

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

10.4



数学的世界 IV

从阿默士到爱因斯坦
数学文献小型图书馆

— J.R. 纽曼 编

— 王作勤 陈光还 译

高等教育出版社

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

10.4

SHUXUE DE SHIJIE IV

数学的世界 IV

从阿默士到爱因斯坦
数学文献小型图书馆

— J.R. 纽曼 编

— 王作勤 陈光还 译

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

数学的世界. IV / (美) J. R. 纽曼编; 王作勤, 陈光还译. -- 北京: 高等教育出版社, 2018. 8

ISBN 978-7-04-049801-1

I. ①数… II. ①J… ②王… ③陈… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 107092 号

策划编辑 王丽萍
版式设计 杜微言

责任编辑 李鹏 李华英
责任校对 殷然

封面设计 王琰
责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 唐山市润丰印务有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16
印张 25.25
字数 390千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版次 2018年8月第1版
印次 2018年8月第1次印刷
定价 68.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 49801-00

《数学概览》编委会

主编： 严加安 季理真

编委： 丁 玖 李文林

林开亮 曲安京

王善平 徐 佩

姚一隼

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言。” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就是明证。

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话: “有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?”

中国有句古话：老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界，我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下，如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多，但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷，我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如，希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期；克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的，他的报告与当时的数学前沿密切相关，对美国数学的发展起了巨大的推动作用；李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解；拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献，而且还是分析概率论的奠基人，他的《关于概率的哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新，写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点，良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体，数学的各个领域从来就是不可分割的，我们要以整体的眼光看待数学的各个分支，这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外，我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版，希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是：该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论，具有历史价值，有趣且易懂，它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学，它不仅具有科学性，并且也具有艺术性。罗素说：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高无上的美。”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性，数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美，它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感？阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真

2012 年秋于北京

在这个古代与现代研究相冲突的时期,对某一个研究必定会有一些事情要谈论,它不是从毕达哥拉斯开始,也不是以爱因斯坦结束,而是包括了所有最年老的和最年轻的.

哈代 (一个数学家的辩白)

引言

引言既是问候,也是告别.我致力于本书如此长久,以致难以割舍.从我搜集选集的素材开始至今已经十五载有余,这些素材要使人领略到数学的多样性、实用性和优美.起初似乎感到任务不会太艰巨,耗时也不会过分漫长,因为我对本书所涉主题的一般文献还算熟悉,再说我也不打算编纂一部庞大的原始资料集.不久我发现我的估计错了.关于数学的本质、用途和历史的通俗读物并没有带来我所期望的多样性.于是我必须在浩如烟海的技术和学术文献中搜寻数学思想的范例,使普通读者能够理解和喜欢.关于数学的基础和哲学、数学同艺术和音乐的关系以及数学对于社会和经济问题的应用等容易理解的短文难以发现.还有,我并未计划对选集的每篇文章写引言,但在工作的进展过程中,显现出许多文章在结合其背景阅读时是发人深省的,但是当单独阅读时却意味锐减.因此必须对相关文章提供背景资料,解释写它的动机以及它在数学思想的发展中的地位.于是我原本打算两年完成的工作却延续了二十年中的大部分时光;所设想的适度大小的篇幅最终呈现的规模即使是不够自我约束的作者也不得不承认是大大膨胀了.

我试图在本书中体现数学的广博、数学思想的丰富以及其层面的复杂.数学是一个工具,一种语言和一幅图像;它是一件艺术作品,是自身的终结;它是对于完美的酷爱的实现过程.它似乎被视为讽刺的对象,或是幽默的元素和辩论的话题;又似激发聪明才智的马刺和启发说书人想象力的酵母;它使人们狂热并给大家带来愉悦.普遍认为它是由人类所创建的但独立于人类单独存在的知识体.我希望在这部选集中你能找到适合各种品位和接受力的素材.

