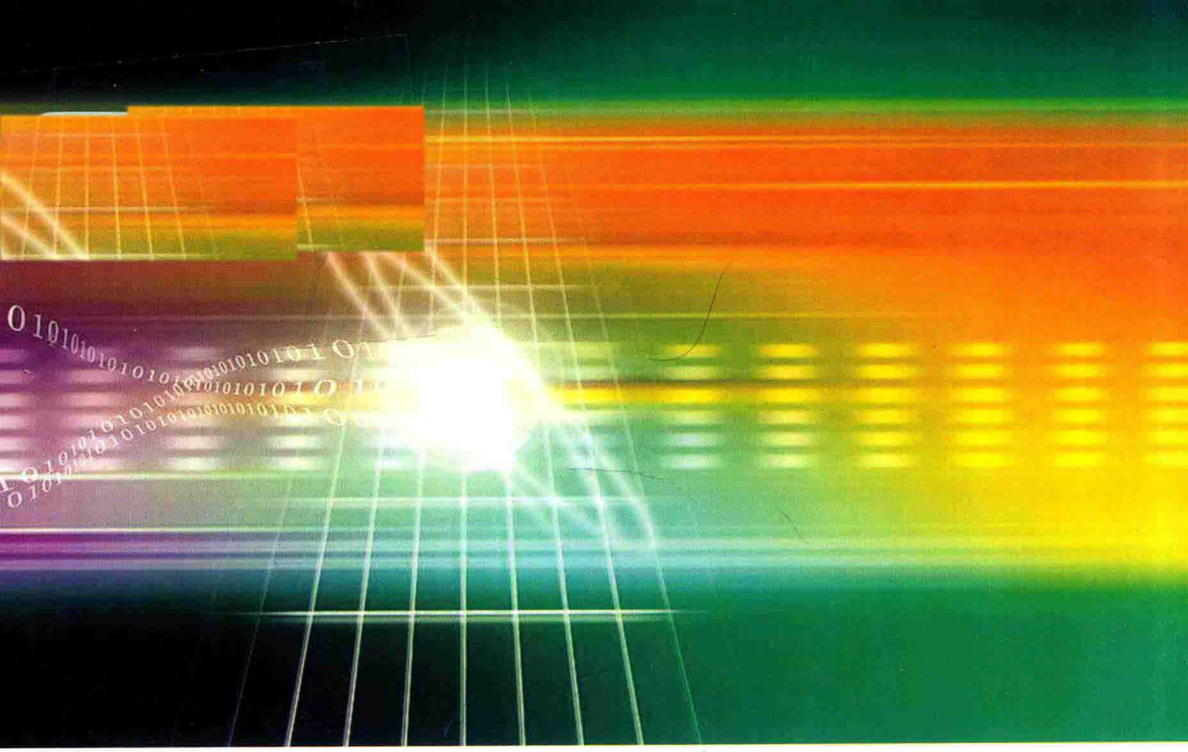


高等学校“十三五”规划教材

高等数学

（上册）

主编◎王树勋　田　壤

西北工业大学出版社

高等学校“十三五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高 等 数 学

(上 册)

主 编 王树勋 田 壤

副主编 高 云 李 哲 杨立夫

苏晓海 刘莉君

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据编者多年来从事高等数学课程教学的实践经验和教育部最新颁布的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写的.全书分为上、下两册,共11章.上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数应用,不定积分,定积分及其应用以及微分方程.下册内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分以及无穷级数等.全书每节都配有适量的习题,书末附有一些常用的数学公式、常用的曲线以及习题参考答案或提示.

