大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计（第四版）

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计（第四版）

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/周誓达编著. —4 版. —北京：中国人民大学出版社，2018. 1
大学本科经济应用数学基础特色教材系列
ISBN 978-7-300-25100-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 265625 号

大学本科经济应用数学基础特色教材系列
经济应用数学基础（三）
概率论与数理统计（第四版）
（经济类与管理类）
周誓达　编著
Gailülun yu Shulitongji

出版发行　中国人民大学出版社
社　　址　北京中关村大街 31 号　　邮政编码　100080
电　　话　010－62511242（总编室）　　010－62511770（质管部）
　　　　　010－82501766（邮购部）　　010－62514148（门市部）
　　　　　010－62515195（发行公司）　　010－62515275（盗版举报）
网　　址　http://www.crup.com.cn
　　　　　http://www.ttrnet.com(人大教研网)
经　　销　新华书店
印　　刷　北京溢漾印刷有限公司　　版　　次　2005 年 6 月第 1 版
规　　格　185 mm×260 mm　16 开本　　2018 年 1 月第 4 版
印　　张　11.75　　印　　次　2018 年 1 月第 1 次印刷
字　　数　272 000　　定　　价　29.00 元

第四版前言

大学本科经济应用数学基础特色教材系列是为大学本科各专业编著的高等数学教材，包括《微积分》《线性代数与线性规划》《概率论与数理统计》. 这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合实际工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂.

经济应用数学基础（三）《概率论与数理统计》共分五章，介绍了实际工作所需要的随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、几种重要的概率分布、中心极限定理与参数估计、参数假设检验与一元线性回归分析，书首附有预备知识排列组合. 本书着重讲解基本概念、基本理论及基本方法，发扬独立思考的精神，培养解决实际问题的能力与熟练操作运算能力.

本书本着“打好基础，够用为度”的原则，去掉了对于实际工作并不急需的某些内容与某些定理的严格证明，而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容，讲得流畅，讲得透彻，实现“在战术上以多胜少”的策略. 本书不求深、不求全，只求实用，重视在实际工作中的应用，注意与专业课接轨，体现“有所为，必须有所不为”.

本书本着“服务专业，兼顾数学体系”的原则，不盲目攀比难度，做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通，达到“跳一跳就能够着苹果”的效果. 本书在内容编排上做到前后呼应，前面的内容在后面都有归宿，后面的内容在前面都有伏笔，形象直观地说明问题，适当注意知识面的拓宽，使得“讲起来好讲，学起来好学”.

质量是教材的生命，质量是责任心的反映，质量不过硬，教材就站不住脚. 本书在质量上坚持高标准，不但内容正确无误，而且编排科学合理，尤其在概率基本公式的论证上，在连续型随机变量概率密度的引进上，以及在参数假设检验与一元线性回归分析的处理上都有许多独到之处，便于理解与掌握. 衡量教材质量的一项重要标准是减少以至消灭

差错，本书正文以及附录中的常用统计数值表都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现零差错.

例题、习题是教材的窗口，集中展示了教学意图. 本书对例题、习题给予高度重视，例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，其中除计算题与实际应用题外，尚有考查基本概念与基本运算技能的填空题与单项选择题. 填空题要求将正确答案直接填在空白处；单项选择题是指在四项备选答案中，只有一项备选答案是正确的，要求将正确备选答案前面的字母填在括号内. 书末附有全部习题答案，便于检查学习效果.

相信读者学习本书后会大有收获，并对学习概率论与数理统计产生兴趣，快乐地学习概率论与数理统计，增强学习信心，提高科学素质. 记得尊敬的老舍先生关于文学创作曾经说过：写什么固然重要，怎样写尤其重要. 这至理名言对于编著教材同样具有指导意义. 诚挚欢迎各位教师与广大读者提出宝贵意见，作者本着快乐概率论与数理统计的理念，将不断改进与完善，坚持不懈地提高质量，突出自己的特点，更好地为教学第一线服务.

