绍了数学归纳法、极坐标及一些常用的中学数学公式等，供读者查阅.

5. 本教材对例题作了精心挑选，教材中例题丰富多样，既具有代表性又有一定的梯度，适合各类读者的要求.

6. 根据内容特点,在附录中引入 MATLAB 数学软件的简要介绍,并给出了有关案例应用,使学生能较早接触数学软件的学习,为今后运用数学软件解决实际问题打下基础.

教材中的教学内容可根据各类专业的需要选用,本书兼顾了理、工、文、经管各类专业的教学要求,在使用本书时,参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍.如经济管理类的专业,多元函数的积分部分只需选讲二重积分,级数部分的傅立叶级数可不讲.理工类专业可以不讲数学在经济方面的应用等.教材中标有"*"号的内容不作教学要求,可根据各类专业的需要选用.

本教材由南京信息工程大学滨江学院王顺凤、吴亚娟、杨阳老师集体编写与校对,全书的编写人员集体认真讨论了各章的书稿,左相、刘红爱、官琳琳、咸亚丽、许志奋等许多老师都提出了宝贵的修改意见.全书的框架、统稿、定稿由王顺凤老师承担.

南京信息工程大学数统院薛巧玲教授仔细审阅了全部书稿,提出了宝贵的修改意见,在此向薛巧玲教授表示衷心的感谢!

本书的出版得到南京信息工程大学滨江学院各级领导,以及东南大学出版社的领导与编辑们的大力支持与帮助,在此表示衷心感谢!

由于编者水平所限,编写时间偏紧,书中难免有不少缺点和错误,敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编者

2017 年 12 月

目　　录

7　向量代数与空间解析几何 ………………………………………… 1
7.1　向量及其线性运算 ………………………………………… 1
7.1.1　空间直角坐标系 ………………………………………… 1
7.1.2　空间两点间的距离 ………………………………………… 2
7.1.3　向量及有关概念 ………………………………………… 3
7.1.4　向量的线性运算 ………………………………………… 4
7.1.5　向量在轴上的投影 ………………………………………… 8
7.1.6　向量的分解与向量的坐标 ………………………………………… 9
7.1.7　向量的模和方向余弦 ………………………………………… 11
习题 7.1 ………………………………………… 13
7.2　向量的数量积、向量积与混合积 ………………………………………… 14
7.2.1　向量的数量积 ………………………………………… 14
7.2.2　向量的向量积 ………………………………………… 18
7.2.3　向量的混合积 ………………………………………… 21
习题 7.2 ………………………………………… 23
7.3　空间平面及其方程 ………………………………………… 24
7.3.1　曲面方程的概念 ………………………………………… 24
7.3.2　平面的方程 ………………………………………… 26
7.3.3　两平面之间的位置关系 ………………………………………… 29
7.3.4　点到平面的距离 ………………………………………… 31
习题 7.3 ………………………………………… 31
7.4　空间直线及其方程 ………………………………………… 32
7.4.1　空间直线的方程 ………………………………………… 33
7.4.2　两直线之间的位置关系 ………………………………………… 36
7.4.3　直线与平面之间的位置关系 ………………………………………… 36
7.4.4　点到直线之间的距离 ………………………………………… 38
7.4.5　平面束 ………………………………………… 39

