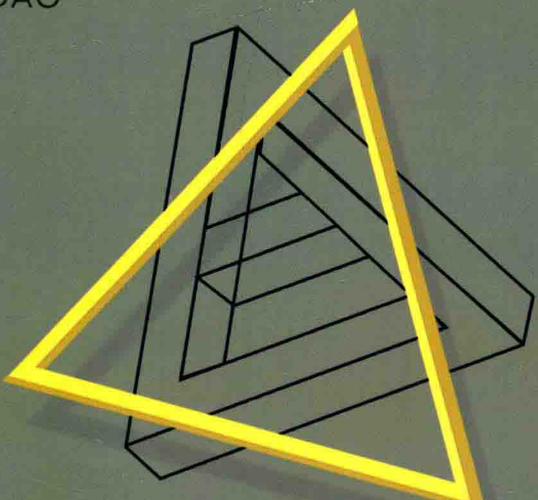
普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学
全程学习指导

（同济·第七版）

主　编　李秀珍　隋梅真
主　审　王继忠

GAODENG SHUXUE
QUANCHENG XUEXI ZHIDAO



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学全程学习指导

(同济·第七版)

主　编　李秀珍　隋梅真
副主编　黄福同　侯淑轩　王凤英
主　审　王继忠

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 提 要

本书是"高等数学"学习辅导书，章节编排按照同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)教材的章节顺序，分为12章.每章由5部分组成：预习导引，以问题为引导，指导学生自主阅读教材；知识梳理，列出了基本概念、重要定理及内容要点；典型题精讲，列出了各类考试中常见题型，精选2006—2016年数学考研真题及部分典型题目为例，讲解解题的方法与技巧；教材习题同步解析，给出了同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)教材中大部分习题的全解，列出了学生容易出错的习题的常见错误及错误原因；自测题，便于学生自我检查学习效果，并附有参考答案.

本书可供学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生及考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导：同济第七版/李秀珍，隋梅真主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2016.9(2017.7重印)
ISBN 978-7-5635-4863-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　②隋…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第178326号

书　　名　高等数学全程学习指导(同济·第七版)
主　　编　李秀珍　隋梅真
责任编辑　张保林
出版发行　北京邮电大学出版社
社　　址　北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真　010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址　www3.buptpress.com
电子信箱　ctrd@buptpress.com
经　　销　各地新华书店
印　　刷　北京时捷印刷有限公司
开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　28.5
字　　数　728千字
版　　次　2016年9月第1版　2017年7月第3次印刷

ISBN 978-7-5635-4863-7　　定价：52.00元

前　言

"高等数学"是理、工、农、经、管等各专业大学生的必修课程. 对于刚走入大学的新生来说,由于学习环境和学习方法发生了很大的变化,在学习"高等数学"的过程中会遇到各种困难. 为了帮助理工科学生学好"高等数学"和帮助准备考研的学生复习,我们编写了这本"高等数学"学习辅导用书. 配合同济大学数学系主编的《高等数学》(第七版)教材的使用,本书各章按照学习的实际需要分为预习导引、知识梳理、典型题精讲、教材习题同步解析、自测题五部分内容.

第一部分:预习导引,以学生已有的知识储备作为出发点,用问题作引导,启发学生通过自主阅读教材来探究解决问题的方法,找出自己在学习中遇到的疑难问题,以便在课堂上有的放矢,提高学习的效果和质量.

第二部分:知识梳理,对每章的主要知识点进行了梳理,列出了学生应该掌握的概念定理、解题方法及相关内容.

第三部分:典型题精讲,给出了各类考试中常见的题型及其主要解题方法和技巧;并从近十年研究生入学试题(例题中"110104" 表示:年份/类别/分值,即此题选自 2011 年数学一,分值为 4 分)及相关的教学辅导书中精选了部分有代表性的题目. 这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强. 通过例题解析,帮助学生更好地理解基本概念和理论,拓宽解题思路,熟练掌握解题方法和技巧.

