教育部教师工作司组织专家审定
高等院校小学教育专业规划教材

高等数学基础

（下册）（第2版）

主　编　邱　森

高等教育出版社

部教师工作司组织专家审定

院校小学教育专业规划教材

高等数学基础

GAODENG SHUXUE JICHU

（下册）（第2版）

主　编　邱　森

编写者　邱　森　高尚华

高等教育出版社·北京

内容提要

全书分上、下册，上册的主要内容为一元微积分，下册的主要内容为空间解析几何、多元函数微积分、线性代数、概率与统计等。全书每一部分内容均以概念导入起，从直观问题到抽象数学知识，题材丰富有趣，反映社会对数学的需求；表述浅近易懂、深入浅出。内容注重正本清源，刻画数学本质，至简至易；强调学生通过动手尝试进行数学研究，获得数学创造体验，训练思维能力。修订版新增数学应用内容，介绍用数学建模解决实际问题的全过程；新增“问题与思考”“探究与发现”栏目，强调思想与方法学习；更强调与小学数学的联系，沟通大学数学学习与小学数学教学之间的联系，突出学以致用。

本书可供高等院校小学教育专业作为教材使用，也可供其他专业学生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础. 下册/邱森主编. --2 版. --北京：高等教育出版社，2018. 10

ISBN 978-7-04-050533-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①邱… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 203406 号

策划编辑 肖冬民　　责任编辑 肖冬民　　封面设计 姜　磊　　版式设计 徐艳妮
插图绘制 于　博　　责任校对 刘丽娴　　责任印制 田　甜

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京人卫印刷厂		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	22	版　次	2007 年 12 月第 1 版
字　数	450 千字		2018 年 10 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2018 年 10 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	40.00 元

物 料 号　50533-00

高等院校小学教育专业规划教材总序

教育部教师工作司

我国已进入全面建成小康社会、加快推进社会主义现代化的新的历史阶段。在这样一个历史阶段，教育越来越成为促进社会全面发展、推动科技迅猛进步，进而不断增强综合国力的重要力量，成为我国从人口大国逐步走向人力资源强国的关键因素。我国的教师教育正面临着前所未有的机遇和挑战。教师教育的改革发展直接关系到千百万教师的成长，关系到素质教育的全面推进，关系到一代新人思想道德、创新精神和实践能力的培养和提高，最终关系到推动科学发展、促进社会和谐、全面建成小康社会奋斗目标的实现。

培养具有较高学历的小学教师是全面建成小康社会和适应基础教育改革与发展的迫切需要，也是我国教师教育改革发展的必然趋势。为了适应基础教育改革与发展的需要，我国对培养较高学历小学教师工作进行了长时间的积极探索，取得了较大成绩，并积累了许多宝贵经验。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》提出：到2020年，要“努力造就一支师德高尚、业务精湛、结构合理、充满活力的高素质专业化教师队伍”。《教育部关于大力推进教师教育课程改革的意见》提出：“要围绕培养造就高素质专业化教师的目标，坚持育人为本、实践取向、终身学习的理念，实施《教师教育课程标准(试行)》，创新教师培养模式，强化实践环节，加强师德修养和教育教学能力训练，着力培养师范生的社会责任感、创新精神和实践能力。”为此，要优化教师教育课程结构，改革课程教学内容，开发优质课程资源等。

开展小学教师培养工作，课程教材建设是关键。当务之急是组织教育科研机构、高等师范院校的专家学者和教师联合编写出一套高水平、规范化的、专为培养较高学历小学教师的教材。

编写小学教育专业课程教材，应该遵循以下原则：

一、时代性与前瞻性。教材要面向现代化、面向世界、面向未来，反映当代社会经济、文化和科技发展的趋势，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念。

二、基础性与专业性。教材要体现高等教育的基础性，同时要紧密结合当今小学教育课程改革的趋势和实施素质教育的要求，针对小学教育专业的特征和小学教师的职业特点，力求构建科学的教材体系，提高小学教师的专业化水平。

三、综合性与学有专长。教材要根据现代科技发展和基础教育课程改革综合化的趋势，强化综合素质教育，加强文理渗透，注重科学素养，体现人文精神，加强学科间的相互融合以及信息技术与各学科的整合；同时，根据小学教育的需要，综合性教育与单科性教育相结合，使学生文理兼通，学有专长，一专多能。

