中國抗日戰爭史料叢刊

697

虞和平 主編

經濟·綜合

統計月報（第三十號至第三十二號）

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

大象出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中國抗日戰爭史料叢刊

697

經濟
綜合

虞和平 主編

統計月報（第三十號至第三十二號）

大象出版社

統計月報

其采

第三十號

國民政府主計處統計局編印

民國二十六年四月

革命尚未成功

同志仍須努力

國民政府主計處

DIRECTORATE-GENERAL OF BUDGETS, ACCOUNTS & STATISTICS

主計長 陳其采 C. T. Chen, Director-General

主計官 Directors

楊汝梅	J. M. Yang	秦汾	F. Chin	吳大鈞	T. C. Wu
趙德馨	T. S. Chao	聞亦有	Y. Y. Wen	朱君毅	J. P. Chu

統計局 Directorate of Statistics

局長 吳大鈞 T.C. Wu, Director 副局長 朱君毅 J. P. Chu, Co-Director

科長 Division Chiefs

第一科 1st. Division:	人口及社會統計 Population and Social Statistics	陳華寅 W. Y. Chen
第二科 2nd. Division:	農業及資源統計 Statistics on Agriculture & Natural Resources	張延哲 Y. C. Chang
第三科 3rd. Division:	經濟及財政統計 Economic and Financial Statistics	芮寶公 P. K. Jui
第四科 4th. Division:	政治及國際統計 Political and International Statistics	曾昭承 C. C. Tseng
第五科 5th. Division:	統計行政 Statistical Administration	汪龍 L. Wang

統計月報第三十號

民國二十六年四月

目　　錄

統計論著

SPECIAL ARTICLES

動差釋義及薛伯氏校正數

動差(Moment)在統計學上應用甚廣，英美學派已奉為金科玉律。吾國各統計學者於介紹各種統計上之理論及方法時，其中應用動差者亦復不少。惟大都均努力於高深的問題，對於此動差之基本理論，已認為簡單而無人置詞。著者好作卑論，覺吾國在統計學理尚未昌明之時代，一般初學者，對於動差之觀念，每不易融會貫通，而於應用時自難措置裕如。著者欲予初學者及一般行政人員與應用統計家以一種粗淺而圓滿的答覆，特不厭煩絮而將動差之基本理論及其計算方法，詳述於次。

動差原為力學上所用之一名詞，日人譯為「能率」，吾國有譯為「能率」或「力矩」者，即欲以描寫力能發生轉動之效果也。

蓋力之動差(Moment of force)，乃力之趨勢，能發生轉動(rotation)之效果。而力(或重)關於一點(或一軸)所生之動差，即等於該力(或重)的力量(或重量)乘至該點(或軸)極短距離之積也。至動差之符號，則以其轉動與鐘錶之指針同向者為正，反向者為負。如下圖一，懸30斤之重量於水平槓桿距A點5尺之處，能使槓桿與錶針同向發生轉動，其效果為：

$$5 \times 30 = 150 \text{斤}。$$

此即力30斤對A點之一級動差也。此動差為正。

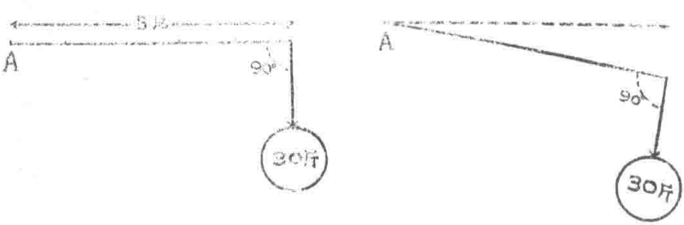

圖 一

若從上例改懸於其相反之方向，則此時力對A點之1級動差為：

$$-5\times 30=-150\text{尺斤}。$$

此乃力之趨勢，發生對A點與鐘針相反轉動之效果，是為負動差。

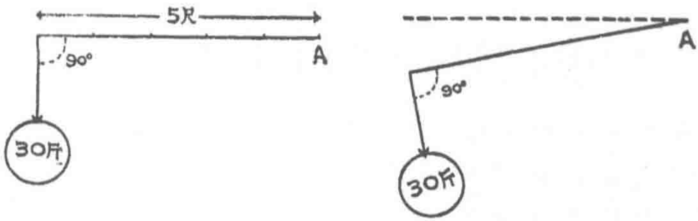

圖　二

若以幾個重物懸於距A點不等遠之幾處，則力之全動差，為其各力動差之代數和。例如懸35斤於距A點2尺之處，懸15斤於距A點4尺之處，懸20斤於距A點5尺之處，又懸10斤於反方向距A點3尺之處，則此等力之全動差，為4力之趨勢，發生對A點1力向左，3力向右轉動之效果，即4力動差之代數和，為：

