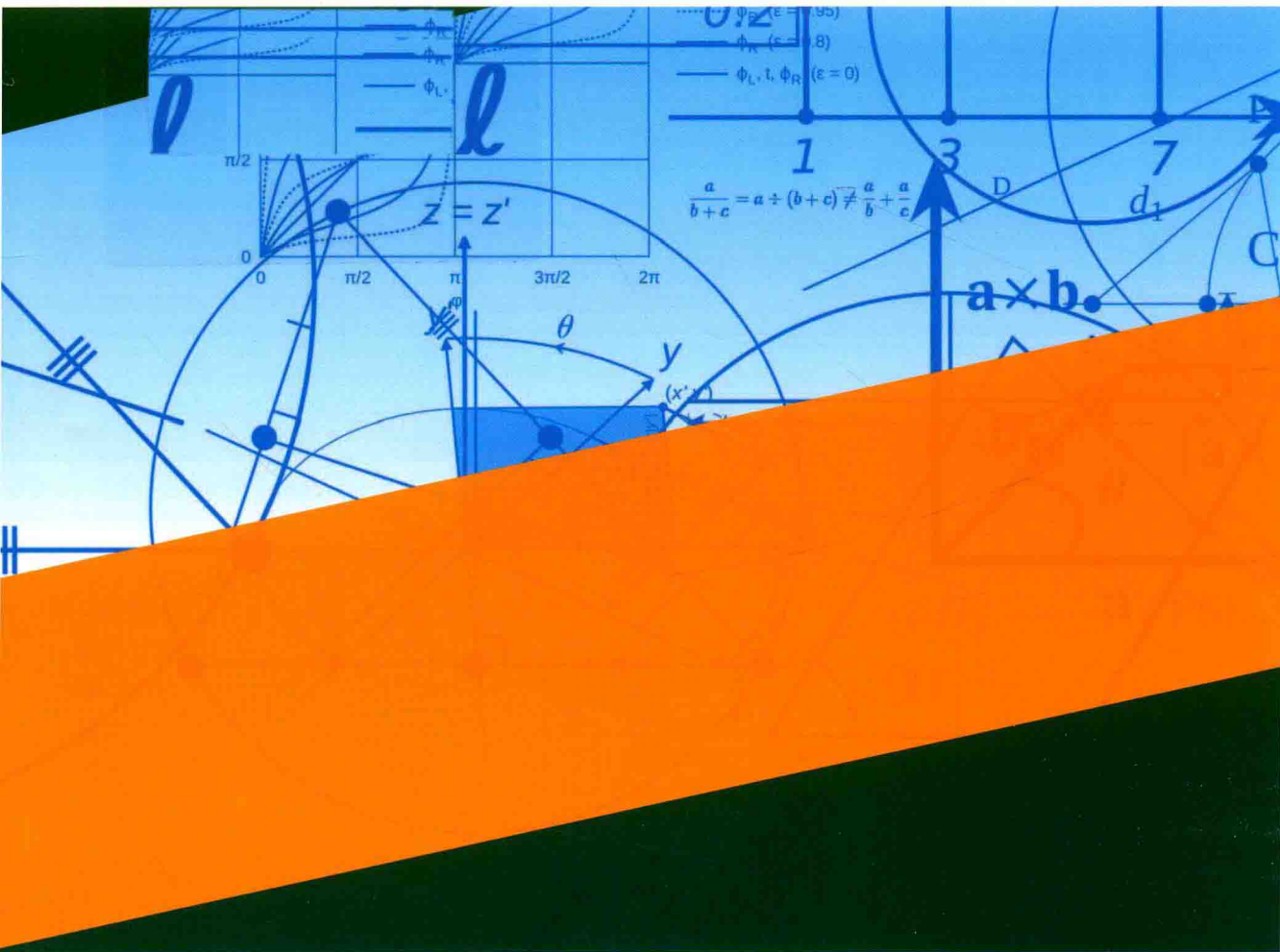




普通高等教育“十三五”规划教材

大学物理信息化教学丛书



大学物理学 第二卷

大学物理(下)(第二版)

黄致新 潘武明 王建中 熊水兵 主编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
大学物理信息化教学丛书

大学物理学 第二卷

大学物理(下)

(第二版)

黄致新 潘武明 主编
王建中 熊水兵

科学出版社

北 京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229,010-64034315,13501151303

内 容 简 介

本书是根据教育部制定的《理工科非物理类专业大学物理课程教学的基本要求》编写的.为适应新课程改革以后大学物理教学的需要,做好大学物理与中学物理教学的衔接工作,本书对传统教学体系的内容进行了调整、扩充,力图在加强学生理论基础的同时,着重培养学生的科学思维能力和科学思维方法.

