21

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

电磁场与电磁波学习指导

DIANCICHANG YU DIANCIBO XUEXI ZHIDAO

高 军 曹祥玉 等编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

电磁场与电磁波
学习指导

高　军　曹祥玉
李　桐　李思佳　　编　著
冯奎胜　刘　涛

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是作者编写的面向21世纪高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材《电磁场与电磁波》(西安电子科技大学出版社出版)的配套辅导书。根据教材排序，本书对教材各章节主要内容和重点问题进行了总结与归纳，对易混淆的概念进行了梳理，结合典型例题归纳各类题型的解题思路和方法，并给出教材中各章习题的解答。本书有助于读者加深对基本概念、基本公式、定理的理解、运用和掌握，同时有助于读者掌握一定的解题技巧。

本书可供电子信息与通信等电子工程类相关专业“电磁场与电磁波”课程本科教学和学习使用，也可作为其他讲授或学习电磁基础知识的教师、学生的参考书，特别适合作为报考电磁类专业硕士研究生的考前复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波学习指导/高军等编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2018.2
ISBN 978-7-5606-4795-1

① 电… Ⅱ. ① 高… Ⅲ. ① 电磁场—高等学校—教学参考资料 ② 电磁波—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ① O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 315820 号

策　　划　臧延新
责任编辑　于　洋　阎　彬
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西大江印务有限公司
版　　次　2018 年 2 月第 1 版　2018 年 2 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　14.5
字　　数　344 千字
印　　数　1～2000 册
定　　价　35.00 元
ISBN 978-7-5606-4795-1/O
XDUP　5097001-1

前言

电磁知识浩瀚，新的内容层出不穷，可以发展的方向不可胜数。有关电磁知识的“电磁场与电磁波”课程已成为高等院校电子信息类专业不可或缺的专业基础课。为了紧扣信息与通信技术，使学生更好地通晓和掌握电磁场与电磁波的基本特性、分析方法及其应用，帮助学生理顺基本概念、寻求解题思路、提高分析问题和解决问题的实践能力，我们特编写了本学习指导书。

本书与作者编写的，由西安电子科技大学出版社出版的面向21世纪高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材《电磁场与电磁波》相配套，全书与教材相对应共分9章，每章都由主要内容与复习要点、典型题解和课后题解三部分构成。此外，书中还给出了自测试题及参考答案，便于学生对学习效果进行自我检查。

本书作者长期从事“电磁场与电磁波”教学，编写本书的初衷是力求帮助学生在学习过程中理清思路，对一些易混淆的概念予以梳理，对主要公式的构成规律、物理意义及使用要点给予汇编，并通过例题加以运用以提高解决实际问题的能力。

本书由高军、曹祥玉、李桐、李思佳、冯奎胜、刘涛共同编写。在编写过程中编者参阅了有关高校的教材和参考书，吸收了很多有益的经验，受到了不少启发，在此向这些教材的作者致以诚挚的谢意。衷心感谢空军工程大学信息与导航学院各级领导和许多同事的支持与帮助。感谢西安电子科技大学出版社的编辑为编者提供了难得的机会，并为本书的出版付出了大量辛勤的劳动。

由于编者学识有限，书中难免有不足之处，殷切希望读者批评指正。

编　者

2017年10月于西安

目 录

第 1 章　矢量分析及场论

1.1　主要内容与复习要点

主要内容：矢量代数运算，矢量的点乘和叉乘运算以及物理意义；三种常用正交曲面坐标系及其变换关系；标量场的梯度、拉普拉斯算子；矢量场的散度和旋度相关概念及运算方法；高斯散度定理、斯托克斯定理、亥姆霍兹定理。