$$-3\times 10+2\times 35+4\times 15+5\times 20=150\text{斤}。$$

由此結果，可知與單獨懸30斤於距 點5尺之處者相同。

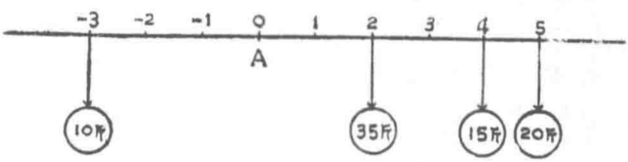

圖　三

若以 X_k 表示力距A點之垂直距離，f_k 表示力量（重量），如下圖四，則所有力頂）右轉動之全效果，為：

$$X_1f_1+X_2f_2+X_3f_3+\cdots\cdots+X_nf_n$$

即力對A之一級動差，為：

$$\sum_{1}^{n}X_kf_k\ (\text{略書之為}\sum Xf)$$

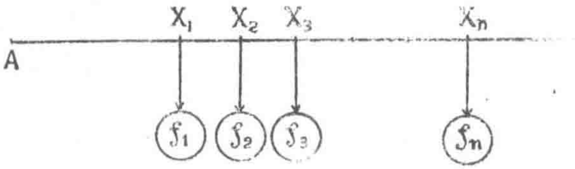

圖　　四

若所假設之力爲面積，卽以X_kf_k視爲力量而懸於距A點X_k遠之處，則所生力對A點之動差，爲：

$$X_1\bullet X_1f_1+X_2\bullet X_2f_2+X_3\bullet X_3f_3+\cdots\cdots+X_n\bullet X_nf_n,$$

$$\text{卽}X_1^2f_1+X_2^2f_2+X_3^2f_3+\cdots+X_n^2f_n\text{。}$$

卽力對A點之二級動差$=\Sigma X^2f$。

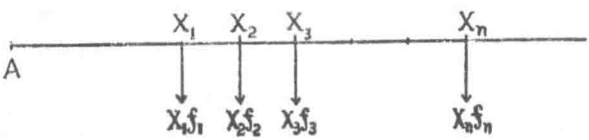

圖　　五

此卽靜力學上所謂「慣性動差」(Moment of inertia)。由此推之，自A點至力之垂直距離之3方、4方、……n方乘力量(重量)之積之和，是謂力對A點之3級、4級、……n級動差。故力之動差之一般形式如次：

$$\Sigma X^nf\text{。}$$

又，槓桿所受之全動差爲零時，則槓桿平衡而達於靜止之狀態，故力學上稱動差爲「靜力動差」(Statical moment)。

統計學上用以描寫一羣資料的特徵之統計常數(Statistical constant)，如標準差σ、偏度α_3、峯度E等，皆係分配對算術平均數之離差之若干方乘次數之積之和或對標準差之比率，除以總次數而得。若以總次數除其絕對次數而化爲相對次數(Relative frequency)，則恰與力之動差相類似。如：

$$M=\frac{\Sigma Xf}{N}=\Sigma X\frac{f}{N}=X_1\frac{f_1}{N}+X_2\frac{f_2}{N}+X_3\frac{f_3}{N}+\cdots\cdots+X_n\frac{f_n}{N}$$

統計論著　　3

以圖表之如次：

圖　　六

$$又\sigma^2=\frac{\Sigma(X-M)^2f}{N}=\Sigma(X-M)^2\frac{f}{N}=(X-M)^2\frac{f_1}{N}+(X-M)^2\frac{f_2}{N}$$

$$+(X-M)^2\frac{f_3}{N}+\cdots\cdots+(X-M)^2\frac{f_n}{N}$$

以圖表之如次：

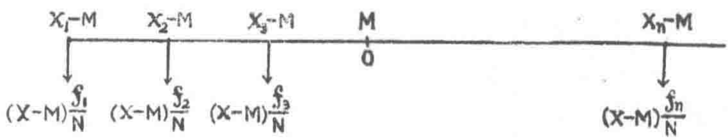

圖　　七

將上X或X－M等視為距離，$\frac{f}{N}$ 為力（重），則所有統計常數，恰如力學上之一種動差。統計家以其有如是相類似之點，故從力學上借用此「動差」一名詞，以應用於統計學上，是為「統計動差」(Statistical moment)。吾國有譯為「動數」、「轉矩」等名者，皆有相當之意義。亦有以相對次數可視為機率，其與機率相乘之數，即為可希望得到之數，故又有譯為「希望數」或「希望差」者。但以其在力學上含有一種轉動之意，而在統計上又常用以表差異量數，故譯為「動差」，似較簡明。茲述統計動差之意義於次。

