



工业和信息化“十三五”规划教材

高等数学

习题全解与学习指导

下册

张弢 殷俊锋 © 编

传承经典，演绎数学之美
配录微课，共享精品资源
紧扣大纲，符合考研需求



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

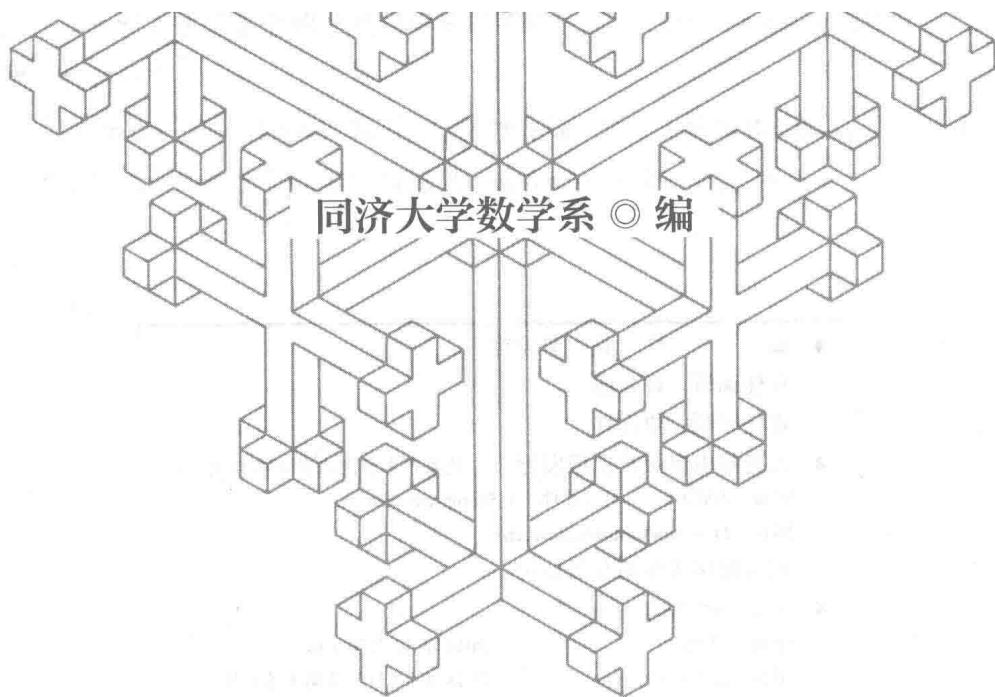


工业和信息化部“十三

高等数学

习题全解与学习指导

下册



同济大学数学系 © 编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解与学习指导. 下册 / 张弢, 殷俊峰编. — 北京: 人民邮电出版社, 2018. 12
ISBN 978-7-115-48637-0

I. ①高… II. ①张… ②殷… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第123919号

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学(下册)》(ISBN 978-7-115-42640-6, 人民邮电出版社出版)配套的学习指导书. 本书是按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求, 充分吸取当前优秀高等数学教材辅导书的精华, 并结合数年来的教学实践经验, 针对当今学生的知识结构和习惯特点编写的. 全套书分为《高等数学(上册)》《高等数学(下册)》及对应的学习指导书. 本书为下册的指导书, 一共有四章, 主要内容包括向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数. 每章包含知识结构、归纳总结、例题解析与习题详解四个部分.

本书具有相对的独立性, 可供高等院校理工类和其他非数学专业的学生提供解题指导, 也可供准备报考硕士研究生的人员复习高等数学时参考使用. 例题解析和习题详解还可供讲授高等数学的老师在习题课时选用.

