TENSOR ANALYSIS IN
ENGINEERING MECHANICS

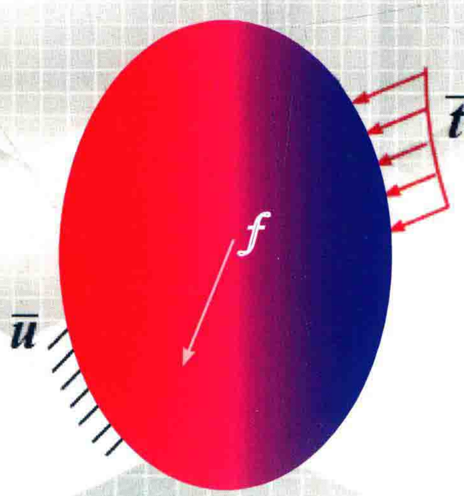
工程力学中的张量分析

刘建林 编著

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{G}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u}\right)$$



科 学 出 版 社

工程力学中的张量分析

刘建林 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

张量是数学、物理、材料、天文、地理和力学等学科进行模型定量描述的必备工具，在很多工程领域中有着广泛应用。本书是一本系统阐述张量分析基本概念的教材，其目的是体现张量记号和张量方程蕴含的优美，同时引入大量有关张量的工程实例，让读者体会到学以致用的妙处。本书共分四章：第一章介绍了一阶张量，即矢量的定义及其运算法则；第二章主要讲张量的定义、张量的运算、张量的分解以及常见的张量等内容；第三章主要讲张量函数以及场方程，主要针对直线坐标系下定义的张量导数及相关运算；第四章主要讲曲线坐标系中张量的基矢量的导数、张量函数对于矢径的导数以及物理分量。

本书可供工科专业的高年级本科生和研究生学习使用，其专业可以涵盖工程力学、机械工程、材料工程、土木工程、理论物理等，同时也可以作为从事张量相关研究的科研人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学中的张量分析/刘建林编著. —北京：科学出版社，2018.6
ISBN 978-7-03-057937-9

Ⅰ.①工… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①工程力学-张量分析 Ⅳ.①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 127908 号

责任编辑：赵敬伟／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：耕者工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018 年 6 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：192 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

张量 (tensor) 是数学、物理、材料、天文、地理和力学等学科进行模型定量描述的必备工具，也是数学的一个重要分支，而其在各个工程学科中的广泛应用又促进和完善了这一学科的发展。张量分析的发展已有 100 多年的历史，其概念的形成是高斯 (Johann Carl Friedrich Gauss，1777~1855)、哈密顿 (William Rowan Hamilton，1805~1865)、黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826~1866)、克里斯托费尔 (Elwin Bruno Christoffel，1829~1900) 等著名数学家在研究微分几何的过程中引入的。例如，高斯提出了曲面曲率的概念和测地术的理论；哈密顿于 1854 年创造了英文 “tensor” 这一名词术语；黎曼将高斯的三维欧氏空间的内蕴几何发展为 n 维空间的内蕴几何，并引入了度量张量；克里斯托费尔进一步研究了同一物理量在不同坐标系中的表达形式。凯莱 (Arthur Cayley，1821~1895) 引进了 “协变” 量，催生了向量的代数定义，并进行了大量关于张量不变量的研究。里奇 (Gregorio Ricci-Curbastro，1853~1925) 和他的学生莱维–齐维塔 (Tullio Levi-Civita，1873~1941) 进一步发展了张量分析的理论，引入了协变分量、逆变分量、混变分量、加减、乘法、缩并、协变导数等概念，从而使得张量分析的理论日趋完善。可以认为，1900 年里奇和莱维–齐维塔合写的文章《绝对微分法及其应用》标志着张量分析这一学科的诞生。而外尔 (Hermann Weyl，1885~1955) 于 1918 年第一次使用了 “张量分析”(tensor analysis) 这一术语。此外，张量分析还结合了哈密顿提出的哈密顿算符、高斯积分定理和斯托克斯 (George Gabriel Stokes，1819~1903) 积分定理、不变量和对称理论等，形成了优美的数学结构。著名物理学家、诺贝尔奖得主爱因斯坦 (Albert Einstein，1879~1955) 则利用张量这一工具，提出了引力的度量场理论，并提出了广义相对论引力场方程的完整形式，使得物理学的理论体系获得了重大突破。