本书既可作为高等学校工科类各专业的"高等数学"课程教材,也可供教师、工程技术人员以及报考工科各专业硕士研究生的考生选用或参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王树勋,田壤主编. —西安:西北工业大学出版社,2017.8
ISBN 978-7-5612-5609-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②田… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第212183号

策划编辑:蒋民昌
责任编辑:蒋民昌

出版发行:西北工业大学出版社
通讯地址:西安市友谊西路127号　　邮编:710072
电　　话:(029)88493844　　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西向阳印务有限公司
开　　本:727 mm×960 mm　　1/16
印　　张:45.125
字　　数:819千字
版　　次:2017年8月第1版　　2017年8月第1次印刷
定　　价:59.60元(上、下册)

前　言

数学是从量和形两个侧面对客观世界进行认识而产生的学科. 大体上, 从量的侧面研究问题的数学学科, 属于代数学的范畴; 从形的侧面研究问题的数学学科, 属于几何学的范畴. 17 世纪以前的数学, 主要研究的是不变的量和比较规则的形, 称之为初等数学. 1637 年法国数学家笛卡儿引入了坐标系, 从而诞生了一个全新的学科——解析几何. 解析几何使得数和形有机地联系在一起, 也使得数学进入了一个快速发展的阶段. 这一阶段, 人们开始大量地研究变化的量和不规则的几何图形, 而且数和形的联系也越来越紧密. 由于工业革命的推动, 英国科学家牛顿、德国数学家莱布尼茨, 以及那些让牛顿和莱布尼茨站在其肩上的巨人们创立了微积分. 从此, 数学飞速发展, 形成了高等代数、高等几何等许多数学学科. 相对于 17 世纪以前的初等数学, 人们把 1637 年到 19 世纪末的数学称为高等数学.

作为工具, 数学如此强大, 以至于被广泛地应用到了各个领域. 但数学绝不单纯是工具, 还是科学的语言、思维的体操, 是一种文化, 是一种素养, 能使人逻辑严谨、思维周密. 当然, 对日常生活而言, 数学总是"知趣"地隐藏在幕后, 但是对于要掌握现代科学知识的大学生而言, 数学会时刻与你相伴, 深厚的数学功底能够使你腾飞的翅膀更加强健.

根据教育部最新颁布的"工科类本科数学基础课程教学基本要求", 结合长期从事高等数学教学实践和教学体会, 在对教学内容和教学体系进行充分研讨和优化的基础上, 我们编写了本书. 本书主要有下述特点。

(1)涵盖了高等院校《工科高等数学课程教学大纲》要求的基本内容.

(2)定理和概念的叙述力求严谨精练, 同时尽可能深入浅出, 使读者易于理解和掌握.

(3)突出概念和定理的几何解释, 但不完全依赖几何解释. 注重概念的实际背景, 更强调数学概念与实际问题的结合.

(4)在符合教学大纲的基础上, 对传统内容做了适当的取舍, 淡化运算技巧, 突出基本概念、基本方法的介绍; 突出积分学中元素法的思想; 在三重积分的计算中, 采用换元法来推导柱面坐标和球面坐标形式的体积元素; 第二类曲面积分的概念和计算法采用向量形式.

(5)尽量兼顾各专业的特点, 部分章节加有"*"号, 教师可根据实际教学时数

选讲或供学生自学.

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分以及无穷级数等，每节都配有适当的习题，并附有一些常用的数学公式、常用的曲线以及习题参考答案或提示.

全书由王树勋、田壤拟订编写大纲及编写规划并担任主编. 具体编写分工如下：王树勋编写了第三章及附录并绘制了全书插图，田壤编写了第五、十章，高云编写了第二、七章，李哲编写了第六、十一章，杨立夫编写了第八章，苏晓海编写了第四、九章，刘莉君编写了第一章. 全书由王树勋、田壤负责统稿.

本书在总结多年教学经验的基础上参阅了国内外一些改革教材及笔者教改成果，在西北工业大学出版社的大力支持下编写而成. 在编写的过程中得到陕西理工大学领导和同行的大力支持. 西北工业大学叶正麟教授给本书提出了宝贵的意见. 在此对各位领导、专家及同行表示衷心的感谢.

本书虽经多年使用和修改，但由于水平有限，书中不足和考虑不周之处，诚恳地希望专家、同行和读者批评指正.