选入本书的文章有许多篇幅较长,这源于我厌恶残缺不全或支离破碎。理解数学逻辑或相对论,并不是有教养的人所必需的特质。但是如果一个人希望了解这些科目的某些方面,他就必须学习一些内容。精通基本的语言,掌握一项技术,一步步地跟踪一个典型的推理序列,以及理解一个问题的来龙去脉,付出这种努力的读者将不会失望。固然本选集中有些文章是难懂的,但是令人感兴趣的是有多少文章即使没有超常才能或特殊训练也能够被理解。自然,那些有足够勇气挑战更加艰难主题的人将会赢得特殊的回报,这有点像理解了某个论证和得到了证明后所获得的满足感。对于每一个人这都是一种创造性活动,就像他做出了此前从未有过的发现;从而陶冶了人们的情操。

选集是颇具个人偏见的一类著作,即使主题是数学,也不见得比诗歌或小说这种个人偏见来得少。例如我厌烦幻方,但我从不厌烦概率论。我更喜欢几何而非代数,喜欢物理而非化学,喜欢逻辑而非经济,喜欢无穷数学而非数论。我回避了某些主题,淡化一些主题,却对另外一些主题表现出了很高的热情。我不为这些偏见愧疚;我自认缺乏数学才能,但我自由地介绍我所钟爱的数学。

许多人对本书的编纂提供了帮助。对于我的朋友和过去的同事罗伯特·哈赤 (Robert Hatch) 在编辑方面的建议,我难以表达我万分的感激。这种帮助并非是无要紧要的或者仅仅是形式上的,而是本书在本质上和风格上就接受了他的意见。我的老师及朋友欧内斯特·内格尔 (Ernest Nagel) 不仅给出了不少建议和批评,还特为本书提供了关于符号逻辑的精彩随笔。萨姆·罗森堡 (Sam Rosenberg) 阅读了我所写的内容,并且发挥他的智慧改善了它。我的妻子以一如既往的聪明智慧和宽容大度鼓励我工作。Rutgers 大学文学教授和农业系的前图书馆管理员拉尔夫·肖 (Ralph Shaw) 博士,在原稿的准备中给了非常宝贵的帮助。我还感谢我的出版者——特别是杰克·古德曼 (Jack Goodman)、汤姆·托尔·贝文斯 (Tom Torre Bevans) 和彼得·施维德 (Peter Schwed) 的贡献——他们的宽容,本预定 1942 年出版的书一直等到了 1956 年,以及他们在艰难的设计和制作工作中表现出的想象力和才能。

J. R. N.

目 录

第 17 部分: 数学与音乐	1
编者评注: 詹姆斯·琼斯爵士	3
1 音乐的数学 詹姆斯·琼斯爵士	7
第 18 部分: 作为文化线索的数学	37
编者评注: 奥斯瓦尔德·斯宾格勒	39
1 数的意义 奥斯瓦尔德·斯宾格勒	43
2 数学实在的轨迹: 一个人类学的脚注 莱斯利·怀特	77
第 19 部分: 消遣·谜题·幻想	95
编者评注: 奥古斯都·德·摩根	97
1 各种各样的悖论 奥古斯都·德·摩根	101
编者评注: 一个多维的传奇	117
2 平面国 埃德温·艾伯特	119
编者评注: 路易斯·卡罗尔	131
3 乌龟对阿基里斯说了什么·其他谜团 路易斯·卡罗尔	137
编者评注: 连续性	147
4 穆罕默德的杠杆 理查·库朗、赫伯特·罗宾斯	149
编者评注: 游戏和谜题	151
5 从古至今的趣味数学 爱德华·卡斯纳、詹姆士·纽曼	153
6 算式复原 劳斯·鲍尔	179
7 七个七 贝韦克	185
编者评注: 托马斯·约翰·艾恩森·布朗维奇	191
8 简单数学和草地网球 布朗维奇	193

编者评注: 斯蒂芬·巴特勒·里柯克	199
9 高尔夫球手的数学 斯蒂芬·里柯克	201
10 常识与宇宙 斯蒂芬·里柯克	207
第 20 部分: 数学思想方法	219
编者评注: 一场有争议的论战	221
1 对观察完全无知的研究 James Joseph Sylvester	223
编者评注: Charles Sanders Peirce	231
2 数学的本质 Charles Sanders Peirce	237
编者评注: Ernst Mach	247
3 科学的经济 Ernst Mach	251
编者评注: Norman Robert Campbell	259
4 计量 Norman Campbell	261
5 数值定律和数学在科学中的应用 Norman Campbell	277
编者评注: Hermann Weyl	291
6 思维的数学方法 Hermann Weyl	293
第 21 部分: 数学和逻辑	309
编者评注: 符号逻辑, George Boole 和一个噩梦	311
1 逻辑的数学分析 George Boole	315
2 符号逻辑的历史 Clarence Irving Lewis, Cooper Harold Langford	319
3 符号表示法, 鳕鱼的眼睛和遛狗条例 Ernest Nagel	339
4 符号逻辑 Alfred Tarski	363

第 17 部分*

数学与音乐

编者评注: 詹姆斯·琼斯爵士

1 音乐的数学

詹姆斯·琼斯爵士

*原书第 XXIV 部分, 本部分译者为王作勤.