图 1.1 所示为本章主要内容结构图。

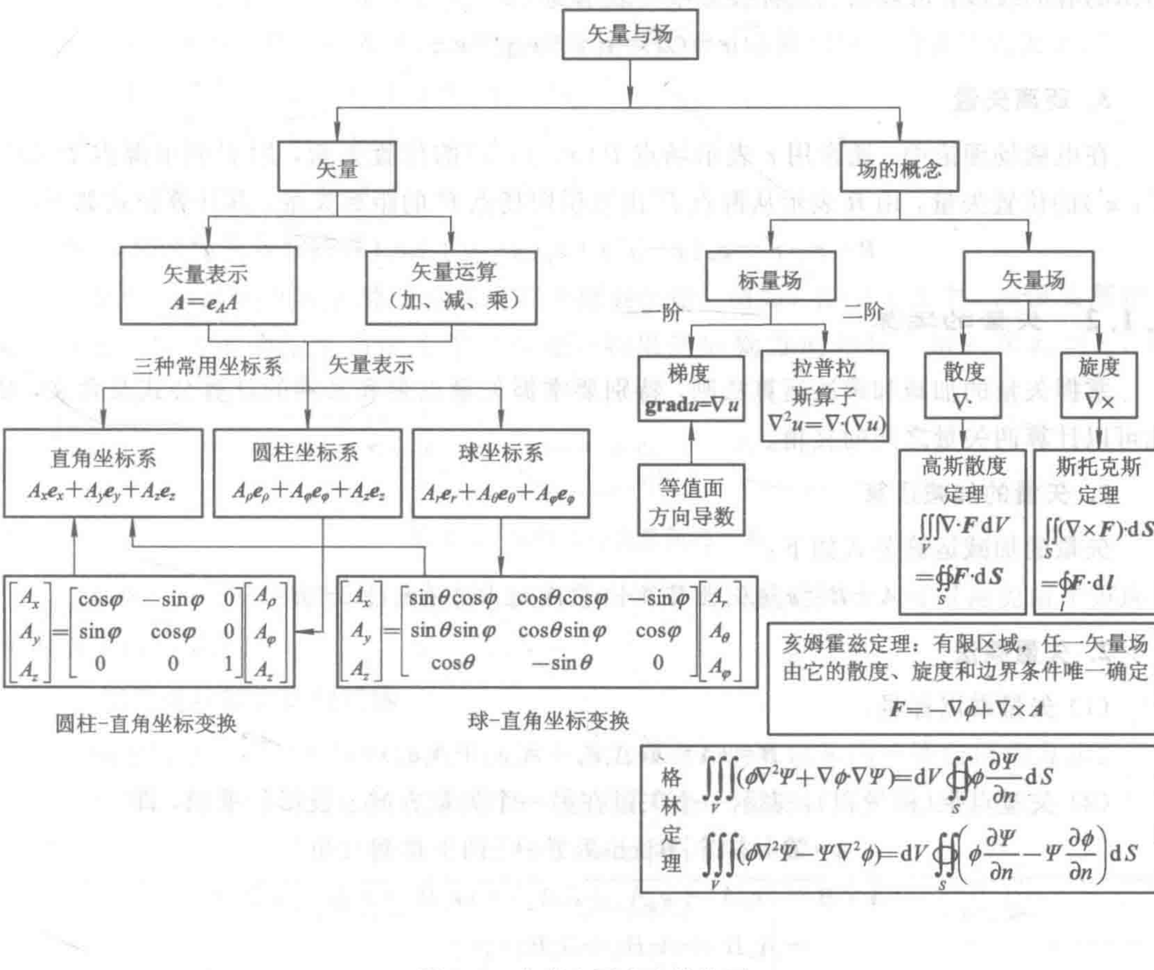

图 1.1　本章主要内容结构图

复习要点：熟记标量函数的梯度，矢量函数的散度、旋度计算公式；掌握高斯定理、斯托克斯定理、亥姆霍兹定理及其物理意义。

1.1.1 矢量

1. 矢量的表示

矢量的几何表示为一条有向线段，线段长度表示矢量的模，线段的方向表示矢量的方向。

引入坐标系后矢量可以定量表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_A A$$

其中：$\boldsymbol{e}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$表示其方向，$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$表示其大小。

矢量的定量计算用坐标表示，如$\boldsymbol{A}$，在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z$$