-
- ◆ 编 张 弢 殷俊峰
责任编辑 许金霞
责任印制 焦志炜
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
固安县铭成印刷有限公司印刷
 - ◆ 开本: 787×1092 1/16
印张: 13.25 2018 年 12 月第 1 版
字数: 315 千字 2018 年 12 月河北第 1 次印刷
-

定价: 38.00 元

读者服务热线: (010)81055256 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字 20170147 号

前 言

本书是同济大学数学系编写的《高等数学(下册)》(ISBN 978-7-115-42640-6, 人民邮电出版社出版)的配套用书,是按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求,以指导学生理解基本概念和掌握基本解题方法为目的而编写的.本书主要是为学习高等数学的读者提供解题指导的参考书,也可以作为复习高等数学准备报考硕士研究生的人员的辅助用书,还可供讲授高等数学的教师的高等数学学习题课和批改作业时参考.

全套书分为《高等数学(上册)》《高等数学(下册)》以及对应的配套学习指导书,内容按照《高等数学》的章节顺序设计,本书为上册的配套辅导书,共有四章,主要内容包括函数、极限与连续,一元函数微分学及其应用,一元函数积分学及其应用,微分方程.下册共有四章,主要内容包括空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数.本书每章包含知识结构、归纳总结、例题解析与习题详解四个部分.第一部分通过结构图来帮助读者熟悉每章的基本内容、概念关系,使读者明确要求,抓住重点;第二部分总结了本章概念和基本计算中具有一般意义的解题方法;第三部分给出了经典例题及其分析精准的解题过程,使读者能够了解概念中的难点和容易误解的疑点;第四部分是《高等数学(上册)》的习题全解,包括各章的习题和章节测试.

本书由同济大学张弢、殷俊锋编写,由张弢统稿.本书在编写和统稿过程中得到了同仁和学生的大量帮助,并提出了许多宝贵意见,谨在此表示衷心的感谢.