全书分上、下两册,上册包括力学和电磁学,下册包括热学、光学基础及近代物理部分.

本书可作为高等学校理工科专业及师范院校非物理专业的大学物理教材,也可供成人教育及自学考试人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学.第二卷,大学物理.下/黄致新等主编.—2版.—北京:科学出版社,2018.6

(大学物理信息化教学丛书)

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-057821-1

I. ①大… II. ①黄… III. ①物理学-高等学校-教材 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 129255 号

责任编辑:高 嵘/责任校对:董艳辉

责任印制:彭 超/封面设计:莫彦峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2018 年 6 月第 二 版 印张:16 1/4

2018 年 6 月第一次印刷 字数:392 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

物理学是研究宇宙间物质存在的基本形式,以及物质的性质、运动、相互作用、相互转化等基本规律的科学.由于其研究的对象是普遍的,研究的规律是基本的,使得物理学成为自然科学的带头学科.近代科学技术发展的历史表明,物理学也是技术革命的先导,因为人类历史上几次技术革命均是由物理学引发的.另外,以相对论和量子论为基础的物理学描绘了物质世界的一幅完整图像,它揭示出各种运动形式的相互联系与相互转化,充分体现了世界的物质性与物质的统一性,因此物理学也是科学的世界观和方法论的基础.

对于理工科(非物理专业的)学校低年级学生,全面系统地学习物理学的基本知识,掌握物理学的基本规律和基本的研究方法,将会使其科学素养得到进一步提升,科学思维方法得到更好的掌握,科学思维能力得到进一步加强.因此,大学物理已成为综合性大学、高等师范院校理工科(非物理专业)低年级学生的一门重要的基础课程.但是,由于科学技术的迅猛发展,时代的不断进步,学生从中学进入到大学之后存在许多的不适应,物理教学衔接方面也存在许多问题.为了解决这些问题,我们新编并修订了《大学物理》,在编写与修订过程中注意了以下几点.

(1) 由于新课程改革的不断推进,学生在高中生阶段学习物理课程时采用的是模块选修方式,有的学生没有选修热学部分内容,有的学生没有选修光学部分内容,为了方便老师教学,也为了让学生从整体上认识和掌握物理学的思想和方法,在编写《大学物理》时重点加强了热学及光学部分的相关内容.

(2) 为了适应大学物理课程学时减少的要求,在保证课程理论的系统性、完整性、科学性的前提下,精选内容,减少篇幅,教材编排采用分篇进行的方式,任课教师可以针对不同专业的要求,适当选取合适的内容来进行教学.对于打*号的内容,教师也可以灵活选用.

(3) 为了使能够学好物理学,在注重阐明基本物理概念、基本物理规律和基本物理方法的同时,在每一篇的开头还对物理学的发展及相关物理知识的框架进行了系统的描述.

(4) 为了使适应时代发展的要求,在本书编写的过程中重点介绍了近现代物理知识的内容.一方面把相对论和量子理论作为重点放在第五篇单独进行介绍,另一方面尽量把物理学和现代高科技的发展及学科发展前沿进行关联.

(5) 为了培养学生的科学思维方法,提高学生分析问题和解决问题的能力,本书中精选了部分例题,并在每一章后列出了若干思考题.

(6) 为了方便教学,我们对新修订的教材内容做了适当调整.把力学中的振动和波动部分放到了光学部分前面,而且在振动部分增加了旋转矢量表示方法,把电磁振荡与电磁波也放在了光学部分前面,以方便课内的教学衔接.在近代物理基础部分,新增了“量子力

学初步”的内容,使得化学专业学生在修《量子化学》课程之前,对量子力学有初步的了解和认识.

(7) 由于学时有限,为了方便教师针对不同专业的学生,选取合适的大学物理教学内容,我们尽可能丰富了教材内容,并且对有些章节标以*号,以方便教师选取.