四、理论与实践相结合。教材要根据小学教师职前教育的要求，既要科学地安排文化知识课和教育理论课，又要加强实践环节，注重教育实践和科学实验，重视教师教育教学能力的培养。

五、充分体现教材的权威性、专业性、通用性和创新性。以教育部制定的《教师教育课程标准（试行）》为编写依据，以本、专科通用为目的，培养、培训沟通，在教材体系框架、内容、呈现方式等方面开拓创新，加大改革力度，充分体现以学生为本的教育理念，使教材从能用、好用提升到教师、学生喜欢用。

高等教育出版社根据以上原则组织编写了有关教材，经过专家审定，我们向各地推荐这套教材，请有关单位和学校酌情选用。

第 2 版前言

本书是在第 1 版的基础上全面修订的，我们保持了本教材的特色，力求在培养学生的应用意识和创新能力上形成新的特色，新增了“探究与发现”“阅读与思考”等栏目。

第 1 版前言

在“探究与发现”中，探究性的题材是多样的，可以是数学问题，也可以是实际问题，通过探究性问题的自主探究，学习者可以尝试数学研究或数学建模的全过程，积累创造性思维的经验，培养长期起作用的洞察力、理解力以及探索和发现的创新精神与实践能力。

在“阅读与思考”中的应用性题材来源于物理学、医学、生命科学和经济学等各个领域，它们反映了当今社会对数学的需求，也体现了数学的自身价值，都具有一定的实际背景，有一定的应用价值，从中我们可以看到，许多重大的科学发现都是从学科之间的相互交叉、相互渗透中逐渐产生的，一些突破性的想法往往产生于人们意想不到的事物之间的联系。学生接触这些现代化的新内容和新思想，了解数学的现代应用，有利于培养应用意识和创新意识。我们也可以看到，最深的道理也可以用最浅近的方式来表达，一些原创性思想往往是简单而精彩、学生又易于接受的。例如，现代医学成像技术 CT 被公认为 20 世纪 70 年代的重大科技突破，用线性方程组就能说明 CT 图像重建的基本原理。在教学时教师只要简单介绍问题的创意与构思，让学生弄清需要解决什么实际问题，可以用什么数学工具建立数学模型来解决问题，这样，通过应用就可以让学生更深刻地理解数学的内容、方法和意义，从而加强基础，不需多占课时。

在修订中，我们对第 1 版削枝强干，更新例题，凸显特色，为改善学生的学习方式提供时间和空间，使学生在打好基础的同时，学会用数学的思考方式解决问题，认识世界。另外，修订中我们删除了“积分表”的内容，将习题答案以二维码方式链接在目录中，学习者可用手机扫描二维码获取。

本书虽经多次打磨，但缺点和疏漏之处仍在所难免，恳请使用本书的教师和同学批评指正。在教材编写和出版过程中，我们得到了高等教育出版社的支持和协助，在此也深表谢意。

编　者

2018 年 3 月

目 录

全书习题答案

第七章　空间解析几何

本章学习提要

- 向量代数
- 空间的平面和直线
- 二次曲面

从 17 世纪到 19 世纪初是变量数学时期，这时期是以法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）和费马（P. de Fermat，1601—1665）创立解析几何学为起点的. 笛卡儿从轨迹开始找出其方程. 费马则从方程出发研究其轨迹，他们工作的出发点不同，但却殊途同归，基本思想都是在平面上引进所谓“坐标”的概念，并借助这种坐标在平面上的点和有序实数对 (x,y) 之间建立一一对应关系，将一个代数方程 $f(x,y)=0$ 与平面上一条曲线对应起来，于是几何问题便可归结为代数问题，并反过来通过代数问题的研究发现新的几何结果. 关于空间解析几何，虽然笛卡儿曾提到过立体解析几何，但他没有详细阐述，把平面解析几何推广到空间，是从 17 世纪中叶开始的，它的发展则主要是在 18 世纪. 1715 年，瑞士数学家约翰·伯努利（John Bernoulli，1667—1748）在给莱布尼茨的信中引用了现在通用的三个坐标平面. 1731 年，法国数学家克莱洛（A. Clairaut，1713—1765）在《关于双重曲率曲线的研究》中，给出了一些曲面的方程. 1748 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783）在《无限小分析引论》第二卷的附录中，引进了坐标变换和欧拉角，将一般的三元二次方程化成标准形，得到了六种曲面：锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面（这是他发现的）及抛物柱面. 法国数学家蒙日（G. Monge，1746—1818）在他的论文《代数在几何中的应用》（1802 年）中，证明了二次曲面的每一个平面截口都是一条二次曲线. 克莱洛、欧拉、蒙日等人的工作使空间解析几何变成了几何学的一个分支，他们对微分几何的早期发展也做出了重要的贡献，空间解析几何的早期工作和微分几何的发展有着紧密的联系.