编　者

2017 年 6 月

目　　录

（上　册）

第一章　函数、极限与连续 ……………………………………………… (1)
第一节　函数……………………………………………………………… (1)
第二节　函数的简单性态 …………………………………………………… (11)
第三节、初等函数 …………………………………………………………… (16)
第四节　曲线的极坐标方程和参数方程 …………………………………… (29)
第五节　数列的极限 ………………………………………………………… (35)
第六节　函数的极限 ………………………………………………………… (49)
第七节　复合函数的极限运算法则及两个重要极限 ……………………… (60)
第八节　无穷小、无穷大…………………………………………………… (66)
第九节　函数的连续性 ……………………………………………………… (72)
第一章总习题 ……………………………………………………………… (80)
第二章　导数与微分 ……………………………………………………… (85)
第一节　导数的概念 ………………………………………………………… (85)
第二节　求导法则 …………………………………………………………… (96)
第三节　隐函数求导法、参数方程所确定的函数的导数 ………………… (105)
第四节　高阶导数与相关变化率…………………………………………… (110)
第五节　函数的微分及其在近似计算中的应用…………………………… (115)
第二章总习题……………………………………………………………… (122)
第三章　微分中值定理与导数应用……………………………………… (125)
第一节　微分中值定理……………………………………………………… (125)
第二节　洛必达法则………………………………………………………… (133)
第三节　泰勒公式…………………………………………………………… (137)
第四节　函数的单调性、极值与最值 ……………………………………… (144)
第五节　曲线的凹凸性与函数图形的描绘………………………………… (152)
第六节　弧微分与曲率……………………………………………………… (160)
*第七节　方程的近似解……………………………………………………… (166)

第三章总习题……………………………………………………………………（170）
第四章　不定积分……………………………………………………………（172）
第一节　不定积分的概念和性质………………………………………………（172）
第二节　换元积分法……………………………………………………………（179）
第三节　分部积分法……………………………………………………………（192）
第四节　有理函数的积分………………………………………………………（196）
第四章总习题……………………………………………………………………（205）
第五章　定积分及其应用……………………………………………………（207）
第一节　定积分的概念及性质…………………………………………………（207）
第二节　微积分基本定理………………………………………………………（216）
第三节　定积分的计算…………………………………………………………（222）
第四节　广义积分………………………………………………………………（230）
*第五节　广义积分敛散性的判别法、Γ 函数 ………………………………（236）
第六节　定积分在几何上的应用………………………………………………（241）
第七节　定积分在物理学上的应用举例………………………………………（253）
*第八节　定积分的近似计算……………………………………………………（260）
第五章总习题……………………………………………………………………（263）
第六章　微分方程……………………………………………………………（266）
第一节　微分方程的基本概念…………………………………………………（266）
第二节　可分离变量的微分方程………………………………………………（270）
第三节　一阶线性微分方程……………………………………………………（277）
第四节　几种特殊的高阶方程…………………………………………………（283）
第五节　高阶线性微分方程解的结构…………………………………………（288）
第六节　常系数齐次线性微分方程……………………………………………（291）
第七节　常系数非齐次线性微分方程…………………………………………（295）
*第八节　常系数线性微分方程组………………………………………………（303）
*第九节　数学建模初步…………………………………………………………（312）
第六章总习题……………………………………………………………………（319）
附录……………………………………………………………………………（323）
附录Ⅰ　一些常用数学公式……………………………………………………（323）
附录Ⅱ　几种常用的曲线………………………………………………………（326）
附录Ⅲ　积分表…………………………………………………………………（329）
附录Ⅳ　部分习题答案或提示…………………………………………………（339）

第一章　函数、极限与连续

客观世界中有许许多多的变量，它们之间不是孤立的，而是相互联系的，函数就是对现实世界中各种变量之间相互关系的一种数学抽象. 高等数学的研究对象就是函数，极限方法是研究函数的一种基本方法，是高等数学中的一个重要概念. 极限思想中的从常量到变量，从有限到无限，正是从初等数学过渡到高等数学的关键. 本章将在中学所学基本知识的基础上更进一步阐述函数的概念，然后介绍其简单性态、反函数、复合函数、初等函数、曲线的极坐标方程与参数方程，最后介绍极限的概念、性质、运算法则及函数的连续性.