本书分上、下两册:上册包括力学、电磁学,下册包括热学、光学基础、近代物理.近代物理部分主要包括相对论基础、量子理论基础、波函数及薛定谔方程.对于新时代的大学生,学习和掌握一些相对论基础和量子理论基础的内容,对于其形成科学的世界观,掌握科学的方法论是有帮助的,因此也适当加强了关于这部分内容的介绍.

参与本书编写的有潘武明(第一篇力学,第四篇热学)、王建中(第二篇电磁学)、熊水兵(第三篇光学基础)、黄致新(第五篇近代物理).全书由黄致新负责统稿和定稿.在本书的编写过程中,华中师范大学物理科学与技术学院课程与教学论及学科教学(物理)方向的部分硕士研究生参与了插图绘制等工作.

本书的编写得到了华中师范大学物理科学与技术学院的领导以及讲授大学物理课程的老师的大力支持,特别是王恩科教授、杨亚东教授、刘守印教授、胡响明教授、黄光明教授等对本书的编写和出版给予了极大的关心和支持,公共物理教研室讲授大学物理课程的老人们对本书的修订也提出了很多宝贵的意见.科学出版社的同志为本书的出版做了大量的工作.本书在编写的过程中,编者参阅了大量的参考书籍.在此谨向以上各位表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中的不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2017 年秋

于武昌桂子山

目 录

第三篇 波动与光学基础

第 10 章 振动与波	3
10.1 简谐振动	3
* 10.2 阻尼振动	7
* 10.3 受迫振动、共振	9
10.4 平行简谐振动合成	11
10.5 垂直简谐振动合成	13
10.6 波的基本概念	15
10.7 机械波的波函数	18
10.8 波的能量和强度	23
10.9 电磁振荡与电磁波	26
10.10 波的衍射	30
10.11 波的干涉	32
* 10.12 驻波	34
10.13 声波和声速	37
* 10.14 多普勒效应	39
思考题	41
习题	42
第 11 章 几何光学基础	47
11.1 几何光学的基本定律	47
11.2 费马原理	50
11.3 发光点、光束、物和像	51
11.4 光在单球面上的折射和反射	53
11.5 薄透镜的成像公式	65
11.6 光度学的基本概念	70
思考题	75
习题	76
第 12 章 波动光学	79
12.1 偏振光和自然光	80
12.2 反射光和折射光的偏振	83

12.3 光的双折射现象	85
12.4 光波的叠加、光程	88
12.5 双缝干涉	91
12.6 等厚干涉和等倾干涉	94
12.7 迈克耳孙干涉仪、时间相干性	100
12.8 惠更斯-菲涅耳原理	104
12.9 单缝和圆孔的夫琅禾费衍射	106
12.10 光栅衍射、X 射线衍射	112
思考题	117
习题	119

第四篇 热 学

第 13 章 热力学概论	127
13.1 热力学第零定律	127
13.2 理想气体状态方程	128
13.3 热力学第一定律	130
13.4 热力学第一定律对理想气体的应用	135
13.5 卡诺循环	138
13.6 热力学第二定律	141
* 13.7 熵与熵增加原理	145
思考题	151
习题	152
第 14 章 分子运动论	154
14.1 理想气体的压强与温度	154
14.2 能量按自由度均分定理	158
* 14.3 范德瓦耳斯方程	160
14.4 麦克斯韦速率分布律	163
* 14.5 玻尔兹曼分布	165
14.6 平均自由程及内迁移现象	167
思考题	172
习题	173

第五篇 近代物理

第 15 章 相对论基础	177
15.1 力学的相对性原理 伽利略变换	177
15.2 狭义相对论的基本假设 洛伦兹变换	179

15.3 狭义相对论的时空观·····	183
15.4 相对论动力学基础·····	187
15.5 广义相对论简介·····	192
思考题·····	194
习题·····	195
第 16 章 量子理论基础 ·····	196
16.1 黑体辐射 普朗克的量子假设·····	196
16.2 光电效应 爱因斯坦光量子假设·····	200
16.3 康普顿效应·····	204
16.4 氢原子光谱 玻尔理论·····	207
16.5 德布罗意假设与电子衍射实验·····	211
16.6 不确定关系·····	215
思考题·····	217
习题·····	218
第 17 章 波函数及薛定谔方程 ·····	220
17.1 波函数·····	220
17.2 薛定谔方程·····	221
17.3 一维无限深势阱·····	224
17.4 一维方势垒 隧道效应·····	226
17.5 扫描隧道显微镜·····	228
17.6 一维谐振子·····	229
17.7 氢原子的量子力学描述·····	230
17.8 电子的磁矩·····	235
17.9 原子的壳层结构·····	238
思考题·····	241
习题·····	242
习题答案·····	243
附录 1 基本物理常量 ·····	249
附录 2 国际单位制 ·····	250