编者评注

詹姆斯·琼斯爵士

詹姆斯·琼斯 (James Jeans) 是一位数学物理学家, 其作品深受塔卢拉赫·班克黑德 (Tallulah Bankhead) 的推崇. 我并不知道班克黑德小姐是被琼斯在气体理论上的贡献所打动, 还是被其在旋转液体均衡理论方面的研究所折服, 但据记载她把琼斯的最广为流传的著作——《神秘的宇宙》, 称为是一本所有女孩都应该阅读的书籍.¹⁾

琼斯的职业生涯多产而富有变化, 但大致可以分为两个阶段. 他 1877 年出生于兰开夏郡奥姆斯柯克的一个宽松的家庭中. 他的父亲是英国下议院新闻记者席的一名新闻记者, 但其兴趣却远不止日常政治中的欺诈与琐事. 琼斯的父亲曾经出版了两本关于科学的通俗读物²⁾, 这不仅反映了他对科学知识的推崇, 而且也反映出他的以下信念: 即学者们有义务追随像丁铎 (Tyndall)、赫胥黎 (Huxley) 和克利福德 (Clifford) 这样的巨匠们的脚步, 激起“在普通民众中对科学的热爱”³⁾. 他的观点是一种严格的维多利亚式正统教义与自由思想的奇异复合物, 而这肯定使得他的儿子深感困惑. 琼斯是一个有点早熟并有点忧郁的孩子. 他经常以记忆七位对数和剖析并研究钟表机械以自娱. 在很小的年纪他就被训练每天早上读《泰晤士报》的新闻头条给他父母听. 他的传记作者之一克劳塞对此有如下评论: “幼儿头脑的均衡的某些方面已经被这种练习所干扰.”⁴⁾

琼斯在 19 岁时进入剑桥大学三一学院. 在那里他学习数学并很快显示出了惊人的能力. 令人羡慕的是他能够在拥有詹姆斯·格莱舍 (J.

¹⁾ 杰姆斯·杰拉尔德·克劳塞 (J. G. Crowther), 《二十世纪的英国科学家》, 伦敦, 1952, 第 95 页.

²⁾ 《钢铁时代的缔造者》(1884); 《电工的生活》(1887).

³⁾ 克劳塞, 同上, 第 96 页.

⁴⁾ 克劳塞, 同上, 第 97 页.

Glaisher)、劳斯·鲍尔 (Rouse Ball)、阿尔弗雷德·诺斯·怀特海 (Alfred North Whitehead) 和埃德蒙·惠特克 (Edmund Whittaker) 等教员的学院度过本科生涯。他在以困难著称且竞争极其激烈的荣誉学位考试当中名列第二, 排名比他的同学哈代 (G. H. Hardy) 高两位, 后者后来成为他这一代最杰出的英国数学家。

琼斯最初是在气体分子的能量分布问题中展现了他超强的想象力和令人生畏的数学技巧。在克拉克·麦克斯韦 (Clerk Maxwell) 和路德维希·玻尔兹曼 (Ludwig Boltzmann) 建立的理论中, 他们把气体分子视作是极其微小的小台球——“刚性且几何完美的球”。尽管这些理论与观察到的事实非常吻合, 但它们却与能量守恒定律以及热力学第二定律有明显的冲突。在琼斯的第一篇专著《气体的动力学理论》(1904) 中, 他改进了旧的理论并克服了旧理论所导致的一些原则性困难。

被广泛认为是琼斯代表作的《天体演化和恒星动力学问题》(1917) 也是与气体行为相关的。该书讨论了天体演化中涉及“不可压缩物质被其自身重力作用”⁵⁾的问题。“孤立空间中并关于某个轴快速旋转”的大量液体会发生什么呢? 大量的气体 (如太阳) 在旋转时形态上会发生怎样的变化, 当它们收缩时又会怎样? 这些问题对于行星的演化以及我们的太阳系会产生怎样的影响? 这类问题曾经吸引了从牛顿 (Newton)、拉普拉斯 (Laplace) 到庞加莱 (Poincaré) 以及乔治·达尔文 (George Darwin) 爵士等伟大科学家们的关注。琼斯的专著, 虽然其结论并没有完全解决此类问题, 但依然被公认为是天文学历史上的一个里程碑, 对于解决相应的背景数学问题的贡献必将被列为“永久性的成就, 无论将来天体演化论如何发展”⁶⁾。