目前，张量分析已经渗透到天文学、微分几何、大地测量学、理论物理、电磁学、连续介质力学、理性力学、电动力学、材料学、量子力学、表面物理、电机学等各个领域，并在工程技术的很多方面发挥了重要作用。例如，20 世纪 30 年代，克朗 (Gabriel Kron，1901~1968) 创立了电机和网络的张量几何理论，中国科学家萨本栋 (1902~1949) 于 1929 年也曾提出过电路的并矢分析。50 年代，英国创立了英国张量学会，日本创立了应用几何研究会和张量学会等，对张量这一数学工具在电机工程和其他工程科学中的应用起到了极大的推动作用。我国著名力学家钱伟长、郭仲衡、陈至达等人在理性力学领域运用张量也解决了很多科学问题。目前张量分

析已经成为很多理工科研究生必须掌握的数学基础，如果不掌握张量的基本知识，阅读最新的外文文献都会有很大困难，更谈不上推导复杂的公式和撰写论文了。

引入张量之后，可以把描述自然规律的冗长公式变得简洁和紧凑，能够更加突出其物理本质。面对具体问题的时候，必须引入坐标系 (如常见的直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系等)；而同一个物理量在不同的坐标系中的分量往往不同，因而必须知道这些分量在坐标变换时的变化规律。同样，描述自然规律的物理定律和定理在坐标系发生变化时，等式的左右两边必须同时变化才能保证这些规律在任意坐标系中都成立。但事实上，物理量和物理规律是客观的，与坐标系的选择无关——坐标系如同人的衣服，穿上不同的衣服，尽管外表看来不同，但本质上的人不变。而通过张量分析描述的物理定律和定理在不同坐标系下就具有不变性和普遍性，从而能够更加深刻地揭示自然规律的内涵。另外一个关于张量的特点，那就是它本身蕴含的动人心灵的优美——数学中的精炼清晰之美在张量分析中表达得淋漓尽致。张量公式中的各种物理量具有简洁和对称性，使得张量成为描述自然规律的一个非常合适和有力的工具。

尽管关于张量分析已有浩如烟海般的教材和参考书，但是个别教材的内容过于简化，甚至都没有阐述曲线坐标系的张量表达；而且很多书籍属于学术专著，内容驳杂繁深，不便于读者短时间内掌握基本理论；另外，绝大部分的参考书都注重于数学的精确描述，而忽视了张量在工程中的实际应用实例，从而使得学生在学习过程中感到高深莫测和抽象空洞，无法将精简的张量表达式与其在具体坐标系中的分量表达式联系起来。而对于普通高等学校的工科学生而言，尤为重要的是建立张量的概念，以及把张量的概念正确应用到实际的工程问题上。运用得当，在乎一心，希望能够通过本书的学习使得每个人消除数学表达与工程应用间的巨大鸿沟；同时也希望学生学会推导公式的方法和技巧，提高通过张量的基本定义进行演绎的能力。因此在本书中，我们列举了很多笛卡儿坐标系中张量的表达式和张量方程，并且阐述了其工程应用的相关模型。例如，本书中加入了近年来采用张量描述的学科前沿知识，如在微纳米力学中得到广泛应用的应变梯度理论和表面弹性理论、断裂力学中的 J 积分、石油开采中的渗流力学模型、描述材料破坏失效的损伤力学模型、弹性力学问题的微分提法等。另外，为了增强本书的趣味性，我们加入了很多关于张量概念的背景资料和科学史上著名人物的介绍作为补注。总之，从实际应用的角度出发，即如何基于工程实例去介绍张量的基本内容，我们认为编写《工程力学中的张量分析》一书是非常有必要的。

本书第 1 章介绍了一阶张量——矢量的定义及其运算法则，包括点积、叉积、混合积以及坐标变换等内容。第 2 章主要介绍张量的定义、运算、分解以及常见的张量等内容。第 3 章主要介绍张量函数及场方程，主要针对直线坐标系定义了张量的导数及相关运算，事实上这也是绝大部分工程问题所涉及的内容。第 4 章主要介