编 者

2018年10月

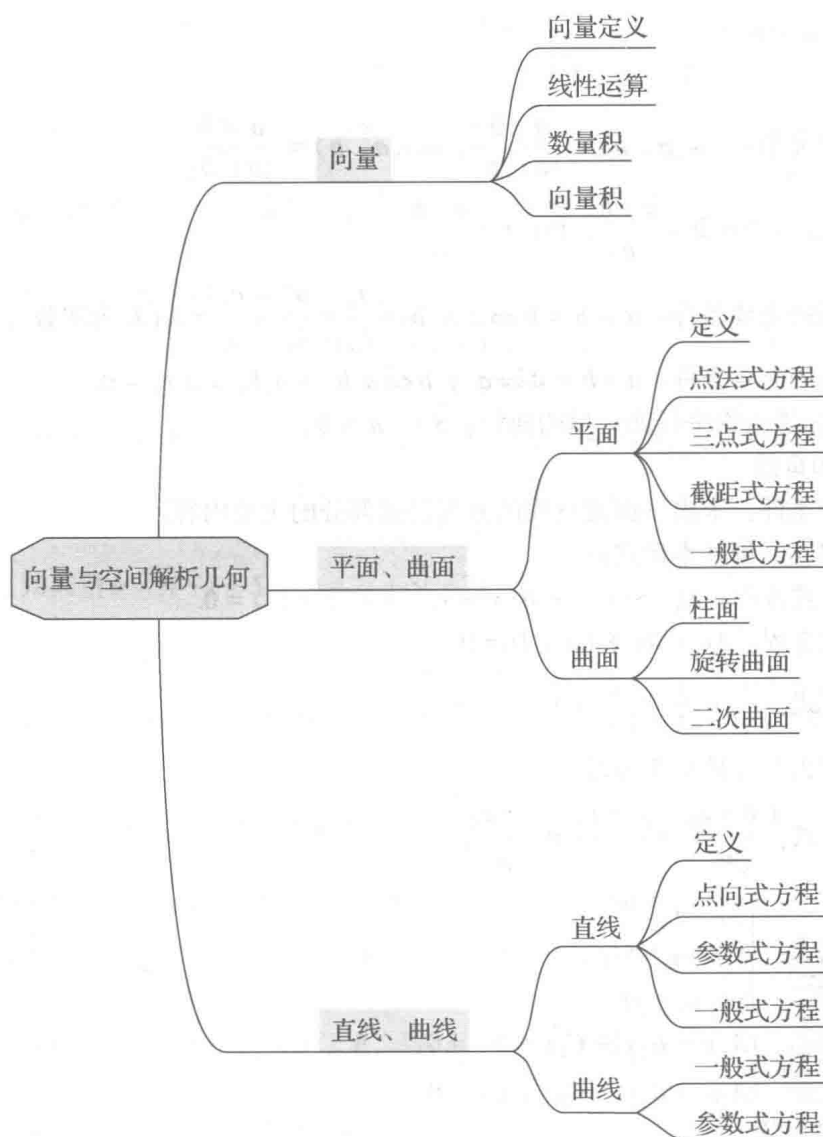
目 录

第五章 向量与空间解析几何	1
一、知识结构	1
二、归纳总结	1
三、例题解析	3
四、习题详解	5
习题 5-1 向量及其运算	5
习题 5-2 平面及其方程	13
习题 5-3 直线及其方程	18
习题 5-4 曲面与曲线	26
章节测试五	32
第六章 多元函数微分学	37
一、知识结构	37
二、归纳总结	37
三、例题解析	39
四、习题详解	45
习题 6-1 多元函数的概念、极限与连续	45
习题 6-2 多元函数的偏导数与全微分	48
习题 6-3 复合求导、隐函数求导及方向导数	57
习题 6-4 多元函数微分的应用	71
章节测试六	84
第七章 多元函数积分学	88
一、知识结构	88
二、归纳总结	88

三、例题解析	92
四、习题详解	98
习题 7-1 二重积分的概念、计算和应用	98
习题 7-2 三重积分的概念、计算和应用	111
习题 7-3 对弧长的曲线积分与对面积的曲面积分	116
习题 7-4 对坐标的曲线积分与对坐标的曲面积分	126
习题 7-5 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式	137
章节测试七	153
第八章 无穷级数	157
一、知识结构	157
二、归纳总结	157
三、例题解析	159
四、习题详解	166
习题 8-1 常数项级数的概念与性质	166
习题 8-2 常数项级数的审敛准则	171
习题 8-3 幂级数的收敛及应用	182
习题 8-4 傅里叶级数	193
章节测试八	201

第五章 向量与空间解析几何

一、知识结构



二、归纳总结

1. 向量的运算

向量的运算，重点是用向量的坐标进行运算。要做到运算正确、熟练，首先应熟记一些常用的公式。

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

向量的模: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

方向余弦: $\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$.

线性运算: $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$, $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

数量积: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

向量积: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

两向量的夹角: $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$, $\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$.

向量的投影: $\text{Prj}_a \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$, $\text{Prj}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

向量平行的充要条件: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$ (λ 为实数).

向量垂直的充要条件: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

以 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 为邻边的平行四边形的面积: $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

2. 平面和直线

根据几何条件, 求出平面或直线的方程是这部分的主要内容.

平面方程有三种基本形式:

(1) 点法式方程: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

(2) 一般方程: $Ax + By + Cz + D = 0$.

(3) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

直线方程也有三种基本形式:

(1) 点向式: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

(2) 参数式: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$

(3) 一般式: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

3. 曲面与曲线

旋转曲面: yOz 面上曲线 $L: f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, 绕 y 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

柱面: 准线是 xOy 面上的曲线 C , 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x, y) = 0$.

二次曲面:

(1) 椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$).

(2) 锥面: $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2 (a, b > 0)$, 特别地, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(3) 抛物面: $z = a^2x^2 + b^2y^2 (a, b > 0)$, 特别地, $z = x^2 + y^2$.

曲线方程:

$$(1) \text{ 一般式: } \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 参数式: } \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t). \end{cases}$$

三、例题解析

例 1 (考研真题: 2006 年数学一) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d =$ _____.