有些人随着年龄的增长会转向宗教, 而琼斯则转向了宗教与大众科学的结合体。在他五十二岁被封爵的时候, 他还以纯粹而满意的眼光来回顾他的研究以及教学生涯。他已经在 1901 年当选为三一学院的成员, 于 1905—1910 年在普林斯顿大学任应用数学教授, 曾在剑桥大学担任斯托克斯讲师, 并于 1919—1929 年成为英国皇家学会的一名联合秘书 (他当选皇家学会会员时年仅 28 岁)。他与一位富有的美国女孩的婚姻——是一桩很幸福的结合——使得他不用担心经济问题; 琼斯不必去被迫完成可能影响其科研工作的教

⁵⁾爱德华·亚瑟·米尔恩,《詹姆斯·琼斯爵士》,剑桥,1952年,第110页。

⁶⁾米尔恩,同上,第114页及其他各处。

学任务。到 1928 年他一共出版了 7 本专著并发表了 76 篇原创性论文,他也由此而获得了杰出数学家的良好声望。这时候可能正如米尔恩报道的那样,他感觉到自己作为一名数学家已经在走下坡路了,于是他开始放弃纯科学研究而转向普及工作。⁷⁾

这一转变获得了巨大的成功。他的第一本科普书籍是《我们身边的宇宙》(1929);紧接着是《神秘的宇宙》以及好几本类似的著作,其中最后一本于 1947 年出版。琼斯的写作风格是“透彻、清晰和精准。他的科学叙述就如同处于完全控制下的大河一样流泻而出。”⁸⁾他的那些想象力十分生动甚至有时令人屏住呼吸。它们的目标是在浩瀚与细微处抓住读者眼球,而这当然是一种卓越的谈话策略。由于琼斯首先是一个数学家,因此也显示了他对物理思想的阐述不如他对令人惊奇的数学更多着墨的反差。一个物质的尺度,按照他的说法,“小至电子的直径即一英尺的百万分之一的百万分之一,大至以万亿英里为单位来度量的星云的直径”;如果在一个宇宙模型中,太阳的“直径相当于 3400 分之一英寸的尘埃”,那么该宇宙模型需要沿各个方向延伸四百万英里才能包含几个岛宇宙邻居;即使“清空滑铁卢车站到只留下 6 颗尘埃,它所包含的尘埃依然远比空间中所包含的星星要密集”;一品脱水里面的水分子“首尾相连地排起来……将会形成可以环绕地球超过 2 亿圈的一条链子”;一顶针体积的水所包含的能量可以使一艘大型轮船在大西洋两岸来回航行 20 次;一个被加热到相当于太阳中心的温度的针头“散发出的热量将足以杀死任何冒险停留在它一千英里以内的任何人”;太阳每天因为辐射而减少 3600 亿吨重量,而地球才减少 90 磅。我们绝大多数人就是在这样的景象中长大而且从未摆脱它们对我们情感的影响,虽然琼斯的一些最让人心惊肉跳的对比在原子时代看起来已经平平常常了。

公众对于琼斯的著作由衷地激动,但是科学家和哲学家对此的热情却有所保留。随着一个宗教性、情感性而神秘的暗示悄悄地却一次次地进入琼斯的一些书中,他们受到了猛烈的抨击。苏珊·斯特宾(Susan Stebbing)在其《哲学与物理学家》一书的尖刻评论中,就琼斯和埃丁顿(Eddington)两人对物理理论所进行的哲学解释进行了批判⁹⁾。“这两位作者都通过情感的渲