第一节　函　　数

一、基本概念

1. 常量与变量

在观察自然现象或研究某些实际问题时或从事生产的过程中，总会遇到许多量，如面积、体积、长度、时间、温度、压力等. 这些量一般分为两类，常量与变量. 如果一个量在某变化过程中始终保持不变，总取一个值，则称这种量为**常量**(constant)，常量通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 如果一个量在某变化过程中是不断变化的，即在该变化过程中可以取不同的数值，则称这种量为**变量**(variable)，变量通常用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示.

常量与变量都是对某一过程而言的. 例如，重力加速度，在地球近表可看作是常量，在大范围内是变量. 但常量可看作是变量的特殊情形. 例如掷同一铅球数次，发现铅球的质量、体积为常量，而投掷距离、上抛角度、用力大小均为变量. 常量与变量是相对而言的，同一个量在不同场合下，可能是常量，也可能是变量，如在一天或在一年中观察某小孩的身高；从小范围和大范围而言，重力加速度可是常量和变量，然而，一旦环境确定了，同一个量不能既为常量又为变量，二者必居其一.

2. 区间

区间(interval)是高等数学中常用的实数集. 关于区间有以下几种：

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**(open interval)，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

其中，a 和 b 称为开区间的端点(endpoint)，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**(closed interval)，记作 $[a,b]$，类似地，有半开区间

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$$

以上这些区间均称为**有限区间**(finite interval)，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 另外，还有所谓的**无限区间**(infinite interval). 引入记号 $+\infty$(读作：正无穷大)及 $-\infty$(读作：负无穷大)，并定义：

大于 a 的实数的全体，记为

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$$

大于或等于 a 的实数的全体，记为

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$$

小于 b 的实数的全体，记为

$$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$$

小于或等于 b 的实数的全体，记为

$$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}$$

全体实数 $\mathbf{R}$，记为

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

因为实数和数轴上的点是一一对应的，以后将点“x”和实数“x”作同义语，所以区间也可以在数轴上表示，而区间长度的几何直观即为两端点间的距离. 区间在数轴上可用图 1-1 表示.

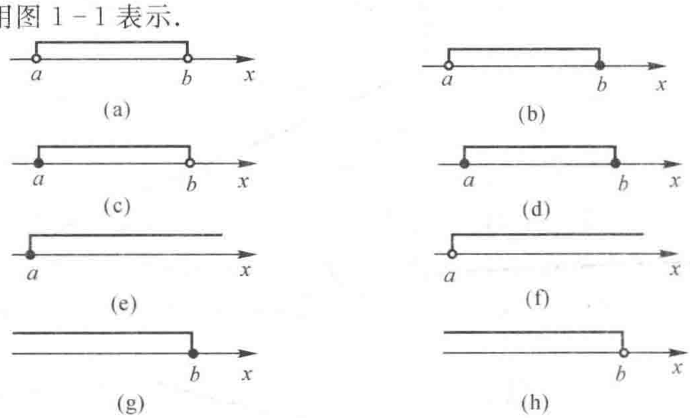


图 1-1

以后在不需要明辨区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，简称它为“区间”，常用 I 表示.

现在介绍一个较为特殊且常用的区间——邻域.

3. 邻域

称实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ **邻域**(neighbourhood)，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

点 a 称为**邻域的中心**(centre of a neighborhood)，δ 称为**邻域的半径**(radius of a neighborhood)(见图 1−2(a)).

有时用到的邻域要把中心去掉. 在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后，称为点 a 的**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

图 1-2

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$，亦即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

为了方便，称开区间 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的左 δ 邻域，称开区间 $(a,a+\delta)$ 为点 a 的右 δ 邻域. 如图 1−2(b)所示. 今后在不关心邻域的半径时，点 a 的邻域可简记作 $U(a)$.