解 本题直接利用点到平面距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

进行计算即可. 其中 (x_0, y_0, z_0) 为点的坐标, $Ax + By + Cz + D = 0$ 为平面方程.

$$d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

例 2 已知向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, 试求一向量 \mathbf{x} , 使它与 z 轴垂直且满足 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 5$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = -4$.

解 设向量 $\mathbf{x} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} 3x - y + 5z = 5, \\ 2x + 3y - 7z = -4, \\ z = 0, \end{cases}$ 得 $\mathbf{x} = (1, -2, 0)$.

例 3 已知 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 是两个模都为 2 的向量, 且它们的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 若 $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2 = (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, \dots , $\mathbf{c}_{n+1} = (\mathbf{c}_n \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, 求 $|\mathbf{c}_n|$.

解 由向量积定义可知 $|\mathbf{c}_1| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$, 由 $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} , \mathbf{b} 共面, 且 $\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 故 $(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$, $|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a}| = |\mathbf{c}_1| |\mathbf{a}| \sin \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$; 同理,

$$|\mathbf{c}_2| = |\mathbf{c}_1 \times \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \frac{\pi}{6} = 2^2\sqrt{3}, (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{6}, |\mathbf{c}_2 \times \mathbf{a}| = |\mathbf{c}_2| |\mathbf{a}| \sin \frac{\pi}{6} = 2^3\sqrt{3};$$

$$|\mathbf{c}_3| = |\mathbf{c}_2 \times \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \frac{\pi}{6} = 2^3\sqrt{3}; \text{ 依次类推,}$$

$$|\mathbf{c}_n| = |\mathbf{c}_{n-1} \times \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \frac{\pi}{6} = 2^n\sqrt{3}.$$



例题解析

例 4 求通过三平面 $2x + y - z = 2$, $x - 3y + z + 1 = 0$ 和 $x + y + z - 3 = 0$ 的交点, 且平行于平面 $x + y + 2z = 0$ 的平面方程.

解 所求平面平行于 $x + y + 2z = 0$, 所以该平面的法向量为 $(1, 1, 2)$.

$$\text{三平面的交点为 } \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0, \\ x - 3y + z + 1 = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } x = 1, y = 1, z = 1.$$

所以所求平面为 $(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$, 即 $x + y + 2z - 4 = 0$.

例 5 求直线 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线

方程.

解 过已知直线作垂直于平面 $x + y + z = 0$ 的平面, 称为投影平面, 投影平面与已知平面的交线即为投影直线.

由平面束方程知, 过直线 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$ 的平面方程可设为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(y - x - z - 1) = 0,$$

即 $(1 - \lambda)x + (1 + \lambda)y - (1 + \lambda)z - (1 + \lambda) = 0$.

上述平面与平面 $x + y + z = 0$ 垂直, 所以

$$(1 - \lambda) \cdot 1 + (1 + \lambda) \cdot 1 - (1 + \lambda) \cdot 1 = 0,$$

得到 $\lambda = 1$. 于是投影平面为

$$2y - 2z - 2 = 0,$$

即 $y - z - 1 = 0$.

所求投影直线方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

例 6 求直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程.

解 l 的方程可写成 $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$ 所以过 l 的方程可写成

$$(x - y - 1) + \lambda(y + z - 1) = 0,$$

即 $x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (1 + \lambda) = 0$.

因它与已知平面垂直, 即 $1 - (\lambda - 1) + 2\lambda = 0$, 解得

$$\lambda = -2,$$

所以过 l 与已知平面垂直的平面方程为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$, 故 l_0 的方程为

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = 2y, \\ z = -\frac{1}{2}(y - 1). \end{cases}$$



例题解析



例题解析



例题解析

于是 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面方程为

$$x^2 + z^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2,$$

即

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0.$$

四、习题详解

习题 5-1 向量及其运算

1. 填空题.