2. 空间位置矢量

空间位置矢量简称位矢，用$\boldsymbol{r}$表示，它是指从坐标原点出发向空间任意点$P(x, y, z)$引出的有向线段，可以用三坐标投影唯一表示为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$$

3. 距离矢量

在电磁场理论中，通常用$\boldsymbol{r}$表示场点$P(x, y, z)$的位置矢量，用$\boldsymbol{r}'$表示源点$P'(x', y', z')$的位置矢量，用$\boldsymbol{R}$表示从源点P'出发引向场点P的距离矢量，其计算公式如下：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')$$

1.1.2 矢量的运算

掌握矢量的加减和乘法运算法则，特别要掌握矢量点乘和叉乘的计算公式及含义，依此可以计算两矢量之间的夹角。

1. 矢量的加减运算

矢量的加减运算公式如下：

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{e}_y(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{e}_z(A_z\pm B_z)$$

2. 矢量乘法

(1) 矢量乘以标量：

$$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A}=k(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)$$

(2) 矢量点乘(标量积)：表示一个矢量在另一个矢量方向上投影的乘积，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta,\ \theta\text{——两矢量间夹角}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x B_x+\boldsymbol{e}_y B_y+\boldsymbol{e}_z B_z)\\&=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z\end{aligned}$$

(3) 矢量叉乘(矢量积)：其结果为矢量。矢量的方向垂直于$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$所在平面(其方向也可以用右手螺旋法则确定)；矢量的模值等于$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$两矢量的大小与它们之间较小夹角的正弦之积，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_n AB\sin\theta$$

矢量叉乘采用行列式计算，在直角坐标系下，有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\boldsymbol{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\boldsymbol{e}_z(A_xB_y-A_yB_x)$$

1.1.3　正交曲面坐标系

理解拉梅系数的含义，掌握矢量长度元、矢量面积元、体积元的定义和计算公式，特别要注意矢量长度元和矢量面积元是矢量，并注意其方向；掌握不同坐标系之间的变换关系，特别是直角坐标系和圆柱坐标系、球坐标系之间的变换关系。

1. 拉梅系数

在正交坐标系中，坐标变换的微分元可能并非都有长度量纲，需要将它们分别乘以一个变换因子，才能构成沿坐标单位矢量的微分长度元。这个变换因子称为拉梅系数，用 h_1、h_2、h_3 表示。拉梅系数的引入可使不同正交坐标系的矢量运算用统一的表达式表示。

(1) 直角坐标系：$h_1=1$，$h_2=1$，$h_3=1$。

(2) 圆柱坐标系：$h_1=1$，$h_2=\rho$，$h_3=1$。

(3) 球坐标系：$h_1=1$，$h_2=r$，$h_3=r\sin\theta$。

2. 正交坐标系矢量运算

正交坐标系坐标矢量运算关系满足右手螺旋法则。例如，在图 1.2 中，沿箭头所指方向，单位矢量叉乘的结果为顺序第三矢量，如果逆向则方向相反。如 $\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z$，而 $\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x=-\boldsymbol{e}_z$，其余类同。

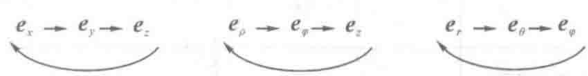

图 1.2　单位坐标矢量循环关系

记住图 1.2 所示的关系非常重要，特别是在复杂的矢量运算中，可以避免由于方向混淆而造成运算错误！

3. 不同坐标系之间的变换

不同坐标系之间的变换可以采用矢量点乘的概念，也可以采用矩阵变换的方法。三种常用坐标系参数比较见表 1.1，三种常用坐标系中坐标变量的转换关系见表 1.2。

表 1.1　三种常用坐标系参数比较

坐标系名称	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
坐标变量 u_1	$-\infty<x<+\infty$	$0\leqslant\rho<+\infty$	$0\leqslant r<+\infty$
坐标变量 u_2	$-\infty<y<+\infty$	$0\leqslant\varphi<2\pi$	$0\leqslant\theta<\pi$
坐标变量 u_3	$-\infty<z<+\infty$	$-\infty<z<+\infty$	$0\leqslant\varphi<2\pi$