本书尚有配套辅导书《概率论与数理统计学习指导》，它包括两部分内容：各章学习要点与全部习题详细解答，引导读者在全面学习的基础上抓住重点，达到事半功倍的效果. 本书教学课件与《概率论与数理统计学习指导》通过中国人民大学出版社网站供各位教师与广大读者免费下载使用，进行交流，请登录 http://www.crup.com.cn/jiaoyu 获取.

周誓达

目　录

预备知识

排列组合

学习概率论要用到排列组合的基本知识，更重要的是要用到排列组合的思维方法，因此将排列组合的内容归纳总结如下：

1. 基本原理

例 1 从甲村到乙村共有两类方式：第 1 类方式是走旱路，有 3 条路线；第 2 类方式是走水路，有 2 条路线，如图 0 - 1. 问从甲村到乙村共有多少种走法？

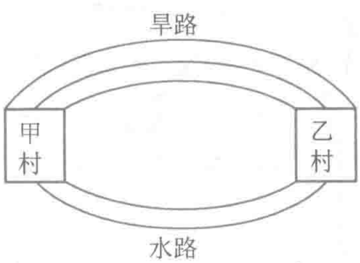

图 0 - 1

解：完成从甲村到乙村这件事情，走旱路与走水路这两类方式是并列的，沿着它们中的每一条路线都可以到达目的地，因此从甲村到乙村共有

$$3 + 2 = 5$$

种走法.

这样的例子是很多的，概括起来，就得到加法原理.

加法原理 完成一件事情共有 r 类方式：第 1 类方式有 m_1 种方法，第 2 类方式有 m_2 种方法，…，第 r 类方式有 m_r 种方法，则完成这件事情共有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r$$

种方法.

例 2 从甲村到丙村必须经过乙村，而从甲村到乙村有 5 条路线，从乙村到丙村有 4 条路线，如图 0－2. 问从甲村到丙村共有多少种走法？

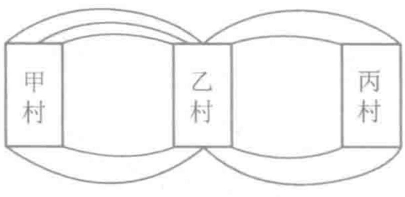

图 0－2

解：完成从甲村到丙村这件事情，必须依次经过两个步骤：第 1 个步骤是从甲村到乙村，有 5 条路线；第 2 个步骤是从乙村到丙村，有 4 条路线. 只有这两个步骤都完成了，才能到达目的地，缺少哪一个步骤都不行. 由于从甲村到乙村的每一条路线都对应从甲村到丙村的 4 条路线，因此从甲村到丙村共有

$$5 \times 4 = 20$$

种走法.

这样的例子是很多的，概括起来，就得到乘法原理.

乘法原理 完成一件事情必须依次经过 l 个步骤：第 1 个步骤有 n_1 种方法，第 2 个步骤有 n_2 种方法，…，第 l 个步骤有 n_l 种方法，则完成这件事情共有

$$n_1 n_2 \cdots n_l$$

种方法.

在应用基本原理时，必须注意加法原理与乘法原理的根本区别. 若完成一件事情有多类方式，其中每一类方式的任一种方法都可以完成这件事情，则用加法原理；若完成一件事情必须依次经过多个步骤，缺少其中任一个步骤都不能完成这件事情，则用乘法原理.

例 3 某班共有 26 名同学，分成 3 个组，其中第一组有 9 名同学，第二组有 8 名同学，第三组有 9 名同学，现在全校举行歌咏比赛，每名同学都有资格参加. 问：

(1) 若从全班选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，共有多少种选法？

(2) 若从每组各选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，共有多少种选法？

解：(1) 完成从全班选派 1 名同学参加全校歌咏比赛这件事情，共有三类方式：第 1 类方式是从第一组选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，有 9 种选法；第 2 类方式是从第二组选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，有 8 种选法；第 3 类方式是从第三组选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，有 9 种选法. 这三类方式是并列的，其中每一类方式的任一种选法都可以完成这件事情，根据加法原理，所以从全班选派 1 名同学参加全校歌咏比赛共有

$$9 + 8 + 9 = 26$$

种选法. 其实，从全班 26 名同学中选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，当然有 26 种选法.

