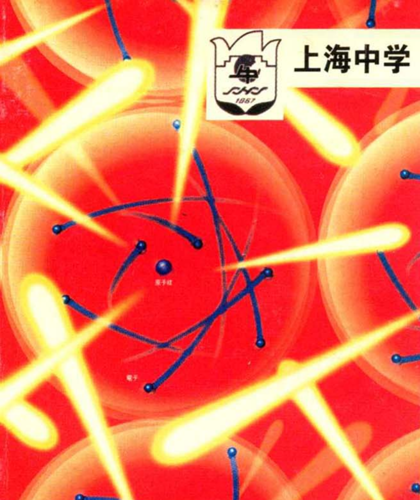

上海中学 学校课程系列丛书

唐盛昌 主编

数学奥赛导引

（上册）

冯志刚 著

上海科技教育出版社

上海中学学校课程系列丛书

唐盛昌　主编

数学奥赛导引

（上册）

冯志刚　著

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥赛导引. 上册/冯志刚著. —上海：上海科技教育出版社，2001. 2

(上海中学学校课程系列丛书/唐盛昌主编)

ISBN 7-5428-2514-3

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 冯…　Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 04247 号

上海中学学校课程系列丛书

唐盛昌　主编

数学奥赛导引

(上册)

冯志刚　著

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路 393 号　邮政编码 200235)

各地新华书店经销　上海三印时报印刷有限公司印刷

开本 787×1092　1/32　印张 11.625　字数 260 000

2001 年 2 月第 1 版　2001 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—3 000

ISBN 7-5428-2514-3/G・1608

定价：14.00 元

写在前面

数学奥林匹克活动在我国几经起伏，在一批批有远见的专家和教授们的推动与参与下，自70年代末和80年代初起，逐步走上了健康、稳定发展的轨道.

自1986年，中国首次组队参加IMO后，形成了具有中国特色的选拔体系（全国高中数学联赛——CMO——中国数学国家集训队——中国国家队）. 1989年我国首次在IMO上获得团体冠军，及1990年第31届IMO在中国北京举行，我国再次获得团体冠军后，数学奥林匹克活动开始在全国范围内受到普遍重视. 数学奥林匹克实验班在各省市相继出现，中国的数学奥林匹克活动拥有了广泛的群众基础，涌现了一大批高水平的中学数学教师，为数学英才的早期教育准备了相当数量的师资和丰富的教学实践经验.

一直以来，对数学奥林匹克活动的教育功能、培养方向和培训过程等方面存在认识上的不一致，在中学数学教育界和数学家群体中存在一些不同意见. 我们无意（也不可能）使大家达成共识，但这并不影响我们将自己认为正确并为之付出十多年艰辛劳动的一些成果通过这套书反映出来.

这是一套针对全国高中联赛第二试、CMO、集训队以及更高级别数学竞赛的辅导教材，其读者对象是从事数学奥林匹克教学工作的教师和教练员、参加上述级别竞赛的中学生以及有志于进一步提高自己数学水平的数学爱好者.

我们希望能通过这套书给教师和教练员提供教学的第一

手资料.各章节中所选的例题是经过精心挑选,并且是我们认为能反映数学思想、具有代表性的初等数学问题,各节中列出的一些知识点是在教学中应予以补充的知识.众所周知,数学能力的提高是以知识为载体的,我们不必担心增补一些知识会加重优秀学生的负担,其实重复的、机械的训练与操作才是对优秀学生而言最重的负担.

"问题是数学的心脏",这套书中将更多的篇幅放在问题上,这是希望阅读本书的中学生能够在如下两个方面得到发展:

1. 能够养成自觉学习的习惯,在自学能力方面得到进一步提高;能够增强独立探索、解决问题的意识和能力.

2. 从例题学习和解题过程中,领悟其中包含的数学思想,领略其中的方法和技巧,体会数学的内在美,提高自身的数学素养.

不是每一位阅读本书的中学生都能解决书中所有的问题,甚至要读懂所有问题的解答,体会出其中的奥妙都不容易.但是,我们相信只要读者对自己有一个正确的定位,对每个独自解决或看懂(并理解了)的问题,能够进一步了解该问题的本质,举一反三,那么你就获得了你应得的东西.借用爱因斯坦的名言"当在学校内所学的知识都已老化之时,所剩下的就是教育了".如果读者在遗忘了这套书的内容之后,还能留下些东西,那么作者就感到欣慰了.

书中的许多问题是国内外众多数学工作者智慧的结晶,我们特别挑选了世界各国最近几年的数学竞赛问题,期望得到攻玉(它山之石可以攻玉)的效果.其中下册的第七章由熊斌先生著.