(1) 已知点 $A(2, -1, 1)$, 则点 A 与 z 轴的距离是 _____, 与 y 轴的距离是 _____, 与 x 轴的距离是 _____.

(2) 向量 $\mathbf{a} = (-2, 6, -3)$ 的模为 $|\mathbf{a}| =$ _____, 方向余弦为 $\cos\alpha =$ _____, $\cos\beta =$ _____, $\cos\gamma =$ _____, 其同方向的单位向量 $\mathbf{e}_a =$ _____.

(3) 设 α, β, γ 是向量 \mathbf{a} 的三个方向角, 则 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$ _____.

(4) 设向量 $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$ 与向量 $\mathbf{b} = (1, k, 2)$ 平行, 则 $k =$ _____.

(5) 已知三点 $M_1(1, -2, 3), M_2(1, 1, 4), M_3(2, 0, 2)$, 则 $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} =$ _____, $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} =$ _____.

(6) 设点 $A(2, -1, -2), B(0, 2, 1), C(2, 3, 0)$, 以 AB, AC 为邻边, 作平行四边形, 此平行四边形的面积等于 _____.

(7) 向量 $\mathbf{a} = (4, -3, 1)$ 在 $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$ 上的投影 $\text{Prj}_b \mathbf{a} =$ _____, \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影 $\text{Prj}_a \mathbf{b} =$ _____.

(8) 设 $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (-2, k, 4)$, 而 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $k =$ _____.

解 (1) A 与 z 轴的距离 $d_z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$;

$$\text{与 } y \text{ 轴的距离 } d_y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$$

$$\text{与 } x \text{ 轴的距离 } d_x = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

(2) $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$;

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{6}{7};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7};$$

$$\mathbf{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7}\right).$$

(3) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = (1 - \cos^2\alpha) + (1 - \cos^2\beta) + (1 - \cos^2\gamma)$
 $= 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 3 - 1 = 2.$

(4) 因为两向量平行, 故对应坐标成比例, 即

$$\frac{2}{1} = \frac{-1}{k} = \frac{4}{2},$$

从而 $k = -\frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \overrightarrow{M_1M_2} &= (1, 1, 4) - (1, -2, 3) = (0, 3, 1), \\
 \overrightarrow{M_1M_3} &= (2, 0, 2) - (1, -2, 3) = (1, 2, -1). \\
 \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} &= (0, 3, 1) \cdot (1, 2, -1) = 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 5; \\
 \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} &= (0, 3, 1) \times (1, 2, -1) = (-5, 1, -3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \overrightarrow{AB} &= (0 - 2, 2 - (-1), 1 - (-2)) = (-2, 3, 3); \\
 \overrightarrow{AC} &= (2 - 2, 3 - (-1), 0 - (-2)) = (0, 4, 2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\square} &= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-2, 3, 3) \times (0, 4, 2)| \\
 &= |(-6, 4, -8)| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}.
 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \text{Prj}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{7}{3};$$

$$\text{Prj}_a \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{26}}.$$

(8) 因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 所以 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的数量积为零, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 3) \cdot (-2, k, 4) = -2 + 2k + 12 = 0,$$

从而 $k = -5$.

2. 一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等, 而与 z 轴的夹角是与 x 轴、 y 轴夹角的两倍, 求向量的方向角.

解 已知 $\alpha = \beta$, $\gamma = 2\alpha$, 故由 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2(2\alpha) = 1$ 得

$$2\cos^2 \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) = 0,$$

解得 $\cos \alpha = 0$ 及 $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 于是

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \pi \text{ 或 } \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

3. 给定 $M(-2, 0, 1)$, $N(2, 3, 0)$ 两点, 在 x 轴上有一点 A , 满足 $|AM| = |AN|$, 求点 A 的坐标.

解 因为点 A 在 x 轴上, 可设所求点为 $A(x, 0, 0)$, 依题设 $|AM| = |AN|$, 即

$$\sqrt{(x+2)^2 + 1} = \sqrt{(x-2)^2 + 3^2},$$

所以 $x = 1$, 从而所求点为 $A(1, 0, 0)$.