第三篇 波动与光学基础

振动和波动是自然界中一种十分广泛的运动形式,无论是在机械运动中、电磁运动中,还是在物质的分子和原子运动中;无论是在宏观领域中,还是在微观领域中,这种运动形式都普遍存在.人们所以能听到美妙的音乐,能看到五颜六色的光,能用无线电传递各种信息等,都与振动和波动有关.因此对振动和波动基本规律的研究有着十分重要的意义.振动和波动的基本理论是声学、光学、建筑学、地震学、造船学、无线电和电工技术等学科的基础.

尽管各种不同性质的振动和波动现象的物理本质各不相同,但是它们却具有一些共同的特征,遵从一些相同的基本规律,可以用相同的方法对它们加以描述和分析.

第 10 章 振动与波

机械振动的类型很多,但都有以下两个共同的特点:①物体的运动状态变化具有周期性;②物体受到了指向平衡位置的恢复力作用.在各种类型的机械振动中,最简单、最基本的是简谐振动,这是本章讨论的重点.除了简谐振动,本章还要讨论阻尼振动、简谐振动的合成与分解.

机械振动在介质中的传播称为机械波.波是自然界物质运动的一种普遍形式,除了机械波,还有电磁波及物质波.自然界中各种不同的波都有各自不同的特殊性,但也有普遍的共性,如它们有类似的波动方程,而且有折射、反射、干涉、衍射等共同的特性,这些性质统称为波动性.本章重点讨论机械波的运动规律,其中许多概念与结论也适用于其他类型的波.

10.1 简谐振动

10.1.1 简谐振动的运动学方程

将质量为 m 的质点固定在质量可以不计的弹簧一端,放置在光滑水平面上,如图 10-1 所示,称为弹簧振子.定义合外力为零处对应的位置为弹簧的平衡位置 O (弹簧的原长处).以平衡位置为坐标原点,质点受到的弹力为

$$F = -kx$$

式中: k 是弹簧的劲度系数; x 表示质点离开 O 点(平衡位置)的位移.若将弹簧垂直悬挂,下面放一个同样质量的质点,如图 10-2 所示,则作用在物体上的力为

$$F = -kx + mg$$

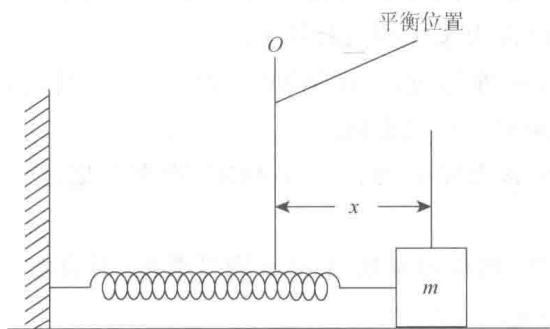


图 10-1 水平振动

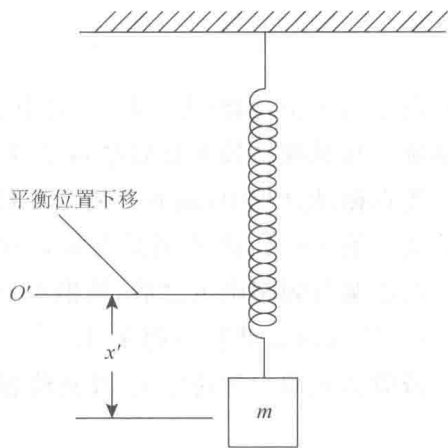


图 10-2 竖直振动

式中: x 是相对弹簧原长处的伸长量. 令系统合外力为零($F=0$), 可求出新的平衡位置下移了 $x_0 = \frac{mg}{k}$. 从新的平衡位置算起, 作坐标平移 $x' = x - \frac{mg}{k}$, 这时合外力同样可以写成 $F = -kx'$. 因此, 在这两种情况下, 合外力的表达式相同, 只是平衡位置不一样. 按照牛顿第二定律, 弹性系统的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (10-1)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, 式(10-1)可化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10-2)$$

这是一个常系数微分方程, 容易验证它的通解为

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (10-3)$$

式(10-3)就是简谐振动的运动学方程. 式中, A 与 φ 是两个待定常数, 可由初始条件确定.