統計上各觀測數(X)對於某數(A)之離差之零方，1方、2方……n方乘相對次數$\left(\frac{f}{N}\right)$之積之和，稱為分配對A之零級、1級、2級…n級動差。其一般形式如下：

$$\Sigma(X-A)^n\frac{f}{N}=\frac{\Sigma(X-A)^n f}{N}。$$

若令某數A為0，則成為次數分配對原點以原測量單位表示之各級動差，以M表之如下：

$$M_0 = \Sigma(X-0)^0 \frac{f}{N} = \frac{\Sigma X^0 f}{N}$$ = 分配對原點之0級動差以（原單位）°表之 = 1

$$M_1 = \Sigma(X-0) \frac{f}{N} = \frac{\Sigma X f}{N}$$ = 分配對原點之1級動差以（原單位）表之 = M

$$M_2 = \Sigma(X-0)^2 \frac{f}{N} = \frac{\Sigma X^2 f}{N}$$ = 分配對原點之2級動差以（原單位）²表之

....

$$M_n = \Sigma(X-0)^n \frac{f}{N} = \frac{\Sigma X^n f}{N}$$ = 分配對原點之n級動差以（原單位）ⁿ表之

若令某數（A）等於算術平均數M，則次數分配對於算術平均數以原測量之單位表示之各級動差，稱爲「主要動差」(Principal moment)。乃統計中常用之動差，習慣上以ν表之。舉示於下：

$$\nu_0 = \frac{\Sigma(X-M)^0 f}{N}$$ = 分配之相對總次數 = 1

$$\nu_1 = \frac{\Sigma(X-M) f}{N}$$ = 分配對M之1級動差以（原單位）表之 = 0

$$\nu_2 = \frac{\Sigma(X-M)^2 f}{N}$$ = 分配對M之2級動差以（原單位）²表之

$$\nu_3 = \frac{\Sigma(X-M)^3 f}{N}$$ = 分配對M之3級動差以（原單位）³表之

$$\nu_4 = \frac{\Sigma(X-M)^4 f}{N}$$ = 分配對M之4級動差以（原單位）⁴表之

....

$$\nu_n = \frac{\Sigma(X-M)^n f}{N}$$ = 分配對M之n級動差以（原單位）ⁿ表之

各級主要動差雖甚重要而有用，然以算術平均數常爲多位整數及小數之合成數，於計算時異當麻煩。故吾人不用眞算術平均數，而常用一假定算術平均數（Assumed average），並以組距爲單位（組單位），而計算其各級動差，稱爲「補助動差」(Crude moment)通常以ν'表之。

設觀測資料之次數分配表如次：

組次第數	$-p$	$-p+1$	……	-1	0	1	……	$q-1$	q
組中值	X_{-p}	X_{-p+1}	……	X_{-1}	X_0	X_1	……	X_{q-1}	X_q
組次數	f_{-p}	f_{-p+1}	……	f_{-1}	f_0	f_1	……	f_{q-1}	f_q

其下指標 $-p$，$-p+1$，……-1，0，1……$q-1$，q，卽以 X_0 組爲零組之各組級數，可以 x 之整變數表之。X_0 爲算術平均數所在組之中値，卽常取用之假定算術平均數。X_x 爲各組中値。f_x 爲各組次數。i 爲組距。

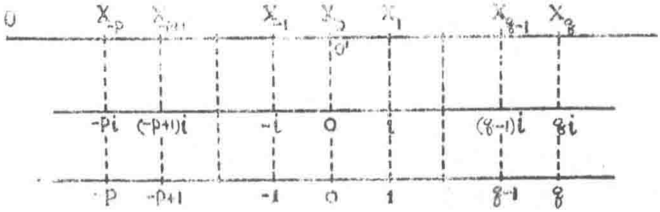

圖　　八

細察上圖，可知移原點O於O′(X_0)且以組矩 i 爲單位，則有次之關係式。

$$\frac{X-X_0}{i}=x \qquad \text{或} X=X_0+xi$$

$$\nu_1'=\frac{\Sigma\left(\frac{X-X_0}{i}\right)f}{N}=\frac{\Sigma xf}{N}=\text{分配對}X_0\text{之1級動差以（組單位）表之}=C$$

$$\nu_2'=\frac{\Sigma\left(\frac{X-X_0}{i}\right)^2f}{N}=\frac{\Sigma x^2f}{N}=\text{分配對}X_0\text{之2級動差以（組單位）}^2\text{表之}$$