4. 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\mathbf{a} = (8, 9, -12)$ 方向取长为 34 的线段 AB , 求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标为 (x, y, z) , $\overrightarrow{AB} = (x-2, y+1, z-7)$, 又 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{a}$, 故设 $\overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{a}$, 即 $x-2 = 8\lambda$, $y+1 = 9\lambda$, $z-7 = -12\lambda$,

$$34 = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(8\lambda)^2 + (9\lambda)^2 + (-12\lambda)^2},$$

解得 $\lambda = 2$, 从而点 B 的坐标为 $(18, 17, -17)$.

5. 设点 P 在 y 轴上, 它到点 $P_1(\sqrt{2}, 0, 3)$ 的距离为到点 $P_2(1, 0, -1)$ 的距离的两倍, 求点 P 的坐标.

解 因为点 P 在 y 轴上, 设点 P 的坐标为 $(0, y, 0)$,

$$|PP_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + y^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11}, \quad |PP_2| = \sqrt{1^2 + y^2 + (-1)^2} = \sqrt{y^2 + 2},$$

因为 $|PP_1| = 2|PP_2|$, 即

$$\sqrt{y^2 + 11} = 2\sqrt{y^2 + 2},$$

解得 $y = \pm 1$, 所求点为 $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$.

6. 设点 A 位于第 I 卦限, 向径 \vec{OA} 与 x 轴、 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\vec{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标.

解 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. 由关系式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\text{得} \quad \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

因为点 A 在第 I 卦限, 知 $\cos\gamma > 0$, 故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$.

于是 $\vec{OA} = |\vec{OA}|e_{OA} = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$, 点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

7. 证明: $\text{Prj}_u(\lambda a) = \lambda \text{Prj}_u a$.

证明 记 $(a, \hat{u}) = \varphi$, $(\lambda a, \hat{u}) = \varphi_1$,

当 $\lambda > 0$ 时, $\varphi_1 = \varphi$, $\text{Prj}_u(\lambda a) = |\lambda a| \cos\varphi_1 = \lambda |a| \cos\varphi = \lambda \text{Prj}_u a$;

当 $\lambda < 0$ 时, $\varphi_1 = \pi - \varphi$,

$$\text{Prj}_u(\lambda a) = |\lambda a| \cos\varphi_1 = -\lambda |a| \cos(\pi - \varphi) = \lambda |a| \cos\varphi = \lambda \text{Prj}_u a.$$

当 $\lambda = 0$ 时, 显然成立.

因此 $\text{Prj}_u(\lambda a) = \lambda \text{Prj}_u a$.

8. 记 e_a 为非零向量 a 的同向单位向量, 证明: $e_a = \frac{a}{|a|}$.

证明 由于 e_a 、 a 同向, 故 $a = \lambda e_a$ ($\lambda > 0$), 且 $|e_a| = 1$, 因此 $|a| = \lambda |e_a| = \lambda$, 即 $a = |a| e_a$, 注意到 $|a| \neq 0$, 故结论成立.

9. 求平行于向量 $a = 6i + 7j - 6k$ 的单位向量.

解 所求向量有两个, 一个与 a 同向, 一个与 a 反向.

由于 $|a| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11$,

$$\text{从而 } e_a = \frac{a}{|a|} = \frac{6}{11}i + \frac{7}{11}j - \frac{6}{11}k \text{ 或 } -e_a = -\frac{a}{|a|} = -\frac{6}{11}i - \frac{7}{11}j + \frac{6}{11}k.$$

10. 设向量 a 与各坐标轴成相等的锐角, $|a| = 2\sqrt{3}$, 求向量 a 的坐标表达式.