绍曲线坐标系中张量的基矢量的导数、张量场函数对矢径的导数以及物理分量。

值得说明的是，本书并非是一本全面介绍张量内容的大型教材，其主要目的是求精致求具体，以让学生通过工程实例加深对张量的形象化理解，因此适合于短学时的教学内容。本书可供工科专业的高年级本科生和研究生学习使用，其专业可以涵盖工程力学、机械工程、材料工程、土木工程、理论物理等，同时也可以作为从事张量相关研究的科研人员的参考资料。

由于作者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请广大读者不吝指教。

刘建林

2016 年 1 月

目　　录

第 1 章　一阶张量——矢量

为了描述实际自然界和工程技术里面的大量问题，人们经常需要建立各种物理模型以得到数学和力学方面的方程，而这一过程通常会涉及很多物理量。在实际应用中，常见的物理量一般可以分为三类，即标量 (scalar)、矢量 (vector) 和张量 (tensor)。

所谓的标量，又称为纯量，通常只有大小，而没有明确的方向。目前工程中常见的标量有：时间、质量、体积、面积、密度 (体密度、面密度、线密度)、温度、静水压力、动能、势能、速率、长度、宽度、厚度、弧长、功、功率、黏附功、黏度、声速、界面能、表面张力、电阻、光强、力对轴之矩、抗弯刚度、抗拉强度、弹性模量、泊松比、剪切模量、拉梅系数、许用应力、屈服强度、等效应力、熵、二阶张量的不变量、应变能、频率、周期、阻尼系数、能量释放率、断裂韧性、J 积分、安全系数、体积模量、摩擦角、固有频率、振幅、角度、转速 (转数) 等。

另外一种常见的物理量为矢量，也称为向量，通常既有大小又有方向。例如，常见的矢量有：力、力对点之矩、矢径、位移、速度 (绝对速度、相对速度、牵连速度)、加速度 (绝对加速度、相对加速度、牵连加速度、哥氏加速度)、动量矩 (动量对点之矩)、动量、冲量、电位移、电场强度、磁感应强度、磁场强度、轴力矢量、弯矩矢量、剪力矢量、广义扭矩矢量、线元矢量、面元矢量、热流密度矢量、电矩、温度梯度、压力梯度等。

而第三类常见的物理量就是张量，与矢量相比其表达方式更加复杂，因为仅通过一个方向无法将其表达清楚。张量可以认为是对矢量的扩张，因此英文中称为 “tensor”。我们可以认为标量为零阶张量，矢量为一阶张量；通常所说的张量往往是指二阶以上的张量。通常所见的张量有：应力、应变、应变率、惯性矩、弹性系数张量、变形梯度张量、位移梯度、压电系数张量、背应力、曲率张量、转动张量、速度梯度、变形率张量、表面应力、损伤变量、单位张量、构型力、应变梯度、应力梯度等。

由于矢量是一阶张量，而且它表现出来的很多物理性质能够使我们预先理解

张量的概念，故此在这儿我们首先介绍矢量的概念。

1.1 矢　量

1. 矢量的定义

由于矢量既有大小又有方向，故此我们一般用一个黑体符号来表示它，这称为矢量的实体形式。对于标量，我们一般用非黑体的字母加以表示。如图 1-1 所示，对于矢量 $\boldsymbol{a}$，可以写为

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{n} \tag{1-1}$$

其大小可以用模或者绝对值来表示

$$a = |\boldsymbol{a}| \geqslant 0 \tag{1-2}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为单位矢量，即

$$|\boldsymbol{n}| = 1 \tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \tag{1-4}$$

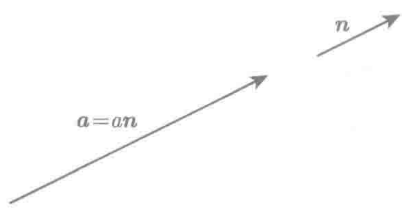


图 1-1　矢量 $\boldsymbol{a}$

具体而言，如图 1-2 所示，某一矢量 $\boldsymbol{a} = -3.5\boldsymbol{n}$，说明 $\boldsymbol{a}$ 的大小为 3.5，其方向与 $\boldsymbol{n}$ 的方向相反。特别地，如果一个矢量的模为零，则称为零矢量，用黑体符号 $\boldsymbol{0}$ 来表示。