空间解析几何的主要任务是用代数的方法研究空间图形的性质. 这在工程技术上也有广泛的应用. 本章将介绍向量代数、空间的平面和直线、二次曲面等基础知识，利用它们，我们也能给多元函数提供直观的几何解释，给多元函数的积分学提供必要的准备知识.

一　向量代数

向量是解析几何中最重要的基本概念之一，它在数学和物理中都有广泛的应用. 本节将介绍向量代数的基本概念及其应用. 下一节将利用向量来讨论空间的平面方程和直线方程及其性质.

7.1　空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序实数对（即点的坐标）(x,y) 对应起来. 为了确定平面上任意一点的位置，我们必须要用两个坐标：横坐标 x 和纵坐标 y. 现在为了确定三维空间中任意一点的位置，我们需要在平面直角坐标的基础上，再增加一条数轴，引进竖坐标，建立空间直角坐标系，用三个坐标表示三维空间的点.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴：Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴（图 7-1），这三条轴分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴. 通常我们把 x 轴和 y 轴设在水平面上，而 z 轴则是垂直线，它们的正方向符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向转向 y 轴正向时，大拇指指向 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点（简称原点）.

设 P 是空间一已知点，过点 P 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，设它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 A,B,C（图 7-2），这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 我们把有序实数组 (x,y,z) 称为点 P 的坐标，把 x,y,z 依次称为点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 (x,y,z) 的点 P 通常记作 $P(x,y,z)$. 反过来，已知一有序实数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 A，在 y 轴上取坐标为 y 的点 B，在 z 轴上取坐标为 z 的点 C，然后通过 A,B 和 C 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 P 的坐标恰是 (x,y,z). 这样，我们就建立了空间的点 P 和有序实数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

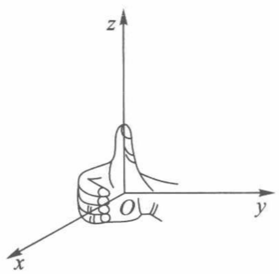

图 7-1

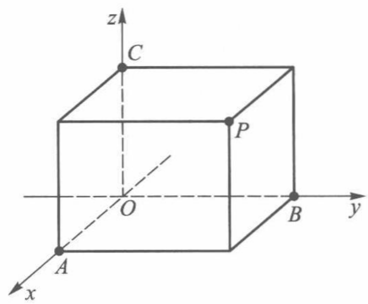

图 7-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面. 由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 平面；由 y 轴及 z 轴所确定的平面称为 yOz 平面；由 z 轴及 x 轴所确定的平面称为 zOx 平面. 这样定出的三个平面统称为坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限（图 7-3）. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限. 在第一卦限内的点的坐标均为正数.

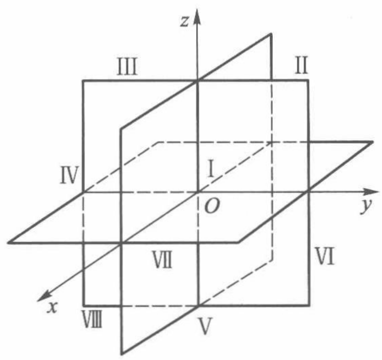

图 7-3

坐标轴和坐标面上的点的坐标各有一定的特征. x 轴上的点的纵坐标和竖坐标均为 0，因此，它的坐标的形式是 $(x,0,0)$，类似地，在 y 轴和 z 轴上的点的坐标形式分别是 $(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$. 如果点 $P(x,y,z)$ 在 yOz 平面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 平面上，则 $y=0$；在 xOy 平面上，则 $z=0$. 如果点 $P(x,y,z)$ 为原点，则 $x=y=z=0$.

