

THE FINITE ELEMENT METHOD THEORY
AND APPLICATIONS

朱伯芳 著

有限单元法原理 与应用

第四版



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

朱伯芳 著

有限单元法原理 与应用

第四版



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

·北京·

内 容 提 要

本书作为第四版,在第三版的基础上增加了一些由新技术产生的新的分析计算方法,并加入了矩阵、线性代数等一些基础计算方法。内容上系统阐述了有限单元法的基本原理及其工程应用,包括杆系结构,弹性力学平面问题,单元分析,整体分析,平面问题高次单元,弹性力学轴对称问题,弹性力学空间问题,形函数、坐标变换、等参数单元与无限单元,各种平面与空间单元的比较、应用实例,弹性薄板,弹性薄壳,轴对称壳,弹性厚板和厚壳,流体力学问题,热传导,非线性有限元分析方法,塑性力学问题,混凝土徐变、一般黏弹性及黏塑性问题,弹性稳定问题,大位移问题,断裂力学问题,结构动力学问题,岩石力学问题,土力学问题,混凝土与钢筋混凝土结构,工程反分析与数值监控,网格自动生成、误差估计与自适应技术,矩阵,线性代数方程组,变分法,加权余量法等。本书内容丰富,取材新颖,概念清晰,并特别重视理论联系实际,兼有科学性和实用性。

本书可供土木、水利、机械等工程专业的设计、科研人员使用,也可用作高等院校有关专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法原理与应用 / 朱伯芳著. -- 4版. -- 北京:中国水利水电出版社, 2018.6
ISBN 978-7-5170-6562-3

I. ①有… II. ①朱… III. ①有限元法 IV. ①0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第137967号

书 名	有限单元法原理与应用 (第四版) YOUXIAN DANYUANFA YUANLI YU YINGYONG
作 者	朱伯芳 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	天津嘉恒印务有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 46.75印张 1108千字
版 次	1979年8月第1版第1次印刷 2018年6月第4版 2018年6月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	120.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

序

在近代工程科学技术的发展中，由于飞行器、船舶、车辆、机械、水坝、桥梁、房屋等工程设计上的需要，固体力学始终受到人们的重视。在 20 世纪 40 年代以前，虽然已提出了变分法、差分法、松弛法等计算方法，但它们只能用于分析形状简单的结构，对于实际工程中很复杂的结构，很难进行比较精确的分析。当时在设计上往往只进行一些近似的分析，然后依靠设计者的经验、已建工程的类比、模型试验和适当加大安全系数等办法来保证工程的安全；到了 20 世纪 40 年代中期电子计算机出现以后，人们首先想到用计算机求解杆件结构力学中力法和变位法的基本方程，形成了矩阵力法和矩阵位移法，效果不错。在类似思想的指引下，到了 20 世纪 50 年代中期，人们提出了有限单元法，把连续介质离散成一组单元，使无限自由度问题转化成有限自由度问题，再用计算机求解。这一方法可用于分析形状十分复杂的结构，所以它一出现就受到人们的普遍重视，很快扩展到固体力学的各个分支，又从固体力学扩展到流体力学、热传导学、电磁学等各个领域，发展成为一个十分重要的工程计算方法。

有限单元法的优点是：①可以分析形状十分复杂的、非均质的各种实际的工程结构；②可以在计算中模拟各种复杂的材料本构关系、荷载和条件，例如可以模拟岩体中的渗流和初始地应力场、混凝土的不均匀温度场等，这些因素在物理模型中往往是难以模拟的；③可以进行结构的动力分析；④由于前处理和后处理技术的发展，可以进行大量方案的比较分析，并迅速用图形表示计算结果，从而有利于对工程方案进行优化。由于具有上述优点，有限单元法在工程设计和研究中得到了广泛的应用。

此书第一版早已脱销，水利图书出版基金委员会决定资助本书再版。由于近 20 年有限元法有了很大发展，在第二版中，作者对书的内容进行了大幅度的更新，大约 70% 的内容都是新写的，目前有限单元法的应用非常广泛，由于篇幅所限，要把各方面的内容都纳入一书中实际上已不可能。该书作者是从事水利工程设计和研究的工程师，所以该书的取材，除了有限元的基本原理外，应用部分主要着眼于土木、水利工程。全书共 27 章：第 1~第 4 章，主要以杆件结构和弹性力学平面问题为例介绍有限元法的基本原理；第 5~第 13 章阐述等参数单元、弹性力学空间问题及板、壳问题的解法；第 14~第 15 章说明场问题（流场和温度场）的解法；第 16~第 20 章说明非线性问题（塑性、徐变、失稳、大位移）的解法；第 21、第 22 章阐述断裂和动力问题的解法；第 23~第 25 章说明岩石力学、土力学、混凝土及钢筋混凝土结构的解法；第 26 章阐明工程反分析问题的解法；第 27 章阐述网格自动生成、误差估计及自适应技术。