10.1.2 简谐振动的振幅 频率与相[位]

由简谐振动的运动学方程知

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t + \varphi + 2\pi) \\ &= A \cos\left[\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right] \end{aligned}$$

因此在 t 时刻与 $t + \frac{2\pi}{\omega_0}$ 时刻, 质点的位置完全一样. 也就是说, 经过 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 时间后, 质点的位置又回到原处. 由此可知, 简谐振动是一个周期运动, 每 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 时间内完成一次全振动.

物体完成一次全振动所需要的时间称为周期, 用 T 表示为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10-4)$$

单位时间内完成全振动的次数称为振动频率, 用 ν 表示为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (10-5)$$

振动频率的单位是赫[兹](Hz). 式中 ω_0 称为圆频率, 单位为弧度/秒(rad/s). 由于 ω_0 仅与系统本身劲度系数 k 及质量 m 有关, 所以也称为系统的固有频率.

质点振动过程中, 离开平衡位置最大的位移称为振幅. 由运动学方程(10-3)看出, 位移的最大值 $x=A$, 故 A 就是振幅, 一般规定振幅只能取正值.

在振幅与频率确定之后, 简谐振动的运动状态完全由 $\omega_0 t + \varphi$ 确定, 物理上把这个量称为相[位], 而 φ 就称为初相[位].

若简谐振动的初速度 v_0 及初位置 x_0 已知, 则待定常数 A 及 φ 均可求出. 因为由

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

可知振动速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

当 $t=0$ 时,有

$$x_0 = A \cos \varphi$$

$$v_0 = -A \omega_0 \sin \varphi$$

联立以上两式,得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (10-6)$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \quad (10-7)$$

如果以时间 t 为横坐标,位移 x 为纵坐标,可以用 $x-t$ 曲线表示简谐振动的运动学方程,如图 10-3 所示. 其中振幅周期已在图上标出,则另一个特征量初相位反映在什么地方?

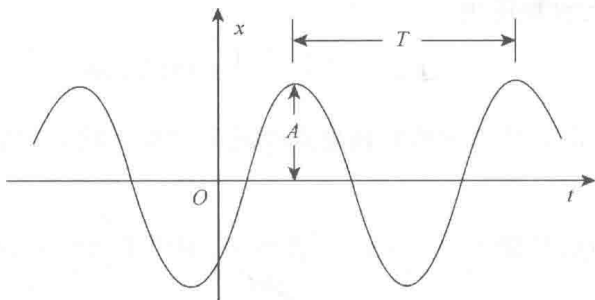


图 10-3 简谐振动图形

例 10-1 轻质弹簧下挂一个质量为 m 的物体,弹簧伸长量为 b . 若将物体从平衡位置向下拉长距离 L ,在 $t=0$ 时释放,求它的运动规律.

解 先求劲度系数 k ,由平衡条件

$$F = -kb + mg = 0$$

求得 $k = mg/b$, 而 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{b}}$.

再由公式求待定常数 A, φ (取坐标轴向下为正方向). 由 $t=0$ 时, $v_0=0, x_0=L$, 得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{L^2 + 0} = L$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} = 0$$

所以

$$\varphi = 0$$

故运动学方程为

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = L \cos \sqrt{\frac{g}{b}} t$$

10.1.3 简谐振动的能量 势能曲线

质量为 m 的质点作简谐振动, 在 t 时刻它的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

这时质点的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

若取平衡位置为零势能点, 系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

所以 t 时刻振动系统的机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \quad (10-8)$$

这一结果说明, 简谐振动系统的机械能是不随时间变化的守恒量, 而且正比于振幅的平方.