例 7.1 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 $|AB|=7$，$|AD|=6$，$|AA_1|=10$. 以

长方体的顶点 A 为坐标原点，以边 AB, AD, AA_1 分别所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立直角坐标系(图 7-4). 求长方体的各顶点的坐标.

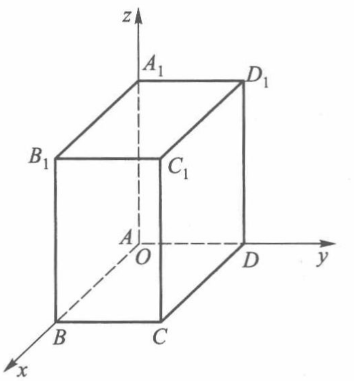

图 7-4

解 点 A 是坐标原点 O，其坐标为 $(0,0,0)$. 点 B 在 x 轴的正半轴上，且 $|AB|=7$，所以 B 点的坐标为 $(7,0,0)$. 同理，D 点在 y 轴的正半轴上，其坐标为 $(0,6,0)$. C 点在 xOy 平面上，其竖坐标为 0，横坐标和纵坐标分别为 7 和 6，所以 C 点坐标为 $(7,6,0)$.

类似地可得，A_1 点坐标为 $(0,0,10)$，B_1 点坐标为 $(7,0,10)$，D_1 点坐标为 $(0,6,10)$.

最后，求 C_1 点的坐标. 由于过点 C_1 的三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 B, D 和 A_1，这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 7, 6 和 10，所以 C_1 点坐标为 $(7,6,10)$.

在建立了空间直角坐标系后，平面中的许多概念和结论都可以推广到空间中来.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点(图 7-5)，则我们也可以利用勾股定理来求 P_1 和 P_2 之间的距离 $|P_1P_2|$.

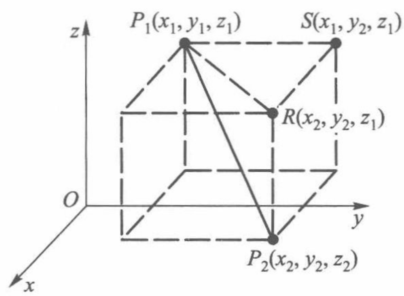

图 7-5

因为 $|P_1P_2|^2=|P_1R|^2+|RP_2|^2$ 和 $|P_1R|^2=|P_1S|^2+|SR|^2$，所以

$$|P_1P_2|^2=|P_1S|^2+|SR|^2+|RP_2|^2.$$

又因为 $|P_1S|^2=(y_2-y_1)^2$，$|SR|^2=(x_2-x_1)^2$ 和 $|RP_2|^2=(z_2-z_1)^2$，所以

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

则 P_1 和 P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

上式称为空间两点之间的距离公式.

特别是，从点 $P(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 7.2 求点 $P_1(3,-1,8)$ 和点 $P_2(0,1,2)$ 之间的距离.

解
$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(0-3)^2+[1-(-1)]^2+(2-8)^2}\\&=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7.\end{aligned}$$

7.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

在研究力学、物理学以及工程技术的各种问题时，我们将会遇到各种量. 有一些

量在有了测定单位后，只需用一个实数就可以表示. 例如，温度、时间、长度、面积、体积等，这些只需要用一个实数和一个计量单位就可以表示的量称为标量. 但是，也有一些量只用一个实数和一个计量单位来表示还不够. 例如，我们考察这样的一个问题：

一艘轮船从海港向大海行驶 10 km 后抛锚停驶，试问：能否就此确定该船的实际位置？

我们发现，仅知道行驶的距离还不能确定它的实际位置，必须知道它的行驶方向. 在物理学中，人们把物体位置的变化称为物体的位移，位移是一个既有大小又有方向的量. 我们把既有大小又有方向的量称为向量. 除了位移以外，速度、加速度、力等都是既有大小又有方向的量，因此，它们都是向量.