第四部分:教材习题同步解析,给出了同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)教材中大部分习题的详解和部分学生解答困难及容易出错的习题分析. 通过难题、常见错解分析,帮助学生加深理解和运用有关概念、定理及法则,克服易犯错误.

第五部分:自测题,依据每章的重点、难点编制成自测试题,便于学生检验自己对所学内容的掌握情况,查漏补缺,巩固和提高学习效果.

参加本书初稿编写的有(排名不分次序)许国、王爽(第 1 章),于正文、田洁、张长学(第 2 章),张晓平、胡晓涛(第 3 章),黄福同、苏永明(第 4 章),葛倩、姚建丽(第 5 章),侯淑轩(第 6 章),魏瑞菊、刘红平(第 7 章),赵永谦、邱召友(第 8 章),隋梅真、于宁(第 9 章),王凤英、陈铃(第 10 章),李秀珍、李冬艳(第 11 章),崔强(第 12 章).

参加初稿修改的有隋梅真(第 1～6 章),李秀珍(第 7～12 章). 由黄福同(第 1、2、7、10 章)、侯淑轩(第 3、4、11、12 章)、王凤英(第 5、6、8、9 章)分别进行了校稿,最后由李秀珍对全书统稿. 王继忠教授对本书进行了认真的审检,并提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢.

我们对为本书提出宝贵意见和建议的老师、读者表示衷心的感谢. 由于水平有限,书中定有不妥之处,恳请同行、读者指正.

编　者

2016 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

一、预 习 导 引

第一节　映射与函数

（1）第一节的内容是在中学数学的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结以前学过的一些函数．通过阅读第 1 ～ 4 页，比较教材中映射、函数的概念与中学所学的相关内容有什么差异．

（2）阅读第 4 ～ 6 页，从中找出分段函数的特点．你会求分段函数的定义域吗？

（3）阅读第 6 ～ 9 页，列出函数具有哪几种特性，并举例说明．

（4）阅读第 10 ～ 11 页，回答下列问题：函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在什么情况下可以复合成一个新的函数？如果这两个函数可以复合成一个新的函数，这个新函数的定义域是什么？

（5）阅读第 12 ～ 15 页，回答下列问题：哪几类函数是基本初等函数？初等函数是怎样构成的？双曲正弦、双曲余弦和双曲正切都是初等函数吗？

第二节　数列的极限

（1）数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$，当 n 趋于无穷大时，一般项 $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 会趋向何值？怎样理解“当 n 无限增大时，数列 x_n 无限接近于常数 1”？仔细阅读第 18 ～ 21 页的内容，结合几何意义，直观体会用数学语言描述这些问题的方法．

（2）用数列极限定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 时，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，怎样证明正整数 N 的存在性，N 是否唯一？仔细阅读本节的例 3，你会从中得到答案．

（3）收敛数列有哪些性质？证明这些性质的方法有什么异同？仔细阅读本节第二部分，你会从中得到答案．这有助于你加深理解收敛数列的性质，对于以后利用极限定义证明相关问题也有所帮助．

第三节　函数的极限

（1）你能根据数列极限的定义，给出当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义吗？在定义中，ε 与 δ 各有什么意义？它们之间有什么关系？仔细阅读本节第一部分，细心体会几何解释，会帮助你加深理解函数极限定义．

（2）用函数极限定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 时，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，怎样证明正数 δ 的存在性，δ 是否唯一？仔细阅读本节的例 1 ～ 例 5，仿照教材图 1-23，画出这些例题的几何解释图，体会函数极限的几何意义，你会从中得到答案．

(3) 仿照定义 1,你能给出“当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义”吗?能画出它的几何解释图吗?阅读第 31 页,从中找出答案.

(4) 函数极限有哪些性质?为什么要强调局部有界性和局部保号性?仔细阅读本节第二部分,你会从中得到答案.

第四节 无穷小与无穷大

(1) 仔细阅读本节内容,回答下列问题:

① 一个很小的常数是无穷小量吗?

② 无穷小与函数极限的关系是什么?

③ 无穷大量是一个很大的常数吗?

④ 无穷小量与无穷大量什么关系?