…………………………………………………………………………

$$\nu_n'=\frac{\Sigma\left(\frac{X-X_0}{i}\right)^nf}{N}=\frac{\Sigma x^nf}{N}=\text{分配對}X_0\text{之n級動差以（組單位）}^n\text{表之}$$

設x組單位＝xi原單位

$$\nu_n'=\frac{\Sigma(xi)^nf}{N}=\frac{\Sigma x^nf}{N}i^n=\text{分配對}X_0\text{之n級動差以（原單位）}^n\text{表之}$$

由是可知以 i^n 乘以（組單位）^{n} 表示之 n 級動差，則變爲以（原單位）^{n} 表示之 n 級動差。

茲再求以補助動差表主要動差之公式如次。

$$\text{因}\qquad M=\frac{\Sigma Xf}{N}=\frac{\Sigma(X_0+xi)f}{N}=\frac{X_0\Sigma f}{N}+\frac{\Sigma xif}{N}$$

$$=X_0+\nu_1'i=X_0+Ci$$

又 $X-M=(X_0+xi)-(X_0+Ci)=(x-C)i$

故 $$\nu_2=\frac{\Sigma(X-M)^2f}{N}=\frac{\Sigma(x-C)^2f}{N}i^2=\frac{\Sigma(x^2-2Cx+C^2)f}{N}i^2$$

$$=\left(\frac{\Sigma x^2f}{N}-2C\frac{\Sigma xf}{N}+\frac{C^2\Sigma f}{N}\right)i^2=(\nu_2'-C^2)i^2=\sigma_2$$

$$\nu_3=\frac{\Sigma(X-M)^3f}{N}=\frac{\Sigma(x-c)^3f}{N}i^3=\frac{\Sigma(x^3-3Cx^2+3C^2x-C^3)f}{N}i^3$$

$$=\left(\frac{\Sigma x^3f}{N}-3C\frac{\Sigma x^2f}{N}+3C^2\frac{\Sigma xf}{N}-\frac{C^3\Sigma f}{N}\right)i^3=({}_3\nu'-3C\nu_2'+2C^3)i$$

$$\nu_4=\frac{\Sigma(X-M)^4f}{N}=\frac{\Sigma(x-C)^4f}{N}i^4=\frac{\Sigma(x^4-4Cx^3+6C^2x^2-4C^3x+C^4)f}{N}i^4$$

$$=\left(\frac{\Sigma x^4f}{N}-4C\frac{\Sigma x^3f}{N}+bC^2\frac{\Sigma x^2f}{N}-4C^3\frac{\Sigma xf}{N}+\frac{C^4\Sigma f}{N}\right)i^4$$

$$=(\nu_4'-4C\nu_3'+6C^2\nu_2-3C^4)i^4$$

....

上之各級主要動差ν_n'係以原單位表示者。若取 $i=1$， 代入上各式，則得用組單位表示之各級主要動差如次。

$\nu_2=\nu_2'-C^2=\sigma^2$ 卽以(組單位)表示之標準差之平方

$\nu_3=\nu_3'-3C\nu_2'+2C^3$

$\nu_4=\nu_4'-4C\nu_3'+6C^2\nu_2'-3C^4$

吾人於求偏度及峯度時， 常用動差對於標準差之比率， 是爲與單位無關之相對數。故常用以組單位表示之動差爲便。且以標準差σ之若干方除相當之各級動差，則變爲以標準差爲單位(標準單位)之動差。常以α表之。其普通形式如下。