习题 7.4 …… 41

7.5 常见的曲面及其方程 …… 42

7.5.1 旋转曲面 …… 42

7.5.2 柱面 …… 45

7.5.3 椭球面 …… 47

7.5.4 单叶双曲面 …… 48

7.5.5 双叶双曲面 …… 49

7.5.6 椭圆抛物面 …… 50

*7.5.7 双曲抛物面(马鞍面) …… 51

习题 7.5 …… 52

7.6 空间曲线及其方程 …… 53

7.6.1 空间曲线的一般方程 …… 53

7.6.2 空间曲线的参数方程 …… 54

7.6.3 空间曲线在坐标面上的投影 …… 55

习题 7.6 …… 57

总复习题 7 …… 57

8 多元函数微分法及其应用 …… 59

8.1 多元函数 …… 59

8.1.1 平面点集与 n 维空间 …… 59

8.1.2 多元函数的概念 …… 62

8.1.3 二元函数的极限 …… 64

8.1.4 二元函数的连续性 …… 67

8.1.5 闭区域上多元连续函数的性质 …… 68

习题 8.1 …… 68

8.2 偏导数 …… 69

8.2.1 偏导数的定义 …… 70

8.2.2 偏导数的几何意义 …… 73

8.2.3 高阶偏导数 …… 73

习题 8.2 …… 75

8.3 全微分 …… 76

8.3.1 全微分的概念 …… 76

*8.3.2　全微分在近似计算中的应用 …… 80
习题 8.3 …… 81
8.4　多元复合函数的微分法 …… 82
8.4.1　多元复合函数的求导法则 …… 82
8.4.2　一阶全微分形式不变性 …… 86
8.4.3　多元复合函数的高阶偏导数 …… 87
习题 8.4 …… 88
8.5　隐函数的微分法 …… 89
8.5.1　一个方程的情形 …… 89
8.5.2　方程组的情形 …… 94
习题 8.5 …… 95
8.6　方向导数与梯度 …… 96
8.6.1　方向导数 …… 96
8.6.2　梯度 …… 99
习题 8.6 …… 100
8.7　多元函数微分法在几何上的应用 …… 101
8.7.1　空间曲线的切线与法平面 …… 101
8.7.2　空间曲面的切平面与法线 …… 104
习题 8.7 …… 107
*8.8　二元函数的泰勒公式 …… 108
习题 8.8 …… 110
8.9　多元函数的极值及其求法 …… 110
8.9.1　多元函数的极值 …… 111
8.9.2　条件极值　拉格朗日乘数法 …… 115
8.9.3　多元函数的最大值与最小值 …… 118
习题 8.9 …… 120
总复习题 8 …… 120

9　重积分 …… 122

9.1　二重积分的概念与性质 …… 122
9.1.1　两个实例 …… 122
9.1.2　二重积分的定义 …… 124

9.1.3　二重积分的性质 …… 125
习题 9.1 …… 127
9.2　二重积分的计算 …… 128
9.2.1　直角坐标系下二重积分的计算 …… 128
9.2.2　极坐标系下二重积分的计算 …… 137
习题 9.2 …… 142
9.3　三重积分 …… 143
9.3.1　三重积分的概念 …… 143
9.3.2　三重积分的计算 …… 145
习题 9.3 …… 155
9.4　重积分的应用 …… 157
9.4.1　曲面的面积 …… 157
9.4.2　质心和转动惯量 …… 158
9.4.3　引力 …… 161
习题 9.4 …… 162
总复习题 9 …… 163

10　曲线积分与曲面积分 …… 166

10.1　对弧长的曲线积分 …… 166
10.1.1　对弧长的曲线积分的概念 …… 166
10.1.2　对弧长的曲线积分的计算 …… 168
10.1.3　对弧长的曲线积分的应用 …… 170
习题 10.1 …… 173
10.2　对面积的曲面积分 …… 174
10.2.1　对面积的曲面积分的概念 …… 174
10.2.2　对面积的曲面积分的性质 …… 175
10.2.3　对面积的曲面积分的计算 …… 176
习题 10.2 …… 180
10.3　对坐标的曲线积分 …… 181
10.3.1　对坐标的曲线积分的概念与性质 …… 181
10.3.2　对坐标的曲线积分的计算 …… 185
习题 10.3 …… 190

10.4　格林公式及其应用 …… 192
10.4.1　格林公式 …… 192
10.4.2　平面曲线积分与路径无关的条件 …… 198
习题 10.4 …… 204
10.5　对坐标的曲面积分 …… 206
10.5.1　曲面的定向 …… 206
10.5.2　流体流向曲面一侧的流量 …… 207
10.5.3　对坐标的曲面积分的概念与性质 …… 208
10.5.4　对坐标的曲面积分的计算 …… 211
习题 10.5 …… 217
10.6　高斯公式及散度 …… 218
10.6.1　高斯公式 …… 218
10.6.2　通量与散度 …… 221
习题 10.6 …… 224
10.7　斯托克斯公式与旋度 …… 225
10.7.1　斯托克斯公式 …… 225
10.7.2　旋度 …… 228
习题 10.7 …… 229
总复习题 10 …… 230