解 因为向量 a 与各坐标轴成相等的锐角, 所以 a 的三个方向角 $\alpha = \beta = \gamma$, 又因为

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

因此 $3\cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

因为和 a 同方向的单位向量 $e = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 从而

$$a = |a|e = 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (2, 2, 2).$$

11. 已知 $\mathbf{a} = (1, 1, -4)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 2)$, 求:

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (2) \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角 θ ; (3) \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影.

解 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = -9$.

(2) $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

(3) 因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$, 所以 $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -3$.

12. 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

13. 设 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{3}$, 求:

(1) $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$; (2) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) &= 6|\mathbf{a}|^2 - 15\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - 10|\mathbf{b}|^2 \\ &= 6|\mathbf{a}|^2 - 11\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 10|\mathbf{b}|^2 \\ &= 6|\mathbf{a}|^2 - 11|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) - 10|\mathbf{b}|^2 \\ &= 6 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 2^2 = -19. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7. \end{aligned}$$

14. 已知点 $A(1, -3, 4)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(-3, -1, 1)$, 求:

(1) $\angle BAC$; (2) \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{AC} 上的投影.

解 (1) $\overrightarrow{AB} = (-2-1, 1-(-3), -1-4) = (-3, 4, -5)$,

$$\overrightarrow{AC} = (-3-1, -1-(-3), 1-4) = (-4, 2, -3),$$

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-3, 4, -5) \cdot (-4, 2, -3)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-5)^2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{58}}, \end{aligned}$$

$$\angle BAC = \arccos \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

$$(2) \text{Prj}_{AC} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{35}{\sqrt{29}}.$$

15. 已知 $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$, 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 及 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

$$\text{解 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 3, 1) \times (1, -2, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -1, -7);$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (1, -2, 1) \times (2, 3, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, 1, 7).$$

16. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -2, 0)$, 求:

(1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$; (2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$; (3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$; (4) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$.

$$\text{解 } (1) \mathbf{a} + \mathbf{b} = (2+1, -3+(-1), 1+3) = (3, -4, 4),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (1+1, -1+(-2), 3+0) = (2, -3, 3),$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (3, -4, 4) \times (2, -3, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -1, -1).$$

$$(2) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, -3, 1) \times (1, -1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-8, -5, 1),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-8, -5, 1) \cdot (1, -2, 0) = -8 + (-5)(-2) + 0 = 2.$$

$$(3) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (-8, -5, 1) \times (1, -2, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 1, 21).$$

$$(4) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, -3, 1) \cdot (1, -1, 3) = 2 + (-3)(-1) + 3 = 8,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (2, -3, 1) \cdot (1, -2, 0) = 2 + (-3)(-2) + 0 = 8,$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = 8(1, -2, 0) - 8(1, -1, 3) = (0, -8, -24).$$

17. 求与 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 都垂直的单位向量.

$$\text{解 } \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}, \text{ 则 } \pm \mathbf{e}_c = \pm \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \right).$$

18. 已知空间四点 $A(-1, 0, 3)$, $B(0, 2, 2)$, $C(2, -2, -1)$, $D(1, -1, 1)$, 求与 \vec{AB} 、 \vec{CD} 都垂直的单位向量.

$$\text{解 } \vec{AB} = (0 - (-1), 2 - 0, 2 - 3) = (1, 2, -1),$$

$$\vec{CD} = (1 - 2, -1 - (-2), 1 - (-1)) = (-1, 1, 2),$$

$$\vec{AB} \times \vec{CD} = (1, 2, -1) \times (-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5, -1, 3),$$

$|\vec{AB} \times \vec{CD}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{35}$, 则与 \vec{AB} 和 \vec{CD} 垂直的单位向量为

$$e = \frac{\vec{AB} \times \vec{CD}}{|\vec{AB} \times \vec{CD}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}} \right);$$

或
$$-e = -\frac{\vec{AB} \times \vec{CD}}{|\vec{AB} \times \vec{CD}|} = \left(\frac{-5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}} \right).$$

19. 设向量 $a = 2i + j$, $b = -i + 2k$, 求以 a 、 b 为邻边的平行四边形的面积.