4. 逻辑符号

(1)量词 $\forall$. “$\forall$”表示“对于任意的”“任取”“对任意一个”或“对每一个”，它是英文 Any 的第一个字母的倒写. 例如“$\forall a>0$”表示“对于任意的正数 a”，或“任取正数 a”.

(2)量词 $\exists$. “$\exists$”表示“存在”“有一个”或“能够找到”. 它是英文 Exist 的第一个字母的反写. 例如“$\forall M>0,\exists x\in[a,+\infty)$，使得 $x>M$”的含义是“对于任意的正数 M，在区间 $[a,+\infty)$ 中存在 x，使得 $x>M$”.

二、映射的概念

定义 1　设 X,Y 是两个非空集合，若对集合 X 中的每一个元素 x，按照某种法则，均有集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应是集合 X 到集合

Y 的一个**映射**(mapping),记为 f,写为

$$f: X \to Y$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

其中 y 称为在映射 f 下 x 的**像**,x 称为在映射 f 下的一个**原像**(也称为**逆像**).集合 X 称为映射 f 的**定义域**(domain),记为 $D(f)=X$.而在映射 f 下,X 中元素 x 的像 y 的全体称为映射 f 的**值域**(range),记为 $W(f)$

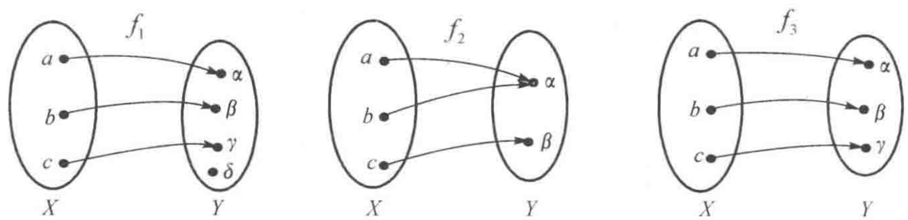
$$W(f)=\{y \mid y \in Y \text{ 且 } y=f(x), x \in X\}$$

这里的映射 f 通常也称为对应法则 f.

例 1 设 X 是平面上所有圆的全体,$Y=[0,+\infty)$,每一个圆都有唯一的面积值与之对应,定义对应法则为

$$f: X \to Y$$
$$x \longmapsto y(y \text{ 是圆 } x \text{ 的面积值})$$

则 f 显然是一个映射,其定义域与值域分别为 $D(f)=X$ 和 $W(f)=Y$.



(a) (b) (c)

图 1-3 单射、满射与双射

(a)单射; (b)满射; (c)双射

图 1-3 所示为 f_1, f_2, f_3 3 个映射.f_1 的特点是自变量不同的值对应不同的函数值,这种映射称为单射.f_2 的特点是值域 $W(f_2)=Y$,称这种映射为满射.而 f_3 的特点是 $D(f_3)=X$,$W(f_3)=Y$,且自变量不同的值对应不同的函数值,这种映射既满足 f_1 的特点,也满足 f_2 的特点,称这种映射为双射.在一般情形下,单射、满射及双射的定义如下:

定义 2 设映射 $f: X \to Y$

(1) 对 $\forall x_1, x_2 \in D(f)$,若 $x_1 \neq x_2$ 则一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为**单射**;

(2) 若值域 $W(f)=Y$,则称 f 为**满射**;

(3) 若 $D(f)=X$,且 f 既是单射又是满射,则称 f 为**双射**(一一映射).

例 2 映射 $y=e^x: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,是单射但不是满射.映射 $y=x^3: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,既是单射也是满射,所以是双射.映射 $y=\sin x: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,既不是单射也不是满射,但是映射

$y=\sin x:\mathbf{R}\to[-1,1]$，是满射但不是单射，而映射 $y=\sin x:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$，是双射.