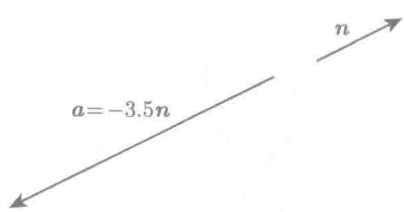


图 1-2　矢量 $\boldsymbol{a}= -3.5\boldsymbol{n}$

另外如图 1-3 所示，根据牛顿万有引力定律，两个可看作质点的星体 (质量分别为 m_1 和 m_2，距离为 r，万有引力常数为 G) 之间的万有引力大小可以表示为 $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$。如果定义两个质点之间的矢径 $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{n}$，则力 F 也沿着单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向，且 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$。由矢量的定义可知，万有引力的矢量表达式可以写为 $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{n} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$。

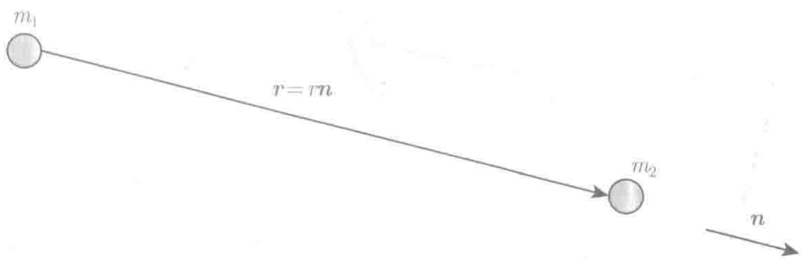


图 1-3　两个星体之间的间距示意图

2. 常规运算

一组矢量 ($\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$) 的常规运算包括以下几条。

(1) 交换律

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \tag{1-5}$$

从几何角度来看，两个矢量的和可以通过平行四边形法则或者矢量三角形法则来求解，实际其和为平行四边形的对角线 (图 1-4)。从该法则可见，交换两个矢量的顺序，对其和没有影响。

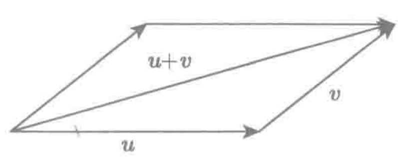


图 1-4　平行四边形法则

(2) 结合律

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \tag{1-6}$$

(3) 矢量差

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1-8}$$

(4) 分配律

$$(a+b)\,\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u} \tag{1-9}$$

$$a\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v} \tag{1-10}$$

$$a\,(b\boldsymbol{u})=ab\boldsymbol{u} \tag{1-11}$$

其中 a、b 为实数。

需要说明的是，这些矢量之间的常规运算法则与坐标系的选择没有关系。

3. 笛卡儿坐标系

尽管矢量的实体形式比较紧凑简洁，但是当进行具体运算的时候，其物理意义并不清晰。因此计算时，我们往往选择一个确定的坐标系进行分析，在该坐标系中细致地考察其分量形式。例如，在笛卡儿直角坐标系中 (图 1-5)，矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\\&=(a_x,a_y,a_z)\\&=a\,(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{1-12}$$

其中 a_x、a_y 和 a_z 分别为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿着 x、y、z 三个坐标轴方向的单位基矢量，α、β 和 γ 分别为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 x、y、z 轴的夹角。则 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-13}$$

并且

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{a}\\[2ex]\cos\beta=\dfrac{a_y}{a}\\[2ex]\cos\gamma=\dfrac{a_z}{a}\end{cases} \tag{1-14}$$

而三个角度之间的关系为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1-15}$$

并且根据矢量的定义，可知 $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$，即单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 可以分解为沿着三个坐标轴方向的三个分量。

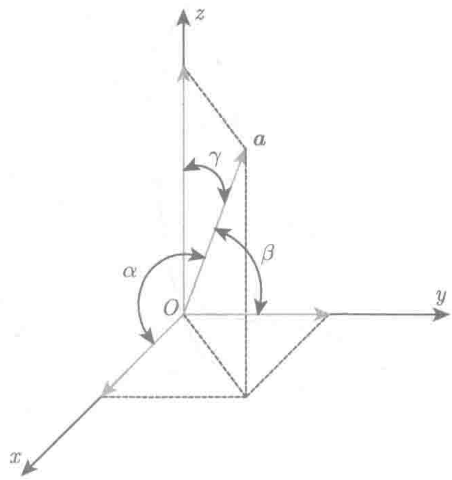


图 1-5　三维笛卡儿坐标系中的矢量 $\boldsymbol{a}$

如果在平面直角坐标系中，如图 1-6 所示，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} \tag{1-16}$$