$\alpha_n=\frac{\nu_n}{\sigma^n}$=以(標準單位)^n 表示的對 M之 n 級動差。

又以標準差σ除各變量X對 M 之離差，則得以標準差表示之變量。以 t 表之如次式。

$$t_i = \frac{X_i - M}{\sigma} \qquad \text{略書爲} \ t = \frac{X - M}{\sigma}。$$

由是得以標準單位表示之各級動差如次。

$$\alpha_1 = \frac{\nu_1}{\sigma} = \frac{\Sigma tf}{N} = \text{以(標準單位)表示的對M之1級動差} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\nu_2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma t^2 f}{N} = \text{以(標準單位)}^2\text{表示的對M之2級動差} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = \frac{\Sigma t^3 f}{N} = \text{以(標準單位)}^3\text{表示的對M之3級動差}$$

$$\alpha_4 = \frac{\nu_4}{\sigma^4} = \frac{\Sigma t^4 f}{N} = \text{以(標準單位)}^4\text{表示的對M之4級動差}$$

....

$$\alpha_n = \frac{\nu_n}{\sigma^n} = \frac{\Sigma t^n f}{N} = \text{以(標準單位)}^n\text{表示的對M之n級動差}$$

由是得統計常數如標準差σ、偏度α_3、峯度E等，用動差表示之公式如次。

$$\sigma = \sqrt{\nu_2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = \frac{\nu_3}{\nu_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \alpha_4 - 3 = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\nu_4}{\nu_2^2} - 3$$

由上之方法求得之各級動差ν及ν'等，稱爲對算術平均數及對假定算術平均數之未校正動差 (Unadjusted moment)。根據於此種動差而求出之標準差、偏度及峯度，則稱爲未校正之標準差、未校正之偏度及未校正之峯度。

凡資料整理爲次數分配表時，我們常假定各量數集中於其組中點，因此而引起一種微小之誤差，謂之「分組誤差」(Grouping error)。自應依某種假設估計此項因分組所生誤差之量而除去之。如此除去分組誤差後所求得之動差，謂之校正動差(Adjusted moment)。薛伯氏(Sheppard)曾發明一種校正數，通常稱之曰薛伯氏校正數(Sheppard's corrections)。其符號常用 M_c 表之。但其證法中須用一重要之尤拉與馬格

老臨定理（Euler-Maclaurin Theorem），茲先舉示於次。

假設觀測X所得之連續數列（Continuous series），經整理而成次數分配表，其組數爲 $m+1$，組距爲 i，其最小組之下限爲 a，上限爲 $a+i$，其最大組之下限爲 $b=a+mi$，上限爲 $b+i=a+(m+1)i$。是則 $m+1$ 組之下限，順次爲 a，$a+i, a+2i, \cdots\cdots a+mi$，可以變量 x 表之。而 $m+1$ 組之次數爲 $f(a)$、$f(a+i)$、$f(a+2i)$、…… $-f(a+mi)$，可以函數 $f(x)$ 表之。作成直方圖如次。

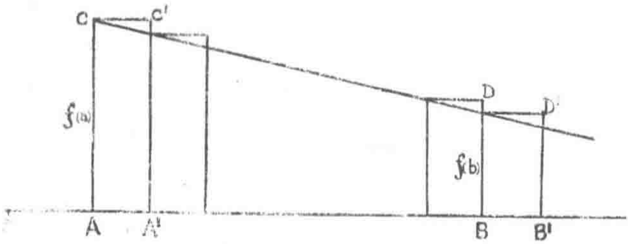

圖　　九

$OA=a$　　$OB=b=a+mi$　　$AA'=BB'=i$　　$AB=mi$

$\square ACC'A'=if(a)$　　$\square BDD'B'=if(b)=if(a+mi)$

將各組次數函數，依戴勞氏定理（Taylor's theorem）展開如次。

$$f(a+i)=f(a)+if'(a)+\frac{i^2}{2}f''(a)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a+2i)=f(a+i)+if'(a+i)+\frac{i^2}{2}f''(a+i)+\cdots\cdots$$

$$f(a+3i)=f(a+2i)+if'(a+2i)+\frac{i^2}{2}f''(a+2i)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a+mi)=f(a+(m+1)i)+if'(a+(m+1)i)+\frac{i^2}{2}f''(a+(m+1)i)+\cdots\cdots\cdots$$

相加
$$f(a+mi)=f(a)+i\left\{f'(a)+f'(a+i)+\cdots\cdots+f'(a+(m+1)i)\right\}$$
$$+\frac{i^2}{2}\left\{f''(a)+f''(a+i)+\cdots\cdots+f''(a+(m+1)i)\right\}$$
$$+\frac{i^3}{3!}\left\{f'''(a)+f'''(a+i)+\cdots\cdots+f'''(a+(m+1)i)\right\}+\cdots\cdots\cdots$$