续表

坐标系名称	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
坐标单位矢量 e_1 e_2 e_3	e_x（常矢量） e_y（常矢量） e_z（常矢量）	e_ρ（为 φ 的函数） e_φ（为 φ 的函数） e_z（常矢量）	e_r（为 θ、φ 的函数） e_θ（为 θ、φ 的函数） e_φ（为 φ 的函数）
拉梅系数 h_1 h_2 h_3	1 1 1	1 ρ 1	1 r $r\sin\theta$
矢量长度元 dl	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{e}_\varphi\rho\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{e}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$
矢量面积元 dS	$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_\rho\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$	$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{e}_\theta r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r+\boldsymbol{e}_\varphi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
体积元 dV	$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

表 1.2　三种常用坐标系中坐标变量的转换关系

	直角坐标系	圆柱坐标系	球坐标系
直角坐标系		$x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$ $z=z$	$x=r\sin\theta\cos\varphi$ $y=r\sin\theta\sin\varphi$ $z=r\cos\theta$
圆柱坐标系	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$ $z=z$		$\rho=r\sin\theta$ $\varphi=\varphi$ $z=r\cos\theta$
球坐标系	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$	$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta=\arcsin\dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ $\varphi=\varphi$	

(1) 圆柱坐标→直角坐标。

采用矢量点积的概念，相当于求 $\boldsymbol{e}_\rho A_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z A_z$ 三矢量在 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影：

$$\begin{aligned}A_x&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x=(A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_x\\&=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_x+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_x+A_z\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x\\&=A_\rho\cos\varphi-A_\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_y&=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y=(A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_y\\&=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_y+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_y\\&=A_\rho\sin\varphi+A_\varphi\cos\varphi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_z &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_z=(A_\rho\boldsymbol{e}_\rho+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_z\\
&=A_\rho\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_z+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_z+A_z\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z\\
&=A_z
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式，即

$$
\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}=[\boldsymbol{M}]\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}
$$

根据矩阵运算，直角坐标→圆柱坐标的变换矩阵为上述变换矩阵的逆矩阵，即

$$
\begin{bmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{bmatrix}=[\boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}
$$

(2) 球坐标→直角坐标。

球坐标系到直角坐标系变换关系如下：

$$
A_x=(A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_x=A_r\sin\theta\cos\varphi+A_\theta\cos\theta\cos\varphi-A_\varphi\sin\varphi
$$

$$
A_y=(A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_y=A_r\sin\theta\sin\varphi+A_\theta\cos\theta\sin\varphi+A_\varphi\cos\varphi
$$

$$
A_z=(A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_z=A_r\cos\theta-A_\theta\sin\theta
$$

写成矩阵形式，即

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r\\\boldsymbol{e}_\theta\\\boldsymbol{e}_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}=[\boldsymbol{M}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}
$$

(3) 直角坐标→球坐标。

直角坐标系到球坐标系变换关系如下：

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{bmatrix}=[\boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r\\\boldsymbol{e}_\theta\\\boldsymbol{e}_\varphi\end{bmatrix}
$$

1.1.4　场论

熟悉标量场的方向导数、梯度，矢量场的散度、旋度的概念；掌握直角坐标系下标量场的方向导数、梯度以及矢量场的散度、旋度的运算方法；掌握高斯散度定理、斯托克斯定理、亥姆霍兹定理的物理含义和运算方法。

1. 标量场

(1) 等值面：标量场中量值相等的点构成的面称为标量场 $u(x, y, z)$ 的等值面，用方程表示如下：

$$
u(x, y, z)=c
$$

(2) 方向导数：函数 $u(x, y, z)$ 在给定点 M 沿某个方向对距离的变化率，在直角坐标系中用公式表示如下：

$$
\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M_0)-u(M)}{\Delta l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma
$$