(2) 为什么学习了函数极限的相关内容还要学习无穷小量呢?在以后学习导数、各类积分等问题时,注意无穷小量在其中的作用,你会在学习的过程中慢慢体会到无穷小量的重要性.

第五节 极限运算法则

(1) 在同一过程中的两个无穷小的和、差、乘积还是无穷小吗?有限个无穷小的和、差、乘积呢?有界函数与无穷小的乘积是无穷小吗?仔细阅读本节定理 1、定理 2 及两个推论,从中寻找答案.

(2) 极限的四则运算法则需要满足什么条件才可以用?阅读定理 3 及定理 4 寻找答案,通过阅读本节例 1 ~ 例 4,体会极限四则运算法则的应用.

(3) 通过阅读本节例 5 ~ 例 7,体会当 $x \to \infty$ 时,如何求有理分式的极限.

(4) 当函数 $y = f(u), u = g(x)$ 满足什么条件时,极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)]$ 存在,如何求这个极限?仔细阅读第 44 页,你会得到答案.

第六节 极限存在准则 两个重要极限

(1) 阅读第 45 ~ 47 页内容,体会如何利用准则 Ⅰ 证明重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;体会极限存在准则 Ⅰ 的应用.

(2) 重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 的特点是什么?仔细阅读本节例 1 ~ 例 3,体会利用这个重要极限求相关极限的方法.

(3) 利用极限存在的准则 Ⅱ,如何证明重要极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ 和 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 存在?仔细阅读第 48 ~ 52 页,体会用这个重要极限求相关极限的方法.

第七节 无穷小的比较

(1) 怎样比较同一过程中的两个无穷小量?仔细阅读第 52 ~ 54 页,你会找到答案.

(2) 阅读定理 2,利用等价无穷小代换求函数极限是求极限的常用方法,仔细阅读本节例 3 ~ 例 5,体会定理 2 的应用.

(3) 当 $x \to 0$ 时，有 $\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，但是 $(\sin x - \tan x) \sim 0$ 是不成立的，为什么？找出原因，在计算中不要犯类似的错误.

第八节　函数的连续性与间断点

(1) 函数在一点连续的概念是用极限定义的，通过阅读本节第一部分，你知道函数在一点连续与在该点的极限有什么区别吗？

(2) 造成函数在某点间断的原因有哪些？函数的间断点有哪些类型？仔细阅读本节第二部分，你会找到答案.

(3) 通过阅读本节内容，你会利用连续的定义证明函数在一点或区间上的连续性吗？你会求函数的间断点，并判断其类型吗？

第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性

(1) 通过阅读本节内容，你能理解结论"一切初等函数在其定义区间内都是连续的"的真正含义吗？它是我们研究实际问题的前提和基础.

(2) 复合函数的连续性定理的证明给出了连续复合函数的极限的求法，你能理解并应用吗？仔细阅读本节的例 5 ～ 例 8，体会定理 3 及定理 4 的应用.

第十节　闭区间上连续函数的性质

(1) 在闭区间上连续的函数有哪些性质？仔细阅读教材，从几何上给出解释.

(2) 如果是开区间上的连续函数，是否有类似性质？如果函数在闭区间上有间断点情况，又会如何？你能否举例说明？

(3) 零点定理是判定方程有解的常用根据，仔细阅读本节例 1，体会这类问题的证明方法.

二、知 识 梳 理

1. 映射与函数

(1) 映射.

定义　设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个 x，按照法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x 的像，并记作 $y = f(x)$，而 x 称为 y 的原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$；X 中所有元素的像所组成的集合，称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

映射的分类　满射、单射、一一映射(双射)、逆映射、复合映射.

(2) 函数.

定义　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f.

对每个 $x \in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的

函数值，记作 $y=f(x)$. 函数值的全体所构成的集合，称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

函数的性质 有界性、单调性、奇偶性、周期性.

反函数 设 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$，称映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

复合函数 设函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的定义域分别为 D_f，D_g，且值域 $R_g\subset D_f$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D_g$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数.