如果以 x 为横坐标, 势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 为纵坐标, 则势能曲线为抛物线. 由

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E - \frac{1}{2}kx^2$$

可得

$$v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} \quad (10-9)$$

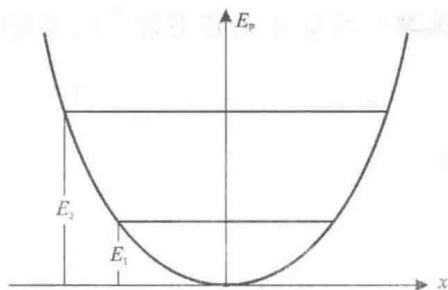


图 10-4 简谐振动能量与振幅关系

上式说明, 对不同的能量 E 值, 质点只能在 $-\frac{2E}{k} < x < \frac{2E}{k}$ 运动, 这一情况示于图 10-4 中, 图中的实横线表示质点的运动区域. 物理上把质点在势场中允许运动的区域称为势阱, 而不能达到区域的边

界称为势垒. 一个经典粒子是不可以穿过势垒的, 只有量子化的粒子才可能穿过势垒.

10.1.4 旋转矢量法

旋转矢量法是一种比较形象直观地研究简谐振动的方法. 如图 10-5 所示, 设想有一个矢量 A 绕原点 O 逆时针匀角速度旋转, 令矢量的模长

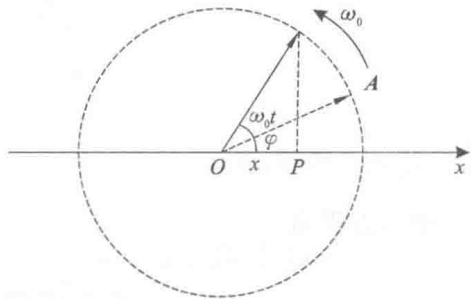


图 10-5 旋转矢量法

$|\mathbf{A}|$ 等于简谐振动的振幅 A , 其转动的角速度等于简谐振动的圆频率 ω_0 , 且 $t=0$ 时, 该矢量与 x 轴的夹角等于简谐振动的初相位 φ , 则在任意 t 时刻, 矢量 $\mathbf{A}$ 与 x 轴的夹角都等于简谐振动的相位 $(\omega_0 t + \varphi)$, 于是, 该矢量的端点在 x 轴上的投影点 P 的运动为

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

可见, 当矢量 $\mathbf{A}$ 绕原点 O 逆时针匀角速度旋转时, 其端点在 x 轴上的投影点 P 的运动是简谐振动. 因此, 对于任一简谐振动, 都可以与一个旋转矢量相联系, 形象地将简谐振动的特征量描绘出来, 这种方法在处理振动的合成、波的干涉和衍射等问题极为方便.

* 10.2 阻尼振动

简谐振动是一种理想的情况, 因为它忽略了摩擦阻力. 实际上, 阻力是不可避免的. 阻力对系统做功总要消耗系统的能量, 由于振动系统的能量正比于振幅的平方, 所以实际振动过程中, 振幅总是逐渐减小直至为零, 这样的振动称为阻尼振动.

10.2.1 阻尼振动运动方程

物体运动速度不太大时, 实验结果表明, 物体受到周围介质的阻力与物体速度的一次方成正比, 方向与运动速度相反, 即

$$f = -cv \quad (10-10)$$

式中: c 为阻尼系数, 它由物体的形状及周围的介质确定. 设弹簧沿 x 轴方向振动, 整个系统受到弹力 $-kx$ 和介质阻力 $-cv$ 作用, 如图 10-6 所示. 由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} \quad (10-11)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{c}{2m}$, 式(10-11)可改写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10-12)$$

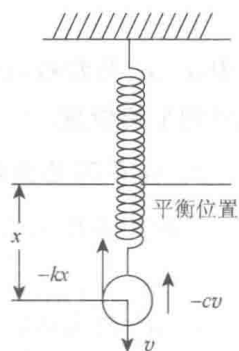


图 10-6 阻尼振动模型

10.2.2 三种典型的阻尼振动

1. 弱阻尼振动

当阻力很小时, 以至 $\beta < \omega_0$, 方程(10-12)的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

式中: A_0 和 φ 为待定常数, 可由初始条件确定. 我们把 $A_0 e^{-\beta t}$ 称为阻尼振动的振幅, 而

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (10-13)$$

称为阻尼振动的特征频率. 由此看出, 这样的系统在一段时间内能在平衡位置附近来回振动, 其周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (10-14)$$

比简谐振动大,表明系统振动速度变慢.当 t 足够大时,振幅 $Ae^{-\beta t}$ 趋近于零,振动消失,其运动学方程 $x-t$ 曲线如图10-7所示.