在几何学中人们通常用有向线段来表示向量，用线段的长表示向量的大小，以箭头所指的方向（即从始点到终点的方向）表示向量的方向. 一般地，以 A 为始点，B 为终点的有向线段所表示的向量（如图7-6）记作$\overrightarrow{AB}$，读作向量 AB，有时也可记作 $\boldsymbol{a}$. 向量的长度称为向量的模，向量$\overrightarrow{AB}$的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量. 模等于零的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，零向量是始点和终点重合的向量，它的方向是任意的.

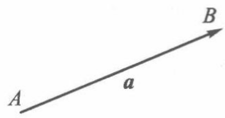

图 7-6

一个向量的重要特性是它的大小和方向. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有相同的大小和方向，不管它们是否具有相同的始点，它们都称作是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 实际上，相等的向量就是经过平移能完全重合的向量. 这是因为向量经过平移，它的大小和方向都不会改变，所以，平移后所得到的向量与原向量相等. 如在图 7-7 中，$\overrightarrow{AB}$经平移后可得$\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$是两个相等的向量，并且可记作

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$$

例 7.3 已知平行四边形 $ABCD$，O 是对角线的交点，分别写出图 7-8 中与$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AO}$相等的向量.

解 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$.

注意，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同是指它们在同一直线上或者在平行直线上，并且指向是相同的. 在图 7-8 中，向量$\overrightarrow{BO}$和$\overrightarrow{DO}$在同一直线上并且模相等，但是由于它们的指向相反，即方向相反，因而它们不相等.

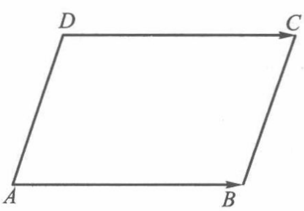

图 7-7

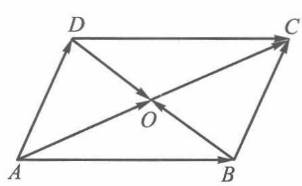

图 7-8

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，$\boldsymbol{a}$ 的负向量记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如，在图 7-8 中，向量$\overrightarrow{DO}$是$\overrightarrow{BO}$的负向量，即

$$\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{BO}.$$

又如，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

2. 向量的加法与减法

在力学中，两个不在一条直线上的共点力$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的合力是以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OC}$所表示的力（图 7-9），这就是求两力的合力的平行四边形法则.

在数学中，我们也同样用平行四边形法则来定义向量的加法运算. 我们把以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OC}$，称为向量$\overrightarrow{OA}$和向量$\overrightarrow{OB}$的和，记作$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$（图 7-10）. 于是，

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

这种用平行四边形法则规定的两个向量的和的运算称为向量的加法.

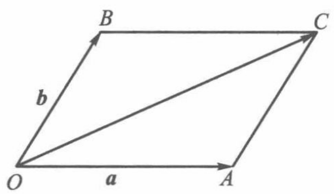

图 7-9

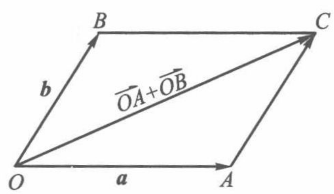

图 7-10

由于平行四边形的对边平行且相等，所以，在图 7-10 中，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，因此，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$. 于是，从图 7-10 中我们还可以看出，可以这样来作两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和：作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点 A 为始点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，就得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$，这一法则称为向量加法的三角形法则. 例如，一个人从 O 走到 A，位移为$\overrightarrow{OA}$，再从 A 走到 C，位移为$\overrightarrow{AC}$，那么这两个位移的合成就是$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$. 我们利用$\overrightarrow{OC}$就可以表示该人经过两次位移后的实际位移.

位于一直线上的两个同向或反向向量的加法，也可按三角形法则进行，如图 7-11 所示.