(2) 完成从每组各选派 1 名同学参加全校歌咏比赛这件事情，必须依次经过三个步骤：第 1 个步骤是从第一组选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，有 9 种选法；第 2 个步骤是从第二组选派 1 名同学参加全校歌咏比赛，有 8 种选法；第 3 个步骤是从第三组选派 1 名同学参加全校

歌咏比赛，有 9 种选法. 这三个步骤是必须依次完成的，缺少其中任一个步骤都不能完成这件事情，根据乘法原理，所以从每组各选派 1 名同学参加全校歌咏比赛共有

$$9 \times 8 \times 9 = 648$$

种选法.

2. 元素不重复的排列

例 4　用 3 个数字 5,7,9 可以组成多少个数字不重复的两位数?

解:组成数字不重复的两位数，必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是确定十位数，这时数字 5,7,9 都可以放在十位上，有 3 种方法;第 2 个步骤是确定个位数，由于要求个位数与十位数不能重复，这时只能从所给 3 个数字去掉放在十位上的数字后剩余 2 个数字中取出 1 个数字放在个位上，有 2 种方法. 只有这两个步骤都完成了，才能组成数字不重复的两位数，缺少哪一个步骤都不行. 根据乘法原理，所以组成数字不重复的两位数共有

$$3 \times 2 = 6$$

种方法，即可以组成 6 个数字不重复的两位数，它们是

57,59,75,79,95,97

在例 4 中，数字 5,7,9 可以称为元素，组成数字不重复的两位数就是从这 3 个不同元素中每次取出 2 个不同元素排队，排在前面的是十位数，排在后面的是个位数. 由于这样的排列与数字不重复的两位数是一一对应的，因此求数字不重复两位数的个数等价于求这样排列的个数.

定义 0.1　从 n 个不同元素中，每次取出 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素排成一列，所有这样排列的个数称为排列数，记作 P_n^m.

如何计算排列数 P_n^m?从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素排成一列，必须依次经过 m 个步骤:第 1 个步骤是确定排列第 1 位置上的元素，这时是从 n 个不同元素中取出 1 个元素放在这个位置上，有 n 种方法;第 2 个步骤是确定排列第 2 位置上的元素，考虑到排列第 1 位置上已经占用了 1 个元素，这时是从剩余的 $n-1$ 个不同元素中取出 1 个元素放在这个位置上，有 $n-1$ 种方法;…;第 m 个步骤是确定排列第 m 位置上的元素，考虑到排列前 $m-1$ 个位置上已经占用了 $m-1$ 个元素，这时是从剩余的 $n-(m-1)=n-m+1$ 个不同元素中取出 1 个元素放在这个位置上，有 $n-m+1$ 种方法. 根据乘法原理，共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

种方法. 由于一种方法对应一个排列，所以所有这样排列的个数即排列数

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

若 $m < n$，则称排列为选排列;若 $m = n$，则称排列为全排列，这时排列数

$$\mathrm{P}_n^n = n(n-1)\cdots \cdot 1 = n!$$

例 5　根据排列数的计算公式，有排列数

(1) $\mathrm{P}_5^2 = 5 \times 4 = 20$

(2) $\mathrm{P}_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

(3) $\mathrm{P}_6^1 = 6$

(4) $\mathrm{P}_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

例 6 从 10 人中选举正副组长各 1 名,问共有多少种选举结果?

解:从 10 人中选举正副组长各 1 名,意味着从 10 人中选出 2 人排队,不妨规定排在前面的是正组长,排在后面的是副组长,相当于从 10 个不同元素中每次取出 2 个不同元素的元素不重复选排列,这样的排列共有 P_{10}^{2} 个. 由于一个排列对应一种选举结果,所以共有

$$P_{10}^{2} = 10 \times 9 = 90$$

种选举结果.