(3) 梯度：函数 $u(x, y, z)$ 在 (x, y, z) 点处最大的方向导数，通常用 $\boldsymbol{G}$ 表示。

任意正交坐标系下梯度的计算公式：

$$\boldsymbol{G}=\mathbf{grad}\ u=\boldsymbol{e}_{v1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial v_1}+\boldsymbol{e}_{v2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial v_2}+\boldsymbol{e}_{v3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial v_3}$$

直角坐标系中，拉梅系数 $h_1=1$、$h_2=1$、$h_3=1$，则

$$\boldsymbol{G}=\mathbf{grad}\ u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

(4) 哈密顿(Hamilton)算子：为了计算表达方便引入的一个矢性微分算子，即

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

这样标量场 $u(x, y, z)$ 的梯度 $\mathbf{grad}\ u(x, y, z)$ 可以表示为

$$\nabla u=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

2. 矢量场

(1) 矢量线。

矢量线是这样一些曲线，线上每一点的切线方向都代表该点的矢量场的方向。矢量场中每一点均有唯一的一条矢量线通过，所以矢量线充满了整个矢量场所在的空间。

(2) 散度(矢量场的散度是标量)。

散度表示穿过闭合曲面矢量线的通量密度，用 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S}{\Delta V}$$

任意正交坐标系下，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度计算公式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial u}{\partial v_1}(h_2h_3\boldsymbol{F}_1)+\frac{\partial u}{\partial v_2}(h_3h_1\boldsymbol{F}_2)+\frac{\partial u}{\partial v_3}(h_1h_2\boldsymbol{F}_3)\right]$$

直角坐标系中，拉梅系数 $h_1=1$、$h_2=1$、$h_3=1$，则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

散度不为零，必有通量源。散度表示矢量沿各自方向的变化率之和。

高斯(Gauss)散度定理：

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

高斯定理说明任意矢量场的法向分量在闭合曲面上的积分等于该矢量场的散度在该闭合曲面所包围体积上的积分。这种矢量场中的积分变换关系，架起了面积分和体积分之间相互转化的桥梁，将体积分转化为面积分，这一变换关系在电磁场理论中经常用到。

(3) 旋度(矢量场的旋度是矢量)。

环量是指矢量 $\boldsymbol{F}$ 沿某一闭合曲线(路径)的线积分，用公式表示为

$$\Gamma=\oint_l \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l F\cos\theta\mathrm{d}l$$

最大的环量密度即为旋度，显然它是矢量，用 $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}$、$\nabla\times\boldsymbol{F}$ 或 $\mathbf{curl}\boldsymbol{F}$ 表示。

任意正交坐标系下，旋度计算公式为

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_{v1} & h_2\boldsymbol{e}_{v2} & h_3\boldsymbol{e}_{v3} \\ \dfrac{\partial}{\partial v_1} & \dfrac{\partial}{\partial v_2} & \dfrac{\partial}{\partial v_3} \\ h_1F_{v1} & h_2F_{v2} & h_3F_{v3} \end{vmatrix}$$

直角坐标系中旋度的表示式为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

斯托克斯(STOKES)定理：

$$\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

物理意义：$\nabla\times\boldsymbol{F}$ 在任意曲面 S 的通量等于 $\boldsymbol{F}$ 沿该曲面的周界 $\boldsymbol{l}$ 的环量。斯托克斯定理将面积分转化为线积分，这一变换关系在电磁场理论中也经常用到。

(4) 散度和旋度的区别。

散度表示通过有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的通量密度，是标量，表示包围闭合面矢量线的多少；而旋度表示场的涡旋程度，是最大的环量密度，是矢量。对于任意矢量场，不仅要知道它的散度，还要知道它的旋度，这样才能得到矢量场的全解(即数学中的通解)。散度和旋度的比较如表 1.3 所示。

表 1.3　散度和旋度的比较

	相同点	不同点		
散度	都是关于矢量场性质的描写	标量	场与通量源的关系	矢量场各分量沿各自方向的变化率
旋度		矢量	场与涡旋源的关系	矢量场各分量沿正交方向的变化率