定义 3　设映射 $f: X\to Y$ 是单射，则对任一 $y\in W(f)\subset Y$，有唯一确定的 $x\in X$ 与之对应. 此时视 $y\in W(f)$ 为原像，$x\in X$ 为 y 的像，则确定了一个由 $W(f)$ 到 X 的一个映射，称为映射 $f: X\to Y$ 的**逆映射**(inverse mapping)，记为

$$f^{-1}: W(f)\to X$$

其定义域为 $D(f^{-1})=W(f)$，$W(f^{-1})=X$. 显然，只要逆映射 f^{-1} 存在，它就一定是由 $W(f)$ 到 X 上的双射.

例 3　如图 1-4 所示，定义了 X 到 Y 的一个单射 f. 根据逆映射定义，有

$$f^{-1}(\text{乙})=a,\ f^{-1}(\text{丙})=b,\ f^{-1}(\text{丁})=c$$

f^{-1} 的定义域为 $D(f^{-1})=\{\text{乙},\text{丙},\text{丁}\}=W(f)$，$f^{-1}$ 的值域为 $W(f^{-1})=\{a,b,c\}=D(f)$.

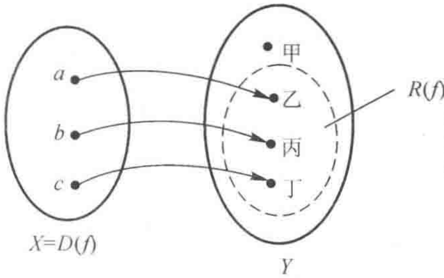


图　1-4

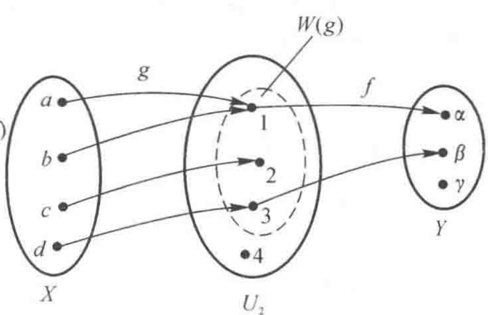


图　1-5

定义 4　设有两个映射

$$g: X\to U_1$$
$$x\longmapsto u=g(x)$$

和

$$f: U_2\to Y$$
$$u\longmapsto y=f(u)$$

如果 $W(g)\subset U_2=D(f)$，那么就可以构造出一个新的映射：

$$f\circ g: X\to Y$$
$$x\longmapsto f[g(x)]$$

称这种映射为 g 和 f 的**复合映射**(composite mapping)(见图 1-5).

由定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 $W(g)$ 必须包含在 f 的定义域 $D(f)$ 内，即 $W(g)\subset D(f)$. 否则，不能构成复合映射.

例4 设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对于每一个 $x\in\mathbf{R}, g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对于每一个 $u\in[-1,1], f(u)=\sqrt{1-u^2}$，则映射 g 和 f 构成的复合映射为

$$f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$$

$$x\longmapsto f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$$

三、函数的概念

在生活中，同一自然现象和技术过程中所碰到的各种变量，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，现在来考察两个具体例子.

例 5 在自由落体运动中，不计空气阻力，则有运动规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

这里 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度，这个公式指出了物体自由降落过程中，距离 s 和时间 t 的依赖关系. 设 $t=0(\mathrm{s})$ 开始，经过 $T(\mathrm{s})$ 着地，则变量 t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant T$，当 t 在这个范围内每取一个值时，都可以从依赖关系确定 s 的一个唯一确定的对应值. 例如：当 $t=1\mathrm{s}$ 时，$s=\frac{1}{2}g\times1^2=4.9(\mathrm{m})$.

例 6 圆的周长计算公式为

$$l=2\pi r$$

其中，r 为圆的半径，l 为圆的周长，即这个关系给出了圆的周长 l 与圆的半径 r 的依赖关系. 圆的半径 r 在 $[0,+\infty)$ 内取值，当 r 在这个范围内每取一个值时，都可以从依赖关系确定 l 的一个唯一确定的对应值. 例如：当 $r=1(\mathrm{m})$ 时，$l=2\pi\times1=6.28(\mathrm{m})$.