值得注意的是:在甲、乙都当选的情况下,甲为正组长、乙为副组长与乙为正组长、甲为副组长是两种选举结果.

例 7 6 台不同品牌的洗衣机摆在展厅内排成一列,问:

(1) 共有多少种排法?

(2) 若要求其中某一台洗衣机摆在中间位置,有多少种排法?

解:(1)6 台不同品牌的洗衣机排成一列,相当于从 6 个不同元素中每次取出 6 个不同元素的元素不重复全排列,所以共有

$$P_{6}^{6} = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

种排法.

(2) 要求 6 台不同品牌洗衣机中某一台洗衣机摆在中间位置,必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是将这台洗衣机摆在中间位置中的一个位置,有 2 种方法;第 2 个步骤是将其余 5 台洗衣机摆在其他 5 个位置上,相当于从 5 个不同元素中每次取出 5 个不同元素的元素不重复全排列,有 P_{5}^{5} 种方法. 根据乘法原理,有

$$2P_{5}^{5} = 2 \times 5! = 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2 \times 120 = 240$$

种方法,即有 240 种排法.

例 8 小赵、小钱、小孙、小李及小周五位青年坐成一排照相,问:

(1) 若小赵与小钱相邻,有多少种排法?

(2) 若小赵与小钱不相邻且他们之间只安排小李或小周,有多少种排法?

(3) 若小赵与小钱不相邻且他们之间只安排小李与小周,有多少种排法?

(4) 若小赵、小钱在小孙的同一侧,共有多少种排法?

解:(1) 完成五位青年坐成一排照相且小赵与小钱相邻这件事情,必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是将相邻的小赵与小钱看成一个元素,他们与其他三位青年坐成一排,相当于从 4 个不同元素中每次取出 4 个不同元素的元素不重复全排列,有 P_{4}^{4} 种排法;第 2 个步骤是将相邻的小赵与小钱交换位置,有 2 种方法. 根据乘法原理,完成五位青年坐成一排照相且小赵与小钱相邻这件事情,有

$$P_{4}^{4} \times 2 = 24 \times 2 = 48$$

种排法.

(2) 完成五位青年坐成一排照相且小赵与小钱不相邻但他们之间只安排小李或小周这件事情,必须依次经过三个步骤:第 1 个步骤是将相邻的小赵、小李及小钱看成一个元素,他们与其他两位青年坐成一排,相当于从 3 个不同元素中每次取出 3 个不同元素的元素不重复全排列,有 P_{3}^{3} 种排法;第 2 个步骤是将不相邻的小赵与小钱交换位置,有 2 种方法;第 3 个步骤是将不相邻的小李与小周交换位置,有 2 种方法. 根据乘法原理,完成五位青年坐成一排

照相且小赵与小钱不相邻但他们之间只安排小李或小周这件事情，有

$$P_3^3 \times 2 \times 2 = 6 \times 2 \times 2 = 24$$

种排法.

(3) 完成五位青年坐成一排照相且小赵与小钱不相邻但他们之间只安排小李与小周这件事情，必须依次经过三个步骤：第 1 个步骤是将相邻的小赵、小李、小周及小钱看成一个元素，他们与小孙坐成一排，相当于从 2 个不同元素中每次取出 2 个不同元素的元素不重复全排列，有 P_2^2 种排法；第 2 个步骤是将不相邻的小赵与小钱交换位置，有 2 种方法；第 3 个步骤是将相邻的小李与小周交换位置，有 2 种方法. 根据乘法原理，完成五位青年坐成一排照相且小赵与小钱不相邻但他们之间只安排小李与小周这件事情，有

$$P_2^2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

种排法.