基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

双曲函数与反双曲函数

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

双曲正切 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

反双曲正弦 $\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

反双曲余弦 $\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

反双曲正切 $\operatorname{arth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

2. 极限的定义与性质

(1) 极限的定义.

数列极限的定义 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限的定义 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

左(右)极限 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限，记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad\left(f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right).$$

结论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$.

函数极限的定义 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$|x|>X$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2) 极限的性质.

定理 1(唯一性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，那么它的极限唯一.

定理 2(局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

定理 3(局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则存在 $\delta>0$，当 $0<$

$|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

定理 3′　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq 0)$，那么存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$ 成立.

推论　如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

***定理 4（函数极限与数列极限的关系）**　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N})$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

收敛数列有类似上述的性质.

3. 无穷小与无穷大

无穷小的定义　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的无穷小.

无穷大的定义　对于 $\forall M>0$，$\exists X>0(\delta>0)$，当 $|x|>X(0<|x-x_0|<\delta)$ 时，总有 $|f(x)|>M$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty(x\to x_0)$ 时为无穷大，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$.

无穷小的性质　设 $\alpha,\cdots,\beta$ 是在自变量的同一变化过程中的无穷小，u 是有界量，c 是常数，$n\in\mathbf{N}$，则 $\alpha\pm\beta$、$u\alpha$、$C\alpha$、$\alpha\beta$、α^n、$\alpha\pm\cdots\pm\beta$、$\alpha\cdot\cdots\cdot\beta$ 是这一变化过程中的无穷小.

4. 极限运算

极限的四则运算　设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

特别地　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$，　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

复合函数的极限运算　若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且 $\exists\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

结论
$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n,\end{cases}\quad a_0b_0\neq 0.$$

5. 极限存在准则　两个重要极限

极限存在准则

准则 Ⅰ（夹逼准则）　如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) 存在 $n_0\in\mathbf{N}$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n<x_n<z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则 Ⅰ′(夹逼准则)　如果当 $x \in \mathring{U}(x_0, r)$(或 $|x| > M$) 时，$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$，那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A$.

准则 Ⅱ　单调有界数列必有极限.

两个重要极限　(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

6. 无穷小的比较

设 $\lim \alpha = 0$，$\lim \beta = 0$，

(1) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$；

(2) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

(3) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

(5) 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

等价无穷小的性质　设 α, β 是在自变量的同一变化过程中的无穷小，则

(1) 若 $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$；

(2) 若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

7. 函数的连续性与间断点

函数的连续性

定义　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

左(右) 连续　如果 $f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\left(f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\right)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左(右) 连续.

间断点　若函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点　左、右极限都存在的间断点.

(1) 左、右极限都存在且相等，称为可去间断点；

(2) 左、右极限都存在但不相等，称为跳跃间断点.

第二类间断点　左、右极限至少有一个不存在的间断点.

初等函数的连续性　初等函数在其定义区间内均连续.

闭区间上连续函数的性质

定理 1(有界性与最大值、最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定

能取得它的最大值和最小值.

定理 2(零点定理)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 3(介值定理)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,若 C 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

三、典型题精讲

题型 1. 与函数的概念、性质相关的问题

【方法与技巧】

(1) 求函数的定义域. 求出使函数的表达式有意义的实数的集合.

(2) 建立函数关系式. 主要根据问题的实际背景,建立变量之间的等量关系.

(3) 函数特性的判别与证明. 主要利用函数性质的定义进行判别证明.

(4) 求已知函数的反函数. 求函数 $y=f(x)$ 的反函数,就是从 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$.

(5) 求由几个函数复合而成的复合函数. 主要采用代入法、分析法等将两个或两个以上的函数进行复合.

例 1.1　已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$,并写出它的定义域.

解　因为 $f(x)=e^{x^2}$,所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$,即 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$. 两边取对数,得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 又 $\varphi(x)\geqslant 0$,因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,其定义域为 $(-\infty,0]$.