(5) 重要的矢量公式：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{F}-\nabla^2\boldsymbol{F}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}\equiv0$$

$$\nabla\times\nabla u\equiv\boldsymbol{0}$$

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\qquad\text{(高斯散度定理)——体积分和面积分的转换}$$

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\qquad\text{(斯托克斯定理)——面积分和线积分的转换}$$

3. 亥姆霍兹定理

有限区域 V 内的矢量场 $\boldsymbol{F}$ 由它的散度、旋度和区域边界面 S 上的分布(边界条件)唯一确定。

亥姆霍兹定理非常重要，它总结了矢量场的基本性质，是研究电磁场理论的一条主线。

4. 拉普拉斯算子

拉普拉斯算子是二阶微分算子，又称标量算子，它是标量函数梯度的散度：

$$\nabla^2 u=\nabla\cdot(\nabla u)$$

在直角坐标系下

$$\nabla^2 u=\nabla\cdot(\nabla u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

该方程常用于无旋场的求解。由于无旋场 $\boldsymbol{F}=-\nabla\phi$，故 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=-\nabla\cdot\nabla\phi=-\nabla^2\phi$，所以

$$\nabla^2\phi=-\nabla\cdot\boldsymbol{F}\begin{cases}\text{泊松方程}(\nabla\cdot\boldsymbol{F}\neq 0)\\ \text{拉普拉斯方程}(\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0)\end{cases}$$

1.2 典型题解

例 1-1 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z$，求：(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$；(3) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(4) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$。

解 (1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-25$

(2) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-7\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$

(3) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=-15$

(4) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-5\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+10\boldsymbol{e}_z$

例 1-2 求标量场 $u=x^2z+y^2$ 在点 $M(1,1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数及梯度。

解 $\boldsymbol{l}$ 在点 $M(1,1,2)$处的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3}$$

由梯度公式可求得该点的梯度为

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\bigg|_M=(2xz\boldsymbol{e}_x+2y\boldsymbol{e}_y+x^2\boldsymbol{e}_z)\big|_M=4\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$

根据梯度的性质该点的方向导数可以表示为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M=\nabla u\cdot\boldsymbol{e}_l\big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{10}{3}$$

注：标量场的梯度函数建立了标量场与矢量场的联系，这一联系使得某一类矢量场可以通过标量函数来研究，反之也可以通过矢量场来研究标量场。

例 1-3 在直角坐标系下验证 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$。

解 设 $\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$，则

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_y\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 x}\right)\boldsymbol{e}_z-\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z\\&\quad-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial^2 z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial^2 x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial z}\right)\\&\quad-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{e}_z)\end{aligned}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

例 1－4 已知矢量场 $\boldsymbol{F}(r,\theta,z)=\frac{k_0}{r^3}\boldsymbol{e}_r$，求：(1) 矢量的散度；(2) 矢量由内向外穿过圆柱面 $x^2+y^2=a$ 与平面 $z=h_1$ 和平面 $z=h_2$ 所围封闭曲面的通量，其中 a、k_0、h_1、h_2 均为大于零的常数，且 $h_1<h_2$。

解 (1) 由圆柱坐标系散度公式可知

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{k_0}{r^2}\right)=-\frac{2k_0}{r^4}$$

(2) 设圆柱侧面为 S_1，上下底面分别为 S_2、S_3，由通量公式可知

$$\psi=\iint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1+\iint_{S_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2+\iint_{S_3}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3$$

由于矢量 $\boldsymbol{F}$ 只有半径方向的分量，即矢量垂直于圆柱侧面 S_1，平行于上下底面 S_2、S_3，因此上式中只有第一项存在，故其矢量积分可以简化为标量积分，即

$$\psi=\iint_{S_1}\frac{k_0}{r^3}\boldsymbol{e}_r\cdot\mathrm{d}S_1\boldsymbol{e}_r=\iint_{S_1}\frac{k_0}{r^3}\mathrm{d}s_1=\frac{k_0}{a^3}[2\pi a(h_2-h_1)]=\frac{2\pi k_0(h_2-h_1)}{a^2}$$