而其模为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{1-17}$$

此时假设 a_x 与 $\boldsymbol{a}$ 之间的夹角为 α，则有

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{a} \\ \sin\alpha = \dfrac{a_y}{a} \end{cases} \tag{1-18}$$

此时单位矢量为 $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{j}$。

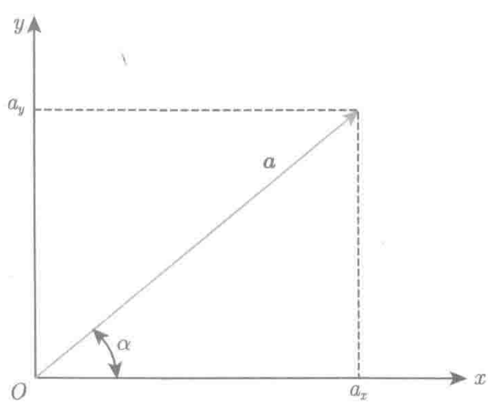


图 1-6　平面笛卡儿坐标系中的矢量 $\boldsymbol{a}$

补注：传说笛卡儿坐标系是由著名学者笛卡儿于 1620 年在睡梦中想到的。那时候，他正在服兵役。多年以来，他慢慢养成一个习惯，即喜欢躺在被窝里思考问题。有一天晚上，笛卡儿不断思考最近研究的几何与代数的结合，不觉进入了梦乡，在睡梦中受到启发而发明了直角坐标系。直角坐标系的创建，在代数和几何之间架起了一座桥梁，它使几何概念用代数来表示，几何图形也可以用代数形式来表示。由此笛卡儿在创立直角坐标系的基础上，创造了用代数的方法来研究几何图形的数学分支——解析几何。他大胆设想：如果把几何图形看成是动点的运动轨迹，就可以把几何图形看成是由具有某种共同特征的点组成的。

4. 任意曲线坐标系

在工程技术和自然规律的研究中，我们经常会遇到曲线或者曲面边界，此时需要更加方便地选用曲线坐标系。例如，我们经常根据研究问题的需要而选择极坐标系、柱坐标系、球坐标系等。如图 1-7 所示，在任意曲线坐标系中，$x^i(i=1,2,3)$ 为曲线坐标，此时其三条坐标线不一定是直线。在任一点处，沿着三个坐标线的切线并指向 x^i 增加的方向可以定义三个基矢量 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,3)$，其大小不一定为 1，同时也不一定互相正交。

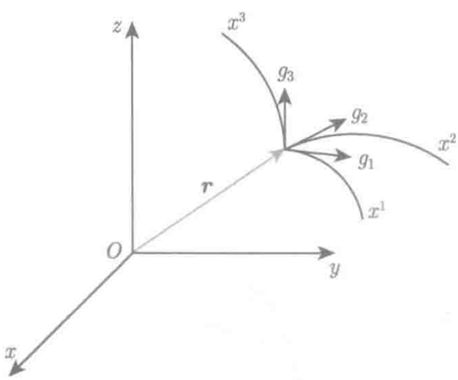


图 1-7　曲线坐标系

在笛卡儿直角坐标系中，任意一点处的矢径可以根据其坐标位置 $(x,\ y,\ z)$ 而写为

$$\boldsymbol{r}=x\left(x^1,x^2,x^3\right)\boldsymbol{i}+y\left(x^1,x^2,x^3\right)\boldsymbol{j}+z\left(x^1,x^2,x^3\right)\boldsymbol{k} \tag{1-19}$$

即任一点的矢量是关于 x^i 的函数。

进而根据全微分的定义，可以知道矢径的增量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 \tag{1-20}$$

则三个基矢量可以定义为

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}_1=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\\ \boldsymbol{g}_2=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}\\ \boldsymbol{g}_3=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\end{cases} \tag{1-21}$$