最后,感谢上海中学的唐盛昌校长,没有他的鼎力相助,

本套丛书可能难以面世，最主要的是：没有他对本人的长期指导和对本人工作的关心与重视，我是不可能获得现在的成功的. 感谢我的几位学生：吴忠涛、赵漫其、袁健和叶明，许多问题的解答是源于我和他们的共同劳动. 感谢上海科技教育出版社的同志，是他们辛苦的劳动保证了本书的质量.

囿于作者本身的学识和水平，书中的错误和不足在所难免，敬请广大读者批评指正.

冯志刚

2000 年 11 月

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数 0,1,2,…构成的集合
$\mathbf{N}^*$	正整数集
(a,b)	整数 a,b 的最大公约数
$[a,b]$	整数 a,b 的最小公倍数
$a\mid b$	整数 a 能整除 b.
$p^\alpha \parallel a$	指 $p^\alpha \mid a$,而 $p^{\alpha+1}\nmid a$,这里 p 为质数,$\alpha\in\mathbf{N}^*$
$[x]$	不超过实数 x 的最大整数
$\{x\}$	实数 x 的小数部分
$\mathbf{Z}[x]$	整系数多项式全体构成的集合
$\binom{n}{m}$	从 n 个元素中选出 m 个元素的组合数
$G(V,E)$	以 V 为顶点集,E 为边集的图

目 录

第一部分 初等代数

第一章 集合与函数 …………………………………… 3

§1.1 集合 …………………………………… 3

§1.2 映射与函数 …………………………………… 10

§1.3 函数迭代与函数方程 …………………………………… 17

第二章 不等式 …………………………………… 24

§2.1 平均不等式 …………………………………… 24

§2.2 柯西不等式 …………………………………… 30

§2.3 几个重要不等式 …………………………………… 38

§2.4 证明不等式的常用方法 …………………………………… 44

第三章 三角函数 …………………………………… 53

§3.1 三角恒等变形与三角函数的性质 …………………………………… 53

§3.2 三角不等式 …………………………………… 59

§3.3 三角在几何中的应用 …………………………………… 65

第四章 复数 …………………………………… 72

§4.1 复数的运算及其几何意义 …………………………………… 72

§4.2 单位根及其应用 …………………………………… 77

§4.3 复数与几何 …………………………………… 82

第五章 数列与数学归纳法 …………………………………… 89

§5.1 递推数列 …………………………………… 89

§5.2 数列的通项与求和 …………………………………… 94

§5.3　数学归纳法 …………………………………………… 100

第二部分　初等数论与多项式

第六章　数的整除理论 …………………………………… 110
§6.1　数的整除性 …………………………………………… 110
§6.2　正整数的几种分类 ………………………………… 115
§6.3　算术基本定理 ……………………………………… 121
第七章　同余理论 ………………………………………… 128
§7.1　同余的基本性质 …………………………………… 128
§7.2　同余类与剩余系 …………………………………… 135
§7.3　几个著名定理 ……………………………………… 141
第八章　指数与原根 ……………………………………… 148
§8.1　指数 …………………………………………………… 148
§8.2　原根 …………………………………………………… 152
第九章　不定方程 ………………………………………… 158
§9.1　不定方程的常用解法 ……………………………… 158
§9.2　特殊的二次不定方程 ……………………………… 163
§9.3　平方和 ………………………………………………… 169
第十章　高斯函数 ………………………………………… 175
§10.1　$[x]$与$\{x\}$ ………………………………………… 175
§10.2　高斯函数的应用 …………………………………… 180
第十一章　多项式 ………………………………………… 187
§11.1　一元多项式 ………………………………………… 187
§11.2　整系数多项式 ……………………………………… 194
§11.3　不可约多项式 ……………………………………… 199
参考答案 …………………………………………………… 205
参考文献 …………………………………………………… 361

第一部分

初等代数

第一章

集合与函数

§1.1 集　合

学习并理解了集合的基本概念、表示方法、包含关系与子集的概念、交、并运算等基础知识后，我们还需学习下面的一些知识.

定义 1.1.1　差集　设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 对 B 的差集，记作 $A\backslash B$，即 $A\backslash B=\{x\mid x\in A,\text{但 } x\notin B\}$.

性质 1.1.2　De Morgan 公式　设 A、B、C 为三个集合，则关于补运算与差运算有如下等式成立：

(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(2) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$，

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

定义 1.1.3　集合的分划　把一个集合 M 分成若干个不同的非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 如果

(1) $A_i\cap A_j=\varnothing$；(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=M$，

则称 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 为 M 的一个 n-分划. 特别地，如果 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 仅满足条件(2)，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 M 的一个覆盖.