在该书写作中，除了广泛总结国内外文献外，作者也提出了不少自己的研究成果，如

混凝土坝仿真应力并层算法、徐变应力场和温度场的分区异步长解法、非均质弹性徐变体的两个基本定理、弹性徐变应力的隐式解法、简谐徐变应力的等效模量法、岩体高次节理单元、混凝土人工冷却有限元解法、混凝土弹性模量、徐变度及松弛系数表达式、岩体节理劲度系数表达式等。

虽然有限单元法的分析能力很强，但实际工程问题有时是很复杂的，计算分析之前仍需要进行一定的概化和假定；另外，有关的计算参数和设计荷载也有一定的近似性，这些都对计算精度有影响。在用有限单元法分析工程问题时，我们应对这点有充分的认识。一方面要设法使计算中采用的概化假定、计算参数和设计荷载等尽量符合实际情况；另一方面，在选取计算网格和分析计算结果时，也要注意这些因素的不确定性所产生的影响。举个简单的例子，近 20 年来有限单元法在岩石力学中的发展很快，但对于一个复杂的岩体工程问题，可以说关键往往并不在于采用非常复杂而精细的计算方法，而在于如何搞清楚地下岩体的主要构造和有关参数。当然，在这里，我只是强调掌握工程的物理特性的重要，并无意否定在岩石力学中发展有限元方法的意义。

有限单元法应用于实际工程还碰到一个设计准则问题。现有设计规范是以过去积累的工程经验为基础的，而过去不少工程是用简化的计算方法进行设计的。简化方法与有限元法计算的结果当然不同，设计工程师做设计必须遵循设计规范，在设计准则修改以前，有限单元计算的结果实际上只能起到参考作用，真正决定结构断面尺寸的有时还是老的简化计算方法。因此，为了使有限单元法在工程设计中发挥更大的作用，还需要在修改设计准则方面花大力气，做大量艰巨的工作。

该书十分重视理论联系实际，对于有限单元法的工程应用，注意工程的物理特性，要求采用的概化假定、计算参数和计算荷载等尽量接近实际，计算方法的精度与这些条件相适应。该书还重视有限单元法的计算结果与实际观测资料相验证。

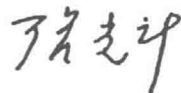
该书第一版写于“文化大革命”期间，1969 年作者从北京下放到黄河三门峡水电站工地，地处山区，工作条件和生活条件的改变是很大的，作者到工地以后仍夜以继日地工作着。先是积极地参加了三门峡改建工程的科研工作，后来组织了一个三人班子，积极从事有限单元法的研究和推广。先后编制了五个有限单元程序，为当时我国不少水利工程的设计和施工提供了大量计算成果。工地缺乏图书资料，他趁出差机会，广泛收集国内外资料，结合本人的心得体会，写出了此书第一版，对于在我国推广有限单元法发挥了一定的作用。该书作者在 10 年下放期间还出版了其他科技著作和论文，可以看到作者在十分困难的条件下，辛勤地工作，出了大量成果，这种精神值得我们学习。

此书作者于中华人民共和国成立初期从大学土木系毕业，毕业以后长期从事工程设计和生产性科研工作。从此书内容可以看出，作者运用了大量近代数学力学手段，这些完全是作者自学的。从这里可以看出，一个科技工作者，必须通过自学，才能不断更新自己的知识结构，增强自己的工作能力。当然，对于工程师来说，数学力学只是解决问题的工

具，关键还在于把握问题的实质。该书在取材上，特别重视实用，在写作过程中，十分重视物理概念的阐述，书中作者自己提出的混凝土坝数值监控、并层算法、分区异步长解法等许多新的算法，实质上也都是由于物理概念上的创新而得到的。

该书内容丰富，取材新颖而实用，它的出版无疑将为有限单元法在我国的进一步应用和发展而产生积极的推动作用，故乐为之序。

中国科学院院士、中国工程院院士、主席团成员

A handwritten signature in black ink, appearing to read '张震' (Zhang Zhen), written in a cursive style.