即

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\quad (i=1,2,3) \tag{1-22}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1+\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2+\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3 \tag{1-23}$$

称 $\boldsymbol{g}_i$ 为曲线坐标 (x^1，x^2，x^3) 点处的协变基矢量。

从式 (1-23) 可以看到，有时候对于一些内含指标规律的公式的书写非常繁琐。因此为了便于张量公式的紧凑书写，我们引入或爱因斯坦求和约定，则矢径增量可以写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1+\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2+\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3\\&=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\\&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i\end{aligned} \tag{1-24}$$

其中指标 i 称为哑标 (dummy index)，在同一项中以一个上标和一个下标成对出现，表示遍历其取值范围求和的意思。规定拉丁字母 (i，j，k 等) 用于三维问题，取值范围为 1，2，3；规定希腊字母 (α、β 等) 用于二维问题，取值范围为 1，2。每一对哑标的字母可以用相同取值范围的另一对字母任意代换，其意义不变，如 $\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i=\boldsymbol{g}_k\mathrm{d}x^k$(因为都代表同一个和)。

与哑标相对应的是自由指标，它在各项中都在同一水平上出现并且只出现一次，或者全为上标，或者全为下标。例如，$\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\,(i=1,2,3)$ 中的指标 i，在左侧中以下标出现，在右侧中由于在分母上，所以实际还是相当于出现在下标的位置。自由指标表示该表达式在 n 维取值范围内都成立，即代表了 n 个表达式。一

个表达式中的某个自由指标可以全体替换用相同取值范围的其他字母，其意义不变。例如，$\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 可以写为 $\boldsymbol{g}_j = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}$。

类似地，运用求和约定，则任意一个矢量在曲线坐标系中可以表达为

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{g}_i = u^j \boldsymbol{g}_j \tag{1-25}$$

其中 u^i 称为矢量的逆变分量。对于二维问题，该矢量可以表达为

$$\boldsymbol{u} = u^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha = u^\beta \boldsymbol{g}_\beta \tag{1-26}$$

如果坐标线 x^i 均为直线，且相互之间为斜交，则协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 为常矢量，其大小和方向都不随空间点的位置变化。如果退化到直角坐标系，则协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 就变为单位基矢量，并且沿着三个坐标轴方向，此时协变分量和逆变分量、协变基矢量和逆变基矢量就无须区分。例如，在直角坐标系中 $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$，令 $a_x = a_1$，$a_y = a_2$，$a_z = a_3$，$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_3$，则 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_i\boldsymbol{e}_i$。

补注：求和约定是爱因斯坦在 1916 年发表的《广义相对论基础》中提出的。他写道："看一下这一节的方程就会明白，对于那个在累加符号后出现两次的指标，总是被累加起来的，而且也确实只对出现两次的指标进行累加。因此就能够略去累加符号，而不丧失其明确性。为此我们引进这样的定义：除非做特别说明，则凡是在式中一项中出现两次的指标，总是要对这个指标进行累加。"爱因斯坦后来评述道："求和约定是数学史上一次重大发现；如果不相信的话，我们可以尝试返回到那些不使用这个方法的古板的日子。"

例 1　如图 1-8 所示的球坐标系，某点的矢径为 $\boldsymbol{r}$，也可以用球坐标的三个参数 (R, θ, φ) 表示出来，其表达式为

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \tag{1-27}$$

故此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= R\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + R\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + R\cos\theta\boldsymbol{k} \\ &= x^1\sin x^2\cos x^3\boldsymbol{i} + x^1\sin x^2\sin x^3\boldsymbol{j} + x^1\cos x^2\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1-28}$$

其中 $x^1 = R$，$x^2 = \theta$，$x^3 = \varphi$，即三个坐标线分别沿着 R 伸长方向、θ 增加引起的弧长增加方向、φ 增加引起的弧长增加方向。