定义 1.1.4　整数的分拆　设 $n\in\mathbf{N}^*$，将 n 表示为如下 k

个正整数之和

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k,$$

其中 $1\leqslant k\leqslant n, n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_k$. 我们称这样的表示为 n 的一个 k-分拆，k 称为分拆的长度，n_i 称为分拆项.

这里的分拆又称为 n 的无序分拆. 注意：正整数 n 的 k 项有序分拆数等价于求不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$$

的正整数解的组数，这是一个不难的问题，而求 n 的 k 项无序分拆数则是一个很难的问题.

定义 1.1.5 子集族 以集合 X 的子集为元素的集合，称为 X 的子集族. 特别地，以 X 的一切子集作为元素的集合称为 X 的幂集合，记为 $P(X)$，即 $P(X)=\{A|A\subseteq X\}$.

说明 一般地，记 X 的元素个数为 $|X|$，若 $|X|$ 为有限数，则 $|P(X)|=2^{|X|}$.

例 1 设 A 是 $\{1,2,\cdots,2000\}$ 的子集，$|A|\geqslant 1000$. 证明：要么 A 中有一个数为 2 的幂，要么 A 中存在两个数 a,b，使得 $a+b$ 为 2 的幂.

证明 注意到

$$2048=48+2000=49+1999=\cdots=1023+1025;$$

$$64=17+47=18+46=\cdots=31+33;$$

$$16=1+15=2+14=\cdots=7+9.$$

于是，集合 $\{48,2000\},\{49,1999\},\cdots,\{1023,1025\};\{17,47\},\{18,46\},\cdots,\{31,33\};\{1,15\},\{2,14\},\cdots,\{7,9\}$ 中，每个集合中的两个数之和都是 2 的幂，这里的二元集共有 $976+15+7=998$ 个. 在数 $1,2,\cdots,2000$ 中，仅有 $8,16,32,64,1024$ 没有在上面的 998 个集合中出现，而这 5 个数都是 2 的幂.

由于 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2000\}$，$|A|\geqslant 1000$，利用上面的抽屉，

结合抽屉原则可知命题成立.

注　利用抽屉原则证明存在性问题是最常用的方法,在构造抽屉时,从要证明的结论着手是一个基本的思路.此题就是从结论的要求出发来建构抽屉的.

例 2　设 $n(\geqslant 4)$是一个偶数,A 是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集.考虑形如 $\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\varepsilon_3x_3$ 的和数,这里 $x_1,x_2,x_3\in A$(不必不同),$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\in\{-1,0,1\}$(不全为 0).并且,对任意 $x\in A$,数 x 与 $-x$ 不同时出现在某个和数的表达式中.如果所有这样的和数中,没有一个数为 n 的倍数,则称 A 为"自由的".

(1) 构造一个含有$\left[\dfrac{n}{4}\right]$个元素的自由集,这里$[a]$表示不超过 a 的最大整数.

(2) 证明:没有一个自由集含有$\left[\dfrac{n}{4}\right]+1$ 个元素.

解　(1) 令 $A=\left\{1,3,\cdots,2\left[\dfrac{n}{4}\right]-1\right\}$,则 A 是一个含有$\left[\dfrac{n}{4}\right]$个元素的自由集(请读者自证).

(2) 设 $n=4m$,$A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,$|A|=\left[\dfrac{n}{4}\right]+1=m+1$,且 A 是一个自由集.

不失一般性,设 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2m\}$(因为我们可以用 $n-x$ 来代替 A 中的元素 x),我们证明:A 中有一个数等于另外两个数(这两个数可以相同)之和.从而,用这三个数可以将 0 表出,导致矛盾.

事实上,设 A 中元素依次为 $a_1<a_2<\cdots<a_{m+1}$.考虑如下的 $2m+2$ 个数:

$$a_1,a_2,\cdots,a_{m+1};2a_1,a_1+a_2,\cdots,a_1+a_{m+1}.$$

它们都是区间$[a_1,a_1+a_{m+1}]$中的数,此区间中恰有 $1+a_{m+1}$

$\leqslant 2m+1$ 个整数，从而，必有两个数相同. 这就是要证的结论.

当 $n=4m+2$ 时，注意到 $2m+1$ 不是任何一个自由集的元素（否则 $(2m+1)+(2m+1)$ 是 n 的倍数），与上类似，可知自由集 A 的元素个数 $\leqslant m$.

注　我们熟知：从 $1,2,\cdots,2n-1$ 中，任取 $n+1$ 个不同的数，其中必有一个数等于另外两个数之和. 此题是对这一熟知命题的重新思考.

例 3　正整数集的子集 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 具有如下性质：M 中任意两个不相交的非空子集中的元素之和不相等. 求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的最大值，这里 $n\in\mathbf{N}^*$，n 为给定常数.