(4) 完成五位青年坐成一排照相且小赵、小钱在小孙的同一侧这件事情，共有三类方式：第 1 类方式是小赵与小钱相邻，有 $P_4^4 \times 2 = 48$ 种排法；第 2 类方式是小赵与小钱不相邻但他们之间只安排小李或小周，有 $P_3^3 \times 2 \times 2 = 24$ 种排法；第 3 类方式是小赵与小钱不相邻但他们之间只安排小李与小周，有 $P_2^2 \times 2 \times 2 = 8$ 种排法. 这三类方式是并列的，其中每一类方式的任一种排法都可以完成这件事情，根据加法原理，所以完成五位青年坐成一排照相且小赵、小钱在小孙的同一侧这件事情，共有

$$P_4^4 \times 2 + P_3^3 \times 2 \times 2 + P_2^2 \times 2 \times 2 = 48 + 24 + 8 = 80$$

种排法.

3. 元素可重复的排列

元素可重复包括元素重复与元素不重复两种情况，元素可重复的排列是指在排列中允许出现相同元素.

例 9　北京市电话号码为八位，问电话局 8461 支局共有多少个电话号码?

解：由于 8461 支局的电话号码前四位为 8461，因此只需确定后四位的数字，就组成 8461 支局电话号码. 显然，在电话号码中允许出现相同数字.

组成 8461 支局的电话号码，必须依次经过四个步骤：第 1 个步骤是确定电话号码第五位上的数字，这时是从 0 至 9 这 10 个数字中取出 1 个数字放在这个位置上，有 10 种方法；第 2 个步骤是确定电话号码第六位上的数字，考虑到在电话号码中允许出现相同数字，这时也是从 0 至 9 这 10 个数字中取出 1 个数字放在这个位置上，有 10 种方法；第 3 个步骤是确定电话号码第七位上的数字，也有 10 种方法；第 4 个步骤是确定电话号码第八位上的数字，也有 10 种方法. 因此这个问题相当于从 10 个不同元素中每次取出 4 个元素的元素可重复排列，根据乘法原理，共有

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

种方法. 由于一种方法对应一个电话号码，所以 8461 支局共有10 000 个电话号码.

定义 0.2　从 n 个不同元素中，每次可以重复地取出 m 个元素排成一列，所有这样排列的个数称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的元素可重复排列数.

如何计算从 n 个不同元素中取出 m 个元素的元素可重复排列数?从 n 个不同元素中取出 m 个元素排成一列，必须依次经过 m 个步骤：第 1 个步骤是确定排列第 1 位置上的元素，这时

是从 n 个不同元素中取出 1 个元素放在这个位置上，有 n 种方法；第 2 个步骤是确定排列第 2 位置上的元素，由于在排列中允许出现相同元素，因而这时还是从 n 个不同元素中取出 1 个元素放在这个位置上，也有 n 种方法；…；第 m 个步骤是确定排列第 m 位置上的元素，由于在排列中允许出现相同元素，因而这时仍然是从 n 个不同元素中取出 1 个元素放在这个位置上，当然有 n 种方法. 根据乘法原理，共有

$$\underbrace{nn\cdots n}_{m\text{个}} = n^m$$

种方法. 由于一种方法对应一个排列，所以所有这样排列的个数等于 n^m，即从 n 个不同元素中取出 m 个元素的元素可重复排列数等于 n^m.

例 10 邮政大厅有 4 个邮筒，现将三封信逐一投入邮筒，问共有多少种投法？

解：将三封信逐一投入邮筒，必须依次经过三个步骤：第 1 个步骤是将第一封信投入 4 个邮筒中的 1 个邮筒，有 4 种方法；第 2 个步骤是将第二封信投入 4 个邮筒中的 1 个邮筒，也有 4 种方法；第 3 个步骤是将第三封信投入 4 个邮筒中的 1 个邮筒，也有 4 种方法. 若以邮筒作为元素，则这个问题相当于从 4 个不同元素中每次取出 3 个元素的元素可重复排列. 根据乘法原理，共有

$$4\times 4\times 4 = 4^3 = 64$$

种方法，即共有 64 种投法.