解
$$a \times b = (2, 1, 0) \times (-1, 0, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -4, 1),$$

$$S = |a \times b| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}.$$

20. 求以点 $A(1, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$, $C(3, 1, 0)$ 为顶点的三角形的面积.

解
$$\vec{AB} = (0 - 1, 0 - 2, 1 - 3) = (-1, -2, -2),$$

$$\vec{AC} = (3 - 1, 1 - 2, 0 - 3) = (2, -1, -3),$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, -2, -2) \times (2, -1, -3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (4, -7, 5),$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 5^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

21. 设 $A = 2a + b$, $B = ka + b$, 其中 $|a| = 1$, $|b| = 2$, $a \perp b$, 问:

(1) k 为何值时, $A \perp B$;

(2) k 为何值时, 以 A 与 B 为邻边的平行四边形的面积为 6.

解 (1) 因为 $a \perp b$, 故 $a \cdot b = 0$, 所以

$$0 = A \cdot B = (2a + b) \cdot (ka + b) = 2k|a|^2 + |b|^2 = 2k + 4, \quad k = -2;$$

$$(2) A \times B = (2a + b) \times (ka + b) = (2 - k)(a \times b),$$

平行四边形面积为 $A \times B$ 的模, 所以

$$6 = |A \times B| = |2 - k| |a| |b| \sin(\widehat{a, b}) = |2 - k| \cdot 2, \quad k - 2 = \pm 3,$$

所以 $k_1 = 5, k_2 = -1$.

22. 已知 $a = 2m + 3n$, $b = 3m - n$, m 、 n 是两个互相垂直的单位向量, 求:

(1) $a \cdot b$; (2) $|a \times b|$.

解 (1)
$$a \cdot b = (2m + 3n) \cdot (3m - n) = 6|m|^2 + 7|m||n|\cos(\widehat{m, n}) - 3|n|^2$$

$$= 6 \cdot 1^2 + 7 \cdot 0 - 3 \cdot 1^2 = 3;$$

$$(2) a \times b = (2m + 3n) \times (3m - n) = 6m \times m - 2m \times n + 9n \times m - 3n \times n$$

$$= -11m \times n,$$

$$|a \times b| = 11|m \times n| = 11|m||n|\sin(\widehat{m, n}) = 11.$$

23. 设 a 、 b 、 c 满足 $a + b + c = 0$.

(1) 证明: $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$;

(2) 若还满足 $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$, $|\mathbf{c}|=5$, 求 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|$.

证明 (1) 因 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以

$0 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$,
即有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2).$$

(2) 因 $\mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 故

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{c} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

由于

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2, \quad \text{故 } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| = 3|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 36.$$

24. 设 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ 垂直, $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 垂直, 求 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 之间的夹角 θ .

解 由于 $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$, 所以 $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 0$, 即

$$7|\mathbf{a}|^2 - 15|\mathbf{b}|^2 + 16\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1)$$

又 $(\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$, 所以 $(\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \cdot (7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$, 即

$$7|\mathbf{a}|^2 + 8|\mathbf{b}|^2 - 30\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (2)$$

联立方程(1)、(2)得

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

所以

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{3}.$$

25. 试用向量方法证明三角形的余弦定理.

证明 设在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA = \theta$, $|CB| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$,

现要证 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. 记 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, 则有 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, 从而

$$|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

由 $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $|\mathbf{c}| = c$, 即得

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

26. 试用向量积证明三角形正弦定理.

证明 设 $\triangle ABC$ 的三个内角为 α 、 β 、 γ , 三边长为 a 、 b 、 c ,

因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB}$,

故 $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$, 即 $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB}$.

两边取模, 有 $|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AB}|$, 即 $bcsin\alpha = acsin\beta$, 故 $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

同理可证

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

因此 $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, 三角形正弦定理得证.