解　容易发现，集合 $\{1,2,\cdots,2^{n-1}\}$ 具有题中的性质，猜想：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

这一猜想是正确的（事实上，一些更大胆的学生认为 $a_k\geqslant 2^{k-1}$，但这一结论是不对的），先证一个引理.

引理　对 $1\leqslant k\leqslant n$，均有

$$a_1+a_2+\cdots+a_k\geqslant 2^k-1=1+2+\cdots+2^{k-1}.$$

事实上，由条件，M 中任意两个非空子集的元素之和不相同（去掉公共元后，所得子集就是不相交的），从而，集合 $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 的子集的元素和（不同的）共有 2^k-1 个，于是，$a_1+\cdots+a_k\geqslant 2^k-1$（元素和最大为 $a_1+\cdots+a_k$）.

下面来证明猜想.

不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. 则

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1-a_1}{a_1}+\frac{2-a_2}{2a_2}+\cdots+\frac{2^{n-1}-a_n}{2^{n-1}a_n}\\
&\leqslant\frac{1-a_1}{2a_2}+\frac{2-a_2}{2a_2}+\cdots+\frac{2^{n-1}-a_n}{2^{n-1}a_n}\\
&=\frac{(1+2)-(a_1+a_2)}{2a_2}+\frac{2^2-a_3}{2^2a_3}+\cdots+\frac{2^{n-1}-a_n}{2^{n-1}a_n}\\
&\leqslant\frac{(1+2+2^2)-(a_1+a_2+a_3)}{2^2a_3}+\cdots+\frac{2^{n-1}-a_n}{2^{n-1}a_n}\\
&\leqslant\cdots\\
&\leqslant\frac{(1+2+\cdots+2^{n-1})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2^{n-1}a_n}\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

注意,这里每一个不等式均由引理得到.

例 4 证明:对任意一个由正整数构成的有限集 A,存在一个由正整数构成的有限集 B,使得 $A\subseteq B$,并且

$$\prod_{x\in B}x=\sum_{x\in B}x^2.$$

这里,上式左边表示 B 中所有元素的乘积,右边表示 B 中所有元素的平方和.

证明 由于 A 是一个由正整数构成的有限集,故存在 $m\geqslant 5,m\in\mathbf{N}^*$,使得 $A\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$. 因而,我们只需构造一个集合 B,使得 $B\subset\mathbf{N}^*$,B 为有限集,且 $\{1,2,\cdots,m\}\subseteq B$,同时

$$\prod_{x\in B}x=\sum_{x\in B}x^2.$$

我们采用递推方法予以构造,令 $B_0=\{1,2,\cdots,m\}$,$B_k=\{1,2,\cdots,m,x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,$k=1,2,\cdots$. 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 待定.

记 $T_i=\prod_{x\in B_i}x-\sum_{x\in B_i}x^2$,$i=0,1,2,\cdots$,注意到 $T_0=m!-\sum_{k=1}^{m}k^2>0$(这里用到 $m>5$),我们选 x_1,使得 $T_1=T_0-1$,再

选 x_2，使得 $T_2 = T_1 - 1$，依此下去，可得到 $T_n = 0$，这里 $n = T_0$，这就 是解决此题的一个关键想法.

下面先选择 x_1，依要求，应有

$$x_1(m!) - \sum_{k=1}^{m} k^2 - x_1{}^2 = m! - \sum_{k=1}^{m} k^2 - 1,$$

即要求 $(x_1-(m!\ -1))(x_1-1)=0$，故令 $x_1=m!\ -1$，就有 $T_1=T_0-1$，依此思路，可知令 $x_{i+1}=x_1\cdot\cdots\cdot x_i(m!)-1$ 时，将有 $T_{i+1}=T_i-1$，这里 $i=1,2,\cdots$. 于是，问题获得解决.

注　这里只写出了递推过程的思想和处理手法，完整的证明请读者完成.

问题 1.1

1. 对任意集合 X，用 $n(X)$ 表示 X 的子集的个数(包括 $\varnothing$ 与 X 本身). 已知集合 A,B,C 满足

$$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C),$$
$$|A|=|B|=100.$$

求 $|A\cap B\cap C|$ 的最小值.

2. (1) 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以表示为三个彼此不相交的集合的并集，使得：如果 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $|m-n|=2$ 或 4，则 m,n 属于不同的集合.

   (2) 证明：正整数集 $\mathbf{N}^*$ 可以表示为四个彼此不相交的集合的并集，使得：如果 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $|m-n|=2,3$ 或 5，则 m,n 属于不同的集合. 并说明为什么此题的结论在将 $\mathbf{N}^*$ 表示为三个彼此不相交的集合的并集时，不成立.

3. 设 n 为正整数，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，若 S 的非空子集 X 中奇数的个数大于偶数的个数，则称 X 为好集，S 的好集