11　微分方程 …… 232

11.1　微分方程的基本概念 …… 232
习题 11.1 …… 236
11.2　变量可分离的微分方程 …… 237
11.2.1　变量可分离的微分方程 …… 237
11.2.2　齐次方程 …… 240
习题 11.2 …… 243
11.3　一阶线性微分方程 …… 244
11.3.1　一阶线性微分方程 …… 244
11.3.2　伯努利方程 …… 247
习题 11.3 …… 248
11.4　全微分方程 …… 249

习题 11.4 …… 251
11.5 可降阶的高阶微分方程 …… 251
11.5.1 $y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 251
11.5.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 252
11.5.3 $y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 255
习题 11.5 …… 257
11.6 二阶线性微分方程的解结构 …… 257
11.6.1 二阶线性齐次微分方程的解结构 …… 258
11.6.2 二阶线性非齐次微分方程的解的结构 …… 260
习题 11.6 …… 262
11.7 二阶常系数线性齐次微分方程 …… 262
习题 11.7 …… 267
11.8 二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 267
11.8.1 自由项为 $f(x)=P(x)e^{\lambda x}$ 的情形 …… 268
11.8.2 自由项为 $f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$的情形 …… 270
习题 11.8 …… 273
*11.9 欧拉方程 …… 274
习题 11.9 …… 275
总复习题 11 …… 275

12 无穷级数 …… 278

12.1 常数项级数的概念与性质 …… 278
12.1.1 常数项级数的基本概念 …… 278
12.1.2 常数项级数的基本性质 …… 282
12.1.3 常数项级数收敛的必要条件 …… 285
习题 12.1 …… 285
12.2 常数项级数的审敛法 …… 286
12.2.1 正项级数及其审敛法 …… 286
12.2.2 交错级数及其审敛法 …… 294
12.2.3 任意项级数及其审敛法 …… 296
习题 12.2 …… 300
12.3 幂级数 …… 301

12.3.1　函数项级数的基本概念 …… 301
12.3.2　幂级数及其收敛性 …… 303
12.3.3　幂级数的运算及其和函数的性质 …… 308
习题 12.3 …… 311
12.4　函数展开成幂级数 …… 312
12.4.1　函数展开成幂级数 …… 312
*12.4.2　幂级数的应用 …… 321
习题 12.4 …… 322
12.5　傅立叶级数 …… 323
12.5.1　以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数 …… 324
12.5.2　非周期函数的傅立叶级数 …… 330
习题 12.5 …… 334
12.6　以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数 …… 335
习题 12.6 …… 338
总复习题 12 …… 338
附录Ⅴ　MATLAB 软件简介(下) …… 340
附录Ⅵ　常见曲面 …… 350
参考答案 …… 352

7　向量代数与空间解析几何

在中学数学中我们已经知道，利用向量可以更便捷地解决许多平面几何问题. 空间解析几何是用代数的方法来研究空间的几何问题，即通过坐标法，把空间的点与三个有序实数、空间的图形和三元方程建立对应关系. 本章首先介绍空间直角坐标系，并讨论在工程技术上有着广泛应用的向量概念和一些基本运算，然后以向量为工具，着重讨论空间中的平面、直线、曲面和曲线的方程以及有关内容. 这些知识将是学习多元函数微积分必备的基础知识.

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　空间直角坐标系

在空间取一定点 O，过 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别称为 **x 轴**(横轴)、**y 轴**(纵轴)、**z 轴**(竖轴)，统称为**坐标轴**. 规定它们的正方向要符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**，点 O 称为**坐标原点**(如图 7－1 所示)，如果把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，则 z 轴就是铅垂线.