例 11 用 3 个数字 1,2,3 组成三位数，问：

(1) 可以组成多少个数字可重复的三位数？

(2) 可以组成多少个数字一定重复的三位数？

解：(1) 用 3 个数字 1,2,3 组成数字可重复的三位数，相当于从 3 个不同元素中每次取出 3 个元素的元素可重复排列，这样的排列共有 3^3 个，所以可以组成

$$3^3 = 27$$

个数字可重复的三位数.

(2) 注意到用 3 个数字 1,2,3 组成的数字可重复的三位数包括两部分，一部分是数字不重复的三位数，这样的三位数有 P_3^3 个；另一部分则是数字一定重复的三位数. 说明所求数字一定重复的三位数的个数等于数字可重复的三位数的个数减去数字不重复的三位数的个数，所以可以组成

$$3^3 - P_3^3 = 27 - 3! = 27 - 3\times 2\times 1 = 27 - 6 = 21$$

个数字一定重复的三位数.

4. 组合

例 12 从 10 人中选举 2 名代表参加座谈会，问共有多少种选举结果？

解：这个问题同例 6 中选举正副组长各 1 名是不一样的，尽管都是选出 2 人，但在选举正副组长各 1 名时，这 2 人须排队，不妨规定排在前面的是正组长，排在后面的是副组长；而在选举 2 名代表时，这 2 人不需排队.

设从 10 人中选举 2 名代表共有 x 种选举结果. 考虑从 10 人中选举正副组长各 1 名的排列问题，在例 5 中已经得到共有 P_{10}^2 种选举结果，还可以依次经过下面两个步骤解决这个问题：第 1 个步骤是从 10 人中选出 2 人，相当于从 10 人中选举 2 名代表，已设有 x 种方法；第 2

个步骤是当选的2人分工，相当于2人排队，有P_2^2种方法.根据乘法原理，共有xP_2^2种方法，即共有xP_2^2种选举结果.于是有关系式

$$xP_2^2 = P_{10}^2$$

得到

$$x = \frac{P_{10}^2}{P_2^2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

所以从10人中选举2名代表共有45种选举结果.

这是容易理解的，如甲、乙当选，对于选举正副组长各1名，有两种选举结果；而对于选举2名代表，却只是一种选举结果.说明选举正副组长各1名的每两种选举结果对应选举2名代表的一种选举结果，由于选举正副组长各1名共有90种选举结果，所以选举2名代表当然共有45种选举结果.

定义0.3　从n个不同元素中，每次取出$m(m \leqslant n)$个不同元素并成一组，所有这样组的个数称为组合数，记作C_n^m.

如何计算组合数C_n^m?考虑从n个不同元素中每次取出$m(m \leqslant n)$个不同元素的排列问题，共有P_n^m种方法，还可以依次经过下面两个步骤解决这个问题：第1个步骤是从n个不同元素中取出m个不同元素并成一组，有C_n^m种方法；第2个步骤是取出的m个不同元素排成一列，有P_m^m种方法.根据乘法原理，共有$C_n^m P_m^m$种方法.于是有关系式

$$C_n^m P_m^m = P_n^m$$

所以得到组合数

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots \cdot 1}$$

同时规定$C_n^0 = 1$.组合数C_n^m还可以表示为

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots \cdot 1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots \cdot 1}{m(m-1)\cdots \cdot 1 \cdot (n-m)\cdots \cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

性质　组合数满足关系式

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

证：将组合数C_n^m表示为

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

从而可将组合数C_n^{n-m}表示为

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

所以得到关系式

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

当$m > \frac{n}{2}$时，利用组合性质计算组合数C_n^m，可以减少计算量.

例 13 根据组合数的计算公式,有组合数

(1)$C_5^2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

(2)$C_{10}^3 = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

(3)$C_8^4 = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

(4)$C_4^1 = \dfrac{4}{1} = 4$

根据组合性质,有组合数

(5)$C_6^4 = C_6^2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

(6)$C_3^3 = C_3^0 = 1$

对于实际问题,必须正确判别是排列问题还是组合问题,关键在于要不要计较所取出元素的先后顺序,即要不要将所取出元素排队. 若要排队,则是排列问题;若不要排队,则是组合问题.