⁷⁾米尔恩,同上,第 73 页。米尔恩在得到琼斯的第二任妻子的许可后作此报道,后者是 1934 年琼斯第一任夫人逝世后嫁于琼斯的。

⁸⁾克劳塞,同上,第 93 页。

⁹⁾企鹅出版集团,哈蒙兹沃思,1944 年;第一至三章以及其他各处。

染去达到他们的目的;他们通过大量的拟人和比喻来表达自己的观点,使得他们沦为复古主义的布道者”。琼斯的很多“手法很明显都只是为了让读者沦陷于绝望的惊悸当中”,斯特宾小姐这样写道。其他的批判者相对委婉一点(也不够诙谐),但都提出了实质上相同的异议。人们很难不认为琼斯越来越多地在利用他的魅力以及作为科普作家的精湛技艺,也很难不认为他屈从于内心的需要去写更多的书,即使他的想法已经逐渐枯竭了。¹⁰⁾

琼斯于1946年9月16日因心脏病病逝,在他临死之前几天还在核对他的最后一本书《物理科学的成长》的校样。

这个传略虽然很简短,但相对于一个原创科学家的琼斯,我更多地着墨于作为一个科普作家的琼斯。从他对科学教育的实际贡献以及目前所遭受的批判来看,这样似乎是可取的。他曾经是一名第一流的数学物理学家,而他也因此而被永远铭记。即使琼斯的一些思想存在混乱和严重误导,我们若因此而忽视他在更宽广的领域内对于理解科学所起到的推动作用也是不公正的;即使在晚年他近乎成为一个雇佣文人。总体来说,我认为更多的人将从琼斯那生动的入门书中瞥见科学的意义,感受到科学所带来的振奋,科学的真以及美,而不是被他模糊的哲学所引入歧途。

下文节选自琼斯的《科学与音乐》。这是一篇关于声音科学的极好解释,全文采用一种清晰而直白的风格来谱写,没有掺杂神学的不和谐声音;在关于这个主题的实验与数学两个方面的讨论都是专业的。我节录了那些能阐明数学在分析音乐结构时所起的非凡贡献的部分,从毕达哥拉斯(Pythagoras)的意义深远的发现到赫尔姆霍茨(Helmholtz)及其后继者的值得赞扬的工作。琼斯在他一生中酷爱音乐;他几乎每天都要演奏风琴三到四个小时,甚至在他的科学工作中也采用音乐的意象进行思考。¹¹⁾他的第二任妻子是一名才华横溢的风琴手,正是由于他们在音乐上共同的兴趣才导致他写了这本书。

¹⁰⁾“《神秘的宇宙》在出版时收到了猛烈的抨击。据说卢瑟福曾说琼斯告诉他,‘那个同事埃丁顿写了一本书卖出了50000册,我要写一本书卖100000册。’而卢瑟福进一步补充道:‘他做到了。’”克劳塞,同上,第136页。

¹¹⁾克劳塞,同上,第93页。

我同胡克先生谈论过声音的本质，而他的确让我理解了由一根弦所发出悦耳的声音的本质，强大优美；而且他告诉我只要有足够多合适的用以生成各种音调的振动，他就能够通过一只飞行中的苍蝇发出的声音（那些苍蝇在飞行中会发出嗡嗡声）所对应的音乐中的音调来告诉你该苍蝇翅膀振动了多少次。我想这可能稍微有点夸大了；但是他的谈话中对于一般声音的论述是非常细致的。

——塞缪尔·佩皮斯 (Samuel Pepys, 《日记》, 1666 年 8 月 8 日)

数量在这个世上随处可见：要把话说清楚就要做量化描述。说一个国家大是没有意义的——到底有多大呢？说镭很稀缺也是不明确的——到底有多稀缺呢？我们无法回避数量。你可以转向诗歌与音乐，但在节奏和音阶方面你仍然要碰到数和量。

——阿尔弗雷德·诺斯·怀特海 (Alfred North Whitehead)

1 音乐的数学

詹姆斯·琼斯爵士

音叉与纯音

我们已经知道每一个音调，以及每一串音调，都可以用一条曲线来表示出来。显然我们的首要问题就是要找到这样的曲线与它所表示的音调或音调串之间的联系——简而言之，我们得学会解读声音曲线。

纯音

让我们首先用一个普通的音叉来作为声源。我们之所以选择音叉而不是小提琴或管风琴是因为，就如我们马上能看到的那样，它能发出一种完全纯粹的音调。如果我们把音叉臂撞到硬物上，或者把一个小提琴弓拉过它们，它们就开始处于振动状态。我们可以从它模糊的轮廓当中看出它正在振动。我们也可以通过用手指去触摸它们来感受它的振动，此时我们将会感受到