由以上各例可以看到，虽然它们所描述的问题中考虑的量实际意义不同，但它们都表达了两个量之间存在着依赖关系. 这种依赖关系给出了一种确定的对应法则，依着这个法则，当一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量就按对应法则有一个确定值与之对应. 从映射的定义可以看出，以上两个问题都可以看作是一个实数集到另一个实数集的映射，这种映射就是函数. 下面给出函数的定义.

定义 5 设 X 和 Y 为两个非空实数集，f 为 X 到 Y 的一个映射，则称 $f:X\to Y$ 为定义在实数集 X 上的**函数**(function)，记为

$$f:x\longmapsto y, x\in X$$

或

$$y=f(x), x\in X$$

其中，x 称为**自变量**(argument)，y 称为**因变量**(dependent variable)，X 称为函数 f 的**定义域**(domain)，记为 $D(f)$，当 x 取遍定义域中的每一值时，所对应的 $y=f(x)$ 的集合 $W(f)=\{y \mid y=f(x),x\in D(f)\}\subset Y$，称为函数的**值域**(range).

在函数的定义中需要注意以下几点.

(1) 构成函数需要两个要素，即定义域 $D(f)$ 和对应法则 f，可以看出值域是随着定义域和对应法则的确定而确定. 因此，两个函数只要定义域和对应法则相同就认为是同一函数或称两函数相等.

例如，$f(x)\equiv 1,x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,x\in(-\infty,+\infty)$ 表面形式不同，实际上是相等的；而 $f(x)\equiv 1,x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\dfrac{x}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是两个不同的函数，因为两个函数的定义域不同.

(2) 在映射的定义中，任一 $x\in X$，要求有"唯一确定"的 y 与 x 对应，故由此定义的函数称为单值函数；而如果允许有"多个确定"的 y 与 x 对应，就可以称为多值函数. 事实上，多值函数可以分成若干单值分支来研究，在本书范围内，只讨论单值函数.

(3) 为了加深对函数概念的理解，对函数的两个基本要素做一些简要的说明：

1)定义域 $D(f)$：函数的定义域就是自变量所能取得的那些数构成的集合. 在实际问题中，可以根据实际问题的具体意义来确定，如例 5 自由落体的运动规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定了 s 与 t 的一个函数关系，其中 t 表示的变化范围是从物体开始下落的时刻(设 $t=0$)到物体到达地面的时刻(设 $t=T$)，故该函数的定义域 $D(f)=[0,T]$；在理论研究中，如果函数是由数学式子给出，又无须考虑它的实际意义，则往往取使得函数的表达式有意义的自变量的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域，这种定义域通常称为**自然定义域**(natural domain). 例如，如果不考虑实际意义，那么例 5 中函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，又如函数 $y=\sqrt{1-|x|}+\lg(2x-1)$ 的定义域是由使右端两项都有意义的那些 x 所构成的数集，故 $D(f)=[-1,1]\cap\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)=\left(\dfrac{1}{2},1\right]$. 若函数的定义域构成区间，则函数的定义域常称为定义区间.

2)对应法则 f：对应法则是 y 与 x 之间函数关系的具体表现，它的表示法很多，常用的有三种：列表法、图示法和公式法(也称解析法).

所谓列表法就是将自变量与因变量的对应数据列成表格，它们之间的函数关

系从表格上一目了然.例如三角函数表、对数函数表等.很多生产部门常采用图示法来表示函数关系.例如,气象站用仪表记录下的气温曲线来表示气温随时间的变化关系;工厂中用温度-压力曲线来表示温度与压力之间的函数关系等.

理论研究中常用公式法,即用具体数学表达式表示函数关系的方法.这种方法读者在中学已接触很多,这里不再赘述.

平面点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形(也称为曲线 $y=f(x)$)(见图 1-6).

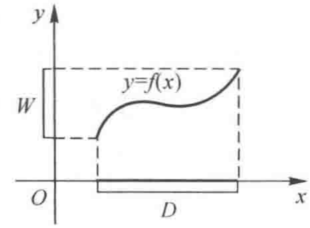


图 1-6

例 7 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义,必须使

$$16-x^2\geqslant 0 \text{ 且} \sqrt{16-x^2}\neq 0$$

成立,即 $16-x^2>0$,解得 $-4<x<4$,故函数的定义域为 $(-4,4)$.