例 14 已知 100 件产品中有 3 件是次品,其余 97 件是合格品,问:若任意抽取 3 件产品中恰好有 1 件次品,有多少种取法?

解: 从 100 件产品中任意抽取 3 件产品,并不计较所取产品的次序,从而这个问题是组合问题,从 100 件产品抽取 3 件产品中恰好有 1 件次品,意味着抽取 3 件产品中有 1 件次品与 2 件合格品. 完成这件事情必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是从 3 件次品中取到 1 件次品,有 C_3^1 种取法;第 2 个步骤是从 97 件合格品中取到 2 件合格品,有 C_{97}^2 种取法. 根据乘法原理,所以任意抽取 3 件产品中恰好有 1 件次品,有

$$C_3^1 C_{97}^2 = 3 \times \frac{97 \times 96}{2 \times 1} = 3 \times 4\,656 = 13\,968$$

种取法.

例 15 7 支足球队进行比赛,问:

(1) 若采用主客场赛制,共有多少场比赛?

(2) 若采用单循环赛制,共有多少场比赛?

解: (1) 采用主客场赛制意味着每两支球队之间进行两场比赛,比赛双方各有一个主场. 这时从 7 支球队中每次挑选 2 支球队进行比赛,要计较所挑选球队的顺序,即需要将它们排队,不妨规定排在前面的球队是在主场比赛,因此这个问题是排列问题. 由于一个排列对应一场比赛,所以共有

$$P_7^2 = 7 \times 6 = 42$$

场比赛.

(2) 采用单循环赛制意味着每两支球队之间只进行一场比赛. 这时从 7 支球队中每次挑选 2 支球队进行比赛,不计较所挑选球队的顺序,即不需要将它们排队,因此这个问题是组合问题. 由于一个组合对应一场比赛,所以共有

$$C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

场比赛.

例 16　书桌上有 11 本不同的书,问:

(1) 从中任取 3 本书,共有多少种取法?

(2) 从中任取 3 本书分给甲、乙、丙三个人,每人一本,共有多少种分法?

解:(1) 由于从 11 本不同的书中任取 3 本书,并不计较所取出书的先后顺序,即不需要将它们排队,因此这个问题是组合问题. 由于一个组合对应一种取法,所以共有

$$C_{11}^{3}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

种取法.

(2) 由于从 11 本不同的书中任取 3 本书分给甲、乙、丙三个人,每人一本,相当于从 11 本不同的书中任取 3 本不同的书排队,不妨规定排在前面、中间、后面位置的书分别分给甲、乙、丙,因此这个问题是排列问题. 由于一个排列对应一种分法,所以共有

$$P_{11}^{3}=11\times10\times9=990$$

种分法.

例 17　口袋里装有 5 个黑球与 4 个白球,任取 4 个球,问:

(1) 共有多少种取法?

(2) 其中恰好有 1 个黑球,有多少种取法?

(3) 其中至少有 3 个黑球,有多少种取法?

(4) 其中至多有 1 个黑球,有多少种取法?

解:由于在取球时不计较所取出球的先后顺序,即不需要将它们排队,因此这个问题是组合问题.

(1) 从 9 个球中任取 4 个球,共有

$$C_{9}^{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

种取法.

(2) 任取 4 个球中恰好有 1 个黑球,意味着所取 4 个球中有 1 个黑球与 3 个白球,完成这件事情必须依次经过两个步骤:第 1 个步骤是从 5 个黑球中取出 1 个黑球,有 C_5^1 种取法;第 2 个步骤是从 4 个白球中取出 3 个白球,有 C_4^3 种取法. 根据乘法原理,有

$$C_5^1C_4^3=C_5^1C_4^1=5\times4=20$$

种取法.