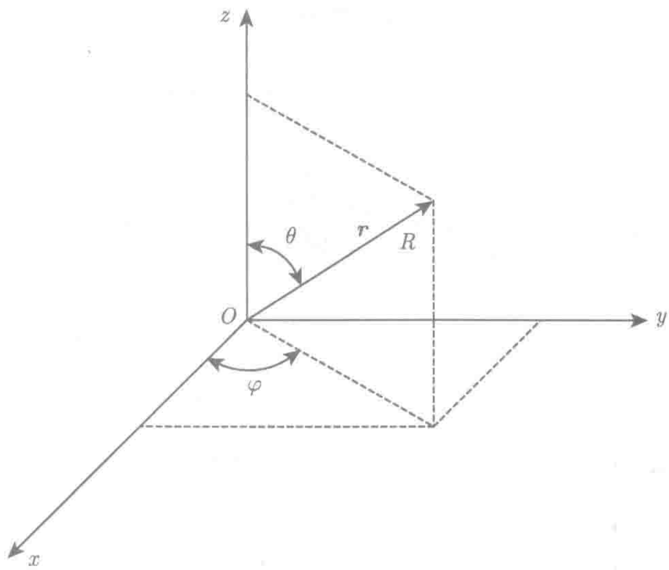


图 1-8　球坐标系

基矢量为

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1} = \sin x^2 \cos x^3 \boldsymbol{i} + \sin x^2 \sin x^3 \boldsymbol{j} + \cos x^2 \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{g}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2} = x^1 \cos x^2 \cos x^3 \boldsymbol{i} + x^1 \cos x^2 \sin x^3 \boldsymbol{j} - x^1 \sin x^2 \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{g}_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3} = -x^1 \sin x^2 \sin x^3 \boldsymbol{i} + x^1 \sin x^2 \cos x^3 \boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1-29}$$

进一步得到

$$\begin{cases} |\boldsymbol{g}_1| = 1 \\ |\boldsymbol{g}_2| = x^1 \\ |\boldsymbol{g}_3| = x^1 \sin x^2 \end{cases} \tag{1-30}$$

由此可见，三个基矢量的大小并不全为 1，即它们不一定为单位矢量。这是曲线坐标系和笛卡儿直角坐标系的不同之处。可以假想，从直角坐标系到曲线坐标系的转化过程中，原来的单位基矢量也会发生畸变，即有的会被拉长，有的会被压缩，故而在曲线坐标系中它们的长度并不一定为 1。与之对应，曲线坐标系中沿着三个基

矢量方向分解得到的某一矢量的逆变分量，其大小也不同于原来直角坐标系中矢量的三个分量。

例 2　如图 1-9 所示的柱坐标系，此时，直线坐标和曲线坐标之间的对应关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \tag{1-31}$$

故此

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= x^1\cos x^2\boldsymbol{i} + x^1\sin x^2\boldsymbol{j} + x^3\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1-32}$$

其中 $x^1 = r$，$x^2 = \theta$，$x^3 = z$，即三个坐标线分别沿着 r 伸长方向、θ 增加引起的弧长增加方向、z 增加引起的坐标增加方向。

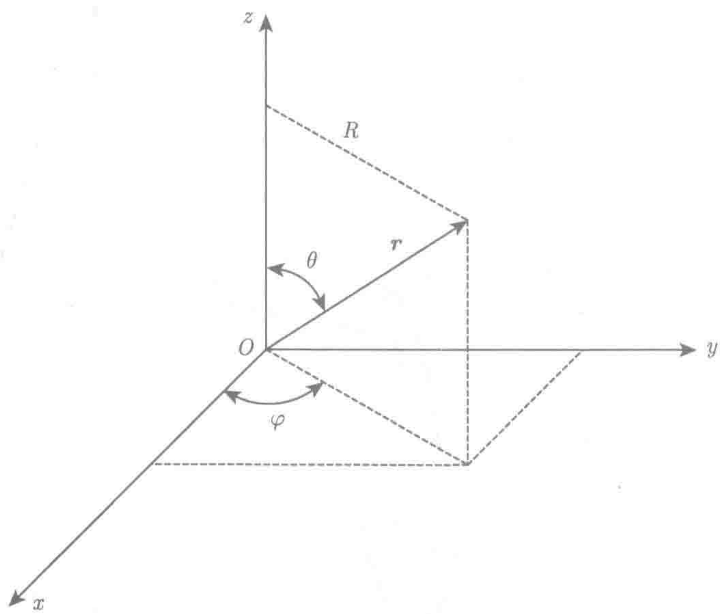


图 1-9　柱坐标系