例 1－5 已知矢量场 $\boldsymbol{F}=3y\boldsymbol{e}_x+(3x-2z)\boldsymbol{e}_y-(Cy+z)\boldsymbol{e}_z$ 为无旋场，求系数 C。

解 矢量场为无旋场，必有 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，即

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y & 3x-2z & -(Cy+z)\end{vmatrix}=(-C+2)\boldsymbol{e}_x=0$$

得系数 $C=2$。

1.3 课后题解

1.1 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{C}=5\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_z$，求：

(1) $\boldsymbol{e}_A$；(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4) θ_{AB}；(5) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(6) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(7) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解 (1) $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$，$\boldsymbol{e}_A=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y-\dfrac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z$

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\sqrt{1+36+16}=\sqrt{53}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-8-3=-11$

(4) 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{14},\ |\boldsymbol{B}|=\sqrt{17},\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-11$$

所以

$$\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{B}|}=\frac{-11}{\sqrt{17}\times\sqrt{14}}=-\frac{11}{\sqrt{238}}$$

$$\theta_{AB}=\pi-\arccos\frac{11}{\sqrt{238}}$$

(5) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{e}_x-6\boldsymbol{e}_y-10\boldsymbol{e}_z$

(6) $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z)=8+10-60=-42$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=-10\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-10\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z)\cdot(5\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_z)=-50+8=-42$$

(7) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{e}_x-40\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=55\boldsymbol{e}_x-44\boldsymbol{e}_y-11\boldsymbol{e}_z$$

1.2 如果向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 在同一平面上，证明 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0$。

证明 由定义知，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的方向必然垂直于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所共同决定的平面，而由条件知，$\boldsymbol{A}$ 也位于这一平面上。所以，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的方向必然垂直于 $\boldsymbol{A}$ 的方向，即 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0$。

1.3 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\sin\alpha$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\cos\beta-\boldsymbol{e}_y\sin\beta$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x\cos\beta+\boldsymbol{e}_y\sin\beta$，证明这三个向量都是单位向量，这三个向量是共面的。

证明　因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是单位向量，所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|=1$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\sin\alpha)\times(\boldsymbol{e}_x\cos\beta-\boldsymbol{e}_y\sin\beta)\\&=-\boldsymbol{e}_z(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\end{aligned}$$

而 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=0$，因为 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\perp\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是共面的。

1.4　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$，当 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 时，求 α。

解

$$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0;\ \alpha+2+3=0,\ \alpha=-5$$

1.5　已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$A$ 为一常量，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$；(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}$；(3) $\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$；(4) $\nabla\cdot(A\boldsymbol{r})$。

解　(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=1+1+1=3$

(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x(0-0)-\boldsymbol{e}_y(0-0)+\boldsymbol{e}_z(0-0)=0$

(3) 因为

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z)$$

所以

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{vmatrix}=0$$

(4) $\nabla\cdot(A\boldsymbol{r})=A(\nabla\cdot\boldsymbol{r})=3A$

1.6　证明三个向量 $\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{e}_x-7\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{C}=-2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$，形成一个三角形的三条边，并利用矢积求此三角形的面积。

证明　$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 组成三角形

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(5\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y)\times(3\boldsymbol{e}_x-7\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)=5\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y-20\boldsymbol{e}_z$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{90}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

1.7　点 P 和点 Q 的位置向量分别为 $5\boldsymbol{e}_x+12\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 和 $2\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$，求从点 P 到点 Q 的距离向量及其长度。

解

$$\boldsymbol{PQ}=(2\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)-(5\boldsymbol{e}_x+12\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=-3\boldsymbol{e}_x-15\boldsymbol{e}_y$$

$$|\boldsymbol{PQ}|=\sqrt{9+225}=\sqrt{234}=3\sqrt{26}$$

1.8　求与两向量 $\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$ 都正交的单位向量。

解

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y+10\boldsymbol{e}_z$$

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\sqrt{4+36+100}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$$

所以