注意　求复合函数的定义域时,内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

题型 2. 求数列或函数的极限

【方法与技巧】

常用的求极限的方法有:

(1) 用极限定义证明极限存在;

(2) 求 n 项和或积的极限需要先化简再求极限;

(3) 利用函数的左、右极限概念求极限;

(4) 运用极限的运算法则求极限;

(5) 用两个重要极限求极限;

(6) 用等价无穷小代换定理求极限;

(7) 用无穷小的性质求极限;

(8) 用极限存在的两个准则求极限.

例 1.2(150304)　设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

分析　本题考查数列极限与子列极限的关系.

解 选(D).

数列 $x_n \to a(n \to \infty) \Leftrightarrow$ 对任意的子列 $\{x_{n_k}\}$,均有 $x_{n_k} \to a(k \to \infty)$,所以(A)、(B)、(C) 正确.

(D) 错,因为(D) 选项缺少 x_{3n+2} 的敛散性,故选(D).

例 1.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)$.

分析 本题为 n 项和的极限,先化简求和再求极限.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]\\
&=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]\\
&=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

例 1.4(140304) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分大时有(　　).

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$　　(C) $a_n > a-\dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n < a+\dfrac{1}{n}$

分析 本题主要考查数列极限的定义.

解 选(A).

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$,对正数 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|a|$,存在自然数 N,当 $n > N$ 时,有 $|a_n - a| < \dfrac{1}{2}|a|$ 成立,即有 $|a_n| > \dfrac{1}{2}|a|$.

例 1.5(120204) 设 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$,$s_n = a_1+\cdots+a_n$,则数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分也非必要条件

分析 本题为抽象的数列极限,只能用极限存在准则 Ⅱ—— 单调有界数列必收敛推证.

解 由于 $a_n > 0$,所以数列 $\{s_n\}$ 是单调递增的,可知当数列 $\{s_n\}$ 有界时,$\{s_n\}$ 必收敛,也即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 是存在的,此时有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$,也即 $\{a_n\}$ 收敛.

反之,若 $\{a_n\}$ 收敛,$\{s_n\}$ 却不一定有界,例如,令 $a_n = 1$,显然有 $\{a_n\}$ 收敛,但 $s_n = n$ 是无界的. 故数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件,选(B).

例 1.6(080104) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $f(\{x_n\})$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $f(\{x_n\})$ 收敛

(C) 若 $f(\{x_n\})$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $f(\{x_n\})$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

分析 本题应利用函数的单调有界及极限存在准则 Ⅱ.

解 若 $\{x_n\}$ 单调,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,则 $f(\{x_n\})$ 单调有界,因此 $f(\{x_n\})$ 收敛,选(B).

例 1.7(080204) 设 $0 < a < b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} = $(　　).

(A)a　　(B)a^{-1}　　(C)b　　(D)b^{-1}

分析　本题应利用极限存在准则 Ⅰ.

解　因为 $a^{-1}=(a^{-n})^{\frac{1}{n}}<(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}<(a^{-n}+a^{-n})^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{1}{n}}a^{-1}$,而$\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}a^{-1}=a^{-1}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=a^{-1}$,故选(B).

例 1.8　$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ______.

分析　本题利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,变形化简即可.

解　令 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$,因为$\lim\limits_{x\to\infty}y=0$,所以

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{2x}{x^2+1}}=2.$$

例 1.9(100104)　极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$等于(　　).

(A)1　　(B)e　　(C)e^{a-b}　　(D)e^{b-a}

分析　本题利用重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$以及"若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}u(x)=A,A>0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}v(x)=B$,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}u(x)^{v(x)}=A^B$",变形化简即可.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\dfrac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}}\right\}^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}=e^{a-b}$,故选(C).

注意　若通过恒等变形或变量代换能化为下列形式之一:

$$\lim_{\psi\to0}\frac{\sin\psi}{\psi},\quad\lim_{\psi\to0}(1+\psi)^{\frac{1}{\psi}},\quad\lim_{\psi\to\infty}\left(1+\frac{1}{\psi}\right)^{\psi},$$

则可以分别利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$来求极限.

例 1.10(150104)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ______.

分析　本题利用等价无穷小代换,当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x$ 求极限.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

例 1.11(090204)　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ______.