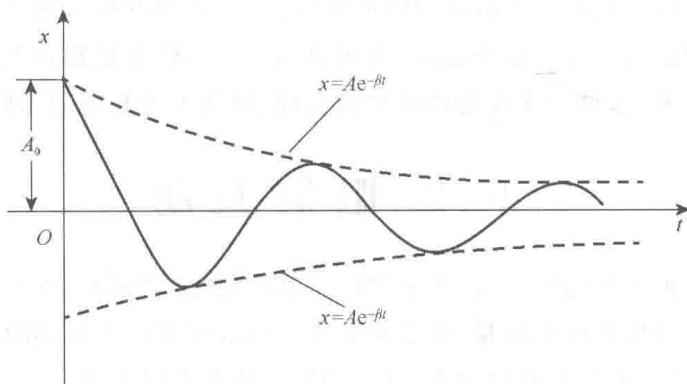


图 10-7 弱阻尼振动 $x-t$ 曲线

2. 过阻尼振动

如果阻力很大,以致式(10-12)中 $\beta > \omega_0$,这时动力学方程(10-12)的解为

$$x = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (10-15)$$

式中: c_1 、 c_2 为常数,由初始条件确定.很明显,这个解不再具有振动的特点,系统只能慢慢地回到平衡位置.

3. 临界阻尼振动

若阻力的作用恰好使 $\beta = \omega_0$,那么方程(10-12)的解为

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t} \quad (10-16)$$

式中: c_1 、 c_2 是由初始条件确定的常数.这一结果显然也不是往返运动,但由于这种运动的阻力小于过阻尼振动,相对而言,系统回到平衡位置所需要的时间比过阻尼情况要少,两种情况 $x-t$ 曲线的比较如图10-8所示.

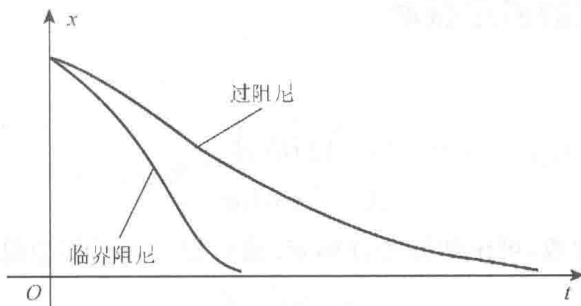


图 10-8 两种阻尼振动比较

通过上面的分析可知,实际上阻尼振动并不是一种稳定的运动,无论什么类型的阻尼

振动,只要时间足够长,都会静止下来,这种过程在物理学中称为暂态过程.这种运动只能维持在一定的时间内.

* 10.3 受迫振动、共振

由于阻力存在,要维持弹性系统的振动,必须用外力做功的方法.在阻尼振动系统上外加一个简谐驱动力的作用称为受迫振动,如喇叭、耳机中膜片、乐器的共鸣部分的运动都是受迫振动.

10.3.1 动力学方程及解

设驱动力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$, 按牛顿第二定律,受迫振动系统的动力学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (10-17)$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \frac{c}{2m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$, 式(10-17)可简化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (10-18)$$

从微分方程的理论可知,这个方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi') + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10-19)$$

其中,第一项是阻尼振动的解,它只在开始不太长的时间内对振动有影响,经过一段时间后,系统达到稳定状态,这部分解随 t 增加而消失.因此,对于稳定的受迫振动,只需讨论解的第二部分,这部分解称为受迫振动的稳定解,即稳定解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10-20)$$

此式表明,系统稳定后,还是一个简谐振动,而振动频率就是驱动力的频率.式中,两个常数 A 与 φ 可以从动力学方程获得.将稳定解 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 代入式(10-18),得

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - 2\beta A \omega (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\ & + \omega_0^2 A (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = f_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

整理后

$$\begin{aligned} & [A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta A \omega \sin \varphi] \cos \omega t \\ & - [A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A \omega \cos \varphi] \sin \omega t = f_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

由于上式对任意时刻 t 成立,所以两边 $\cos \omega t$ 与 $\sin \omega t$ 前的系数必须相同,即有

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta A \omega \sin \varphi = f_0 \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A \omega \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (10-21)$$

从式(10-21)中消去 φ , 得

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (10-22)$$

$$\tan \varphi = \frac{-2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10-23)$$