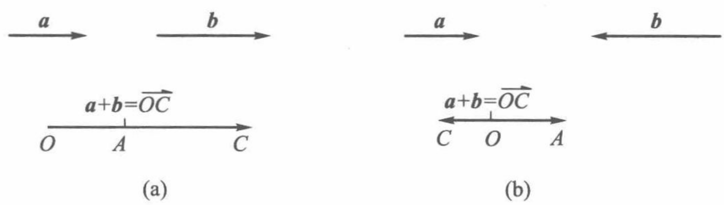

图 7-11

向量的加法符合下列运算律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为按向量加法的平行四边形法则，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（参见图 7-10），所以交换律成立. 又如图 7-12 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再加上 $\boldsymbol{c}$，得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，与 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 所得之和 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 相同，因而结合律也成立.

例 7.4 已知平面内有三个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$，它们的大小相等，并且俩俩之间的夹角都是 120°. 求这三个力的合力.

解 如图 7-13，以 $\overrightarrow{OB}(=\boldsymbol{F}_2)$，$\overrightarrow{OC}(=\boldsymbol{F}_3)$ 为邻边作平行四边形 $OBDC$.

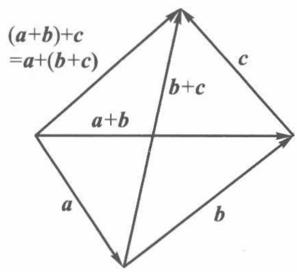

图 7-12

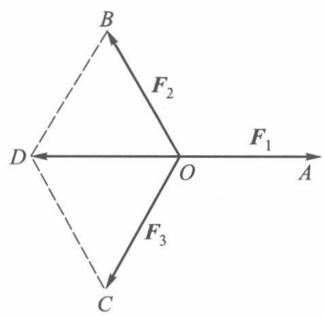

图 7-13

因为 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，所以 $|BD|=|OC|=|OB|$，又因为 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 夹角为 120°，故 $\angle DBO=60°$，所以 $\triangle BDO$ 是等边三角形. 因此，$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OB}|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_1|=|\overrightarrow{OA}|$.

注意到 $\angle BOD=60°$，所以，$\angle AOB+\angle BOD=180°$，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$. 于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\\&=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OA})\\&=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 三个力的合力为 $\mathbf{0}$.

与有理数的减法运算类似，如果已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，那么我们把 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

求两个向量的差的运算称为向量的减法，与数的减法运算类似，我们也容易看到向量的减法运算是加法运算的逆运算.

求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差的运算可按以下方法进行：

首先把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 进行平移，使它们的始点是同一个点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（图 7-14），作平行四边形 $OCAB$，那么

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

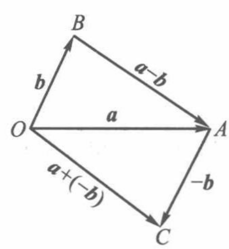

图 7-14

由于$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$，所以，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为始点，$\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为终点的向量.

3. 数与向量的乘法

将两个相等的向量相加，例如，将$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 和$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 相加，可以得到

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$$

如图 7-15(a)所示. 很自然地，我们把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 记作 $2\boldsymbol{a}$. 于是，用 2 乘一个向量，则表示将该向量的模增加一倍而方向不变. 我们也可以用-1 乘一个向量来表示一个大小不变而方向相反的向量，如图 7-15(b)所示，于是，我们有

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

(a)　　(b)

图 7-15

一般地，对于实数 c，我们把 $c\boldsymbol{a}$ 表示的向量称为实数 c 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积，其中 $c\boldsymbol{a}$ 的模与方向规定如下：

(1) $|c\boldsymbol{a}|=|c||\boldsymbol{a}|$。

(2) 当 $c>0$(或<0)时，$c\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同(或相反)；当 $c=0$ 时，$c\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向不确定.

根据上述定义，我们可以验证数与向量的乘法符合以下的运算律：

(1) $(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$;

(2) $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$;

(3) $m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$.

例 7.5　求 $2(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$.

解

$$2(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}.$$

例 7.6　设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 O(图 7-16). 试用 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$来表示向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$和$\overrightarrow{OD}$.

解　因为$\overrightarrow{OA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

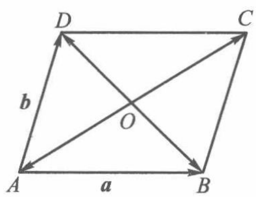

图 7-16

因为$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$