分析　本题利用等价无穷小代换定理求极限比较简单.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-e^{\cos x-1})}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-\cos x)}{\dfrac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{3}x^2}=\dfrac{3}{2}e.$

注意 利用等价无穷小代换求多个因式乘积的极限时比较简便，但用等价无穷小代换求极限时必须注意：

(1) 必须是无穷小才能代换.

(2) 在乘除运算中，作为因子的无穷小可以代换；在加减运算中不可以直接代换，需要先通分或合并同类项化为乘除运算后再代换.

常用的等价无穷小有：当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$；$\tan x \sim x$；$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$；$\ln(1+x) \sim x$；$\arctan x \sim x$；$e^x - 1 \sim x$；$\arcsin x \sim x$；$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$；$(1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x$.

例 1.12(120304) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} =$ ________.

分析 本题为幂指函数求极限，可用恒等变形 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$；再利用当 $x \to 0$ 时 $\ln(1+x) \sim x$ 这一等价代换求极限.

解 由于 $(\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\frac{\ln \tan x}{\cos x - \sin x}}$，而当 $x \to \frac{\pi}{4}$ 时，$\tan x - 1 \to 0$，$\ln[1+(\tan x - 1)] \sim \tan x - 1$，从而有

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = -\sqrt{2},$$

所以原式 $= e^{-\sqrt{2}}$.

注意 幂指函数求极限的方法有：

(1) 化为第二类重要极限的形式，利用 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 求极限；

(2) 利用对数法化 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$，再求 $e^{\lim v(x) \cdot \ln u(x)}$.

题型 3. 无穷小的比较及应用

【方法与技巧】

无穷小的比较及相关求待定参数的问题，主要利用无穷小比较的定义及等价无穷小代换来确定.

例 1.13(160204) 设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1)$，$\alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$，当 $x \to 0^+$ 时，以上三个无穷小量从低阶到高阶的排序是(　　).

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　　(B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$　　(C) $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$　　(D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

分析 本题利用等价无穷的性质，先分别将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 用等价无穷小代换，再进行无穷小的比较较为简单.

解 选(B). 因为当 $x \to 0^+$ 时，

$$\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1) \sim x\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$\alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}},$$

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x,$$

所以三个无穷小量从低阶到高阶的排序是 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$.

例 1.14(140204)　当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是(　　).

(A)$(2, +\infty)$　　(B)$(1,2)$　　(C)$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$　　(D)$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

解　选(B).

由定义知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^\alpha(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(2x)^\alpha}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^\alpha x^{\alpha-1} = 0$，所以 $\alpha - 1 > 0$，故 $\alpha > 1$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{2}{\alpha}-1}}{2^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$，所以 $\dfrac{2}{\alpha} - 1 > 0$，即 $\alpha < 2$，故选(B).

例 1.15(130304)　当 $x \to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是(　　).

(A)$x \cdot o(x^2) = o(x^3)$　　(B)$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C)$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$　　(D)$o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

解　选(D).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x \cdot o(x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0$；

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0$；

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0$；

(D) 当 $x \to 0$ 时，$\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x^2} = \dfrac{o(x)}{x^2} + \dfrac{o(x^2)}{x^2}$ 极限不存在，所以选(D).

例 1.16(130204)　设 $\cos x - 1 = x \cdot \sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)| < \dfrac{\pi}{2}$，则当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是(　　).

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小　　(D) 与 x 等价的无穷小

解　选(C). 当 $x \to 0$ 时，因为 $\cos x - 1 = x \cdot \sin\alpha(x)$，$\cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $x \cdot \sin\alpha(x) \sim -\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\sin\alpha(x) \sim -\dfrac{1}{2}x$.

又因为 $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$，所以 $\alpha(x) \sim -\dfrac{1}{2}x$，所以 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小，所以选(C).

题型 4. 函数连续性与间断点的判断

【方法与技巧】

这类问题通常从函数连续定义或函数在一点是否左右连续出发进行讨论. 常见题型有：

(1) 求函数的间断点并判断其类型；