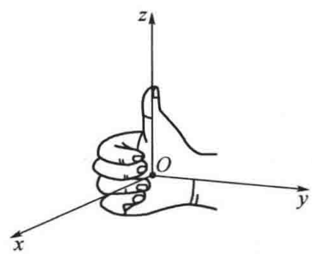


图 7－1

其中任意两条坐标轴确定一个坐标面，称 x 轴及 y 轴所确定的坐标面为 xOy 面. 类似地，另两个坐标面分别称为 yOz 面与 zOx 面. 这三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，其中含有三个正半轴的卦限称为第一卦限，它位于 xOy 面的上方，在 xOy 面的上方，按逆时针方向顺序排列着的其他三个卦限依次称为**第二卦限、第三卦限和第四卦限**. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的称为第五卦限，按逆时针方向顺序排列着的其他三个卦限依次称为**第六卦限、第七卦限和第八卦限**.

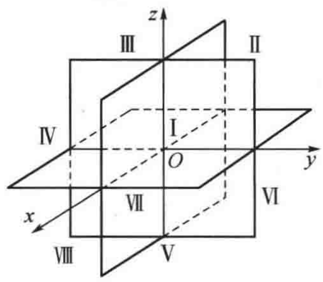


图 7－2

八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(如图 7-2 所示).

利用空间直角坐标系,就可以建立空间的点与有序数组之间的对应关系.设空间一点 M,过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R,设 P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z(如图 7-3 所示),于是点 M 确定了一个有序实数组 (x,y,z). 反之,如果给定了任一有序实数组 (x,y,z),依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取与 x、y、z 相对应的点 P、Q、R,则过点 P、Q、R 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,这三个平面交于一点空间 M. 且 M 点是唯一存在的,因此有序实数组 (x,y,z) 与空间的点 M 一一对应. 这组数 (x,y,z) 就称为点 M 的坐标,并依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 (x,y,z) 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

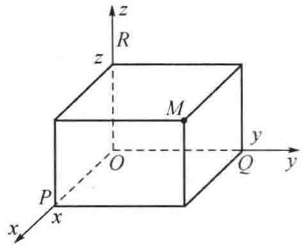


图 7-3

显然,原点的坐标为 $O(0,0,0)$;x 轴、y 轴和 z 轴上的点的坐标分别是 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$. 坐标面 xOy 面、yOz 面与 zOx 面上点的坐标分别是 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

7.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点,过 M_1,M_2 分别作平行于各坐标面的平面,以这些平面为表面组成一个长方体,它的棱与坐标轴平行,线段 M_1M_2 为其一条对角线(如图 7-4 所示). 由图可知

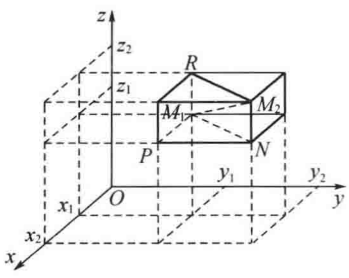


图 7-4

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|$$
$$|PN| = |y_2 - y_1|$$
$$|NM_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$\begin{aligned}|M_1M_2| &= \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2} \\ &= \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\end{aligned}$$

即空间任意两点的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \tag{7-1}$$

特别地,点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{7-2}$$

例 1　求证以 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$、$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形 $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形.

证　由两点间距离公式得

$$|AB|^2 = (4-7)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2 = 14$$

$$|BC|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6$$

$$|AC|^2 = (5-4)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2 = 6$$

由于 $|AC| = |BC|$，所以 $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形.

例 2　设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0,2,\sqrt{7})$ 的距离为到点 $P_2(0,1,1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解　因为 P 在 x 轴上，故可设 P 点坐标为$(x,0,0)$，按题意有

$$|PP_1| = 2|PP_2|$$

而

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + 2^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{x^2 + 11}$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2}$$

故

$$\sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$$

解此方程，得

$$x = \pm 1$$

则所求点的坐标为$(1,0,0)$ 和$(-1,0,0)$.

7.1.3　向量及有关概念

在研究力学、运动学等自然科学中常遇到一类既有大小，又有方向的量，如力、速度、力矩、加速度等，称这一类量为**向量(或矢量)**.

在数学上，常用一条有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 将以 A 为起点，以 B 为终点的向量，记为$\overrightarrow{AB}$. 此外，有时也用一个黑体字母或用字母上面加箭头来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等. 因此在几何上，向量就是在空间中有一定方向和长度的线段.