例 8 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义,必须使

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1\\ x-2>0\end{cases}$$

成立,即

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3\\ x>2\end{cases}$$

解此不等式组,得 $2<x\leqslant 3$,故函数的定义域为 $(2,3]$.

例 9 比较函数 $f(x)=2\lg x$,$g(x)=\lg x^2$ 是否相同,并说明原因.

解 函数 $f(x)=2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,故函数 $f(x)=2\lg x$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数关系. $g(x)=\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,故函数 $g(x)=\lg x^2$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数关系.因为定义域不同,所以两个函数是不同的.

例 10 比较函数 $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同,并说明原因.

解 函数 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但是函数 $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,当 $x\geqslant 0$ 时,函数 $f(x)=g(x)=x$,而当 $x<0$ 时,函数 $f(x)=x$,$g(x)=-x$,故两个函数的对应法则不同,因此这两个函数是不同的函

数.

在函数的定义中,并不要求在整个定义域上只能用一个表达式表示对应法则,在很多问题中常常会遇到这种情况,就是在定义域的不同部分上用不同的表达式来表示对应法则,这种函数称为**分段函数**(piecewise function). 现在举一些分段函数的例子.

例 11 在电子技术中经常遇到三角波,它的波形的表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 2-t, & 1<t\leqslant 2 \end{cases}$$

它是一个分段函数,不能认为是两个函数(见图 1-7).

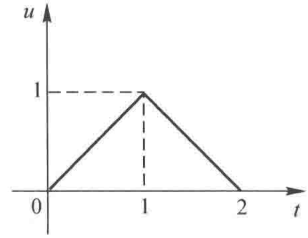


图 1-7

例 12 **符号函数**(sign function)(见图 1-8):

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

例 13 **取整函数** (greatest integer function) :$y=[x]$ ($x\in\mathbf{R}$), 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (见图 1-9).

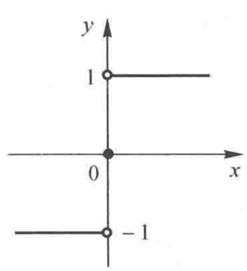


图 1-8

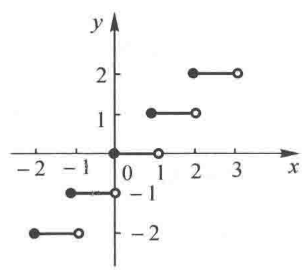


图 1-9

例 14 **狄利克雷函数**(Dirichlet function):

$$y=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

该函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $W=\{0,1\}$,但它没有直观的图形表示.

例 15 旅客携带行李乘火车旅行时,行李质量不超过 20 kg 时不收费,若超过 20 kg,每超过 1 kg 收运费 k 元. 试建立运费 y 与行李质量 x 的函数关系式.

解 因为,当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,运费 $y=0$; 而当 $x>20$ 时,此时只有超过部分

$x-20$ 按每千克收取运费 k 元，即

$$y=k(x-20)$$

所以运费 y 与行李质量 x 的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ k(x-20), & x>20\end{cases}$$

例 16 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

(1) 作出函数的图形；

(2) 写出函数的定义域，并求出 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

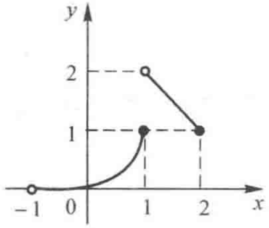


图 1-10

解 (1) 该分段函数的图形如图 1-10 所示.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,2]$.

当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2$；当 $x\in(1,2]$ 时，$f(x)=3-x$. 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arccos\dfrac{x+1}{2}$；　(2) $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$；　(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$；　(6) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

(7) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　(8) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(9) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$；　(10) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\arcsin x+\sqrt{x}$.

2. 下列各题中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数？为什么？