(3) 任取 4 个球中至少有 3 个黑球,包括恰好有 3 个黑球与恰好有 4 个黑球两类情况,完成这件事情有两类方式:第 1 类方式是任取 4 个球中恰好有 3 个黑球,即所取 4 个球中有 3 个黑球与 1 个白球,有 $C_5^3C_4^1$ 种取法;第 2 类方式是任取 4 个球中恰好有 4 个黑球,即所取 4 个球中有 4 个黑球与 0 个白球,有 $C_5^4C_4^0$ 种取法. 根据加法原理,有

$$C_5^3C_4^1+C_5^4C_4^0=C_5^2C_4^1+C_5^1C_4^0=\frac{5\times4}{2\times1}\times4+5\times1=10\times4+5\times1=45$$

种取法.

(4) 任取 4 个球中至多有 1 个黑球,包括恰好有 1 个黑球与没有黑球两类情况,完成这件事情有两类方式:第 1 类方式是任取 4 个球中恰好有 1 个黑球,即所取 4 个球中有 1 个黑球与

3 个白球，有 $C_5^1C_4^3$ 种取法；第 2 类方式是任取 4 个球中没有黑球，即所取 4 个球中有 0 个黑球与 4 个白球，有 $C_5^0C_4^4$ 种取法. 根据加法原理，有

$$C_5^1C_4^3+C_5^0C_4^4=C_5^1C_4^1+C_5^0C_4^0=5\times4+1\times1=21$$

种取法.

例 18 从 3 名男生、4 名女生中任意挑选 4 名学生参加座谈会，问：

(1)共有多少种选法？

(2)其中至少有 1 名男生，有多少种选法？

解：由于在挑选学生时不计较所挑选学生的先后顺序，即不需要将它们排队，因此这个问题是组合问题.

(1)从 7 名学生中任意挑选 4 名学生，共有

$$C_7^4=C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

种选法.

(2)任意挑选 4 名学生中至少有 1 名男生，包括恰好有 1 名男生、恰好有 2 名男生及恰好有 3 名男生三类情况，完成这件事情有三类方式：第 1 类方式是任意挑选 4 名学生中恰好有 1 名男生，即所挑选 4 名学生中有 1 名男生与 3 名女生，有 $C_3^1C_4^3$ 种选法；第 2 类方式是任意挑选 4 名学生中恰好有 2 名男生，即所挑选 4 名学生中有 2 名男生与 2 名女生，有 $C_3^2C_4^2$ 种选法；第 3 类方式是任意挑选 4 名学生中恰好有 3 名男生，即所挑选 4 名学生中有 3 名男生与 1 名女生，有 $C_3^3C_4^1$ 种选法. 根据加法原理，有

$$C_3^1C_4^3+C_3^2C_4^2+C_3^3C_4^1=C_3^1C_4^1+C_3^1C_4^2+C_3^0C_4^1=3\times4+3\times\frac{4\times3}{2\times1}+1\times4=34$$

种选法.

此题尚有简便解法：注意到符合要求即任意挑选 4 名学生中至少有 1 名男生包括三类情况，由于包括情况比较多，从而直接计算其选法比较麻烦，而不符合要求意味着挑选 4 名学生中没有男生，即所挑选 4 名学生中有 0 名男生与 4 名女生，只包括一类情况，有 $C_3^0C_4^4$ 种选法，计算其选法当然比较简单. 显然，符合要求的选法种数等于总选法种数减去不符合要求的选法种数，所以任意挑选 4 名学生中至少有 1 名男生，有

$$C_7^4-C_3^0C_4^4=35-1=34$$

种选法.

例 18 说明：若符合要求的情况比较多，从而直接计算符合要求的方法种数比较麻烦，这时不符合要求的情况一定比较少，计算不符合要求的方法种数当然比较简单，于是应该首先计算总方法种数与不符合要求的方法种数，然后总方法种数减去不符合要求的方法种数，就得到所求符合要求的方法种数.