在实际问题中，有些向量与其起点有关，例如质点运动的位移与该点的位置有关，而有些向量与其起点无关，如作用力就与作用点的位置无关. 数学中我们只研究与起点无关的向量，并称这些向量为**自由向量**(简称向量). 因此如果两个向量满足下面两个条件：① 长度相等，② 方向相同，则称这两个向量是相等的.

向量的大小称为向量的**模**，向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$. 模

等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**,记作$\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的起点与终点重合,它的方向可以看作是任意的. 直角坐标系中,以坐标原点 O 为起点向点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$,称该向量为点 M 对于点 O 的**向径或矢径**.

如果两个向量的方向相同并且模相等,我们就称**这两个向量相等**. 根据这个规定,一个向量和经过平行移动后所得的向量都是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称**这两个向量平行**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的,因此,零向量被认为是与任何向量都平行的向量. 当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点在同一条直线上,因此,又称两平行向量为**共线向量**.

类似的还有共面向量的概念. 设有 $k(k \geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在同一个平面上,就称**这 $\boldsymbol{k}$ 个向量共面**.

7.1.4 向量的线性运算

1) 向量的加减运算

根据力学中关于力、速度的合成法则,我们定义两个向量的和如下:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量,任取一点 A,作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$,以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 为边作平行四边形 $ABCD$,称其对角线$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(如图 7-5 所示),记为

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

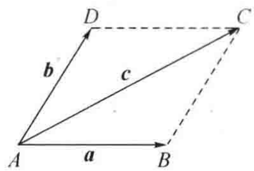


图 7-5

这种求两个向量和的法则称为**平行四边形法则**.

由图 7-5 容易看出,$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,于是得向量加法的三角形法则:在第一个向量$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ 的终点 B 引第二个向量$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,则封闭这折线 ABC 的向量$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 它的起点合于第一向量的起点,终点合于第二个向量的终点(如图 7-6 所示).

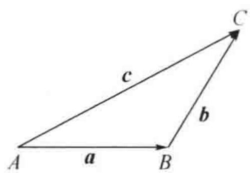


图 7-6

这种求两个向量和的法则称为**三角形法则**.

可以证明向量的加法符合下列运算规律:

① 交换律:$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

② 结合律:$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

这是因为,按向量加法的三角形法则,由图 7-5 可得

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

即向量的加法符合交换律.

又如图 7-7 所示，利用三角形法则，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再加上 $\boldsymbol{c}$，即得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，因此向量的加法符合结合律.

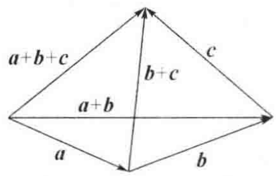


图 7-7

由图 7-7 可知，向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 就是封闭向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所在的折线的向量，由此可得多个向量的加法法则：**以任何次序相继作 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$，并以前一个向量的终点作为次一个向量的起点，则从第一个向量的起点向最后一个向量的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$**（如图 7-8 所示）.

在实际问题中，还经常遇到大小相等而方向相反的向量，如作用力和反作用力等. 称与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

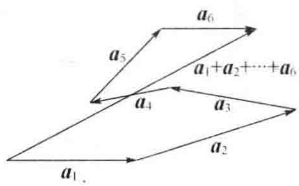


图 7-8

有了负向量的概念，可以定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（如图 7-9 所示）.

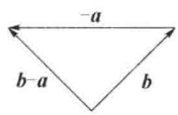


图 7-9

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，利用三角形法则，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 7-10）.

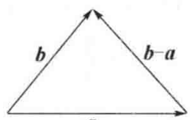


图 7-10

由三角形两边之和大于第三边的原理，可知

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2）向量与数的乘法

在应用中常遇到向量与数量的乘法，例如将速度 $\boldsymbol{v}$ 增大两倍，是指速度的方向不变，大小增大两倍，可以记为 $2\boldsymbol{v}$. 由此，我们引入向量与数量相乘（简称**数乘**）的定义如下：

定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它表示这样一个向量：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向，而它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.