1997年7月2日

第四版前言

有限单元法的计算功能特别强大，目前我国高等院校力学专业本科和工程专业研究生多开设了这门课程，而且本书被许多高校用作教材，因而一再重版。

这次改版，进行了以下 4 方面的修改：

(1) 流体力学有限元方法近年来有较大进展，本书第 14 章流体力学部分，内容有较大扩展，纳入了较多新的解法。

(2) 由于大型工程的安全问题特别重要，增加了 § 26-7 工程的数值监控一节。

(3) 增加第 28~第 31 章，矩阵、线性代数方程组、变分法和加权余量法，这些方法在有限元计算中经常要用到，它们在高校数学系课程中都有阐述，但内容较抽象，不易为工科学生掌握，本书用容易读懂的方式，阐述这些方法，有利于工科学生学习。

(4) 鉴于本书已在国内被广泛用作高等学校的教材，这次增加了习题。

本书内容非常广泛，限于本人水平，书中难免有许多缺点和错误，欢迎读者批评指正。

作者

2017 年 11 月 9 日

于北京中国水利水电科学研究院

第三版前言

实践经验表明，有限单元法是在工程问题的分析中最有用、最强有力的数值方法，不但其计算能力非常强、应用范围非常广，许多十分复杂的问题，以及其他方法难以计算的问题，有限单元法都可以给出很好的计算结果；而且由于前、后处理技术的发展和已研制成功一大批应用软件，其计算效率非常高，输出的计算成果也很丰富。因此，在实际工程中有限单元法已得到了非常广泛的应用，目前已是工程设计和研究人员的重要工具，而且有关的研究成果仍然不断地在国内外学术刊物上大量出现。

本书初稿写于1973—1975年，于1979年出版了第一版，到今年正好30年，由于有限单元法的巨大生命力，加之本书内容比较实用、概念比较清晰，出版后颇受读者欢迎，于1998年出版了第二版，并于2001年、2004年先后重印了两次。与第二版相比，在第三版中，内容作了更新和扩充。例如，在岩土工程中，边坡稳定和地基承载能力的分析十分重要，过去采用一些近似方法，如果遇到比较复杂的情况就很难求出准确结果，近年来利用有限单元法进行极限分析，可以得到比较满意的结果，因此，在第三版中增加了岩土力学的极限分析内容。又如，在渗流场分析中，排水孔是计算中的一个难点，在第三版中给出了作者提出的很有效的夹层代孔列法。此外，更新了书中有些内容，例如重新编写了大体积混凝土的人工冷却和混凝土坝仿真分析的复合单元等。希望本书能更好地满足读者的需要，并热情欢迎读者的批评和指正。

作者

2009年1月24日晨于北京

第二版前言

有限单元法是在 20 世纪六七十年代发展起来的强有力的数值分析方法，它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解，而且由于前、后处理技术的发展，计算效率非常高，实际应用越来越广泛。

有限单元法的广泛应用，对工程的研究、设计甚至监测工作都有重要影响。在工程研究方面，过去主要依靠模型试验，现在有限单元法已成为一个重要的研究手段，并已取代了部分模型试验工作。例如，过去在水利工程科研中得到广泛应用的光弹性实验，目前已为有限单元法所取代。在工程设计方面，由于有限单元法的应用，对一些复杂的工程问题加深了认识，从而有利于提高设计的质量。有限单元法在工程监测方面的应用，也提高了监测的水平。

本书初稿写于 1973—1975 年，当时本人的工作单位水利水电科学研究院被撤销，本人被下放到黄河三门峡水电工地。全部书稿是在一间土坯砌筑的工棚内写成的。因地处山区，图书资料十分缺乏，虽然写作过程中作了很大努力，但限于客观条件和本人的水平，对书的质量很难有 too 高的期望。当初本人写书的主要目的是为土木水利工程技术人员提供一本参考书，但因本书第一版是国内出版较早的有限单元法书籍之一，出版后，除了工程技术人员外，实际上已成为工科高等院校教师和研究生的一本参考书，并被一些工科高等院校用作研究生教材，在科技期刊和学术著作中被广泛引用。这一情况使本人在欣慰之余，感到不胜惶恐。

从本书第一版脱稿到现在已近 20 年了，在这段时间内，有限单元法又有了很大的进展，为了反映这些新的进展，水利图书出版基金委员会决定资助本书再版。由于过去 20 年中有限单元法进展很大，这次修改的幅度较大，全书 70% 以上篇幅都是新写的。

在维持原书篇幅不变的条件下，为了纳入大量新内容，必须删去大量老内容。第一版第 23~第 26 章介绍矩阵、线性代数、变分法和加权余量法，这在当时是必要的，因为那时一般工程技术人员不熟悉这些内容。现在工科高等院校已讲授这些内容，所以这次全部删去，只在附录中加入矩阵和变分法的简略内容备查。此外，本人已另有《结构优化设计原理与应用》一书出版，所以第 22 章结构优化设计也删去。

本书第一版第 1~第 7 章阐述有限单元法的基本原理，这次基本保留了原来的内容，只进行了局部修改。从第 8 章开始，内容更新较多，新加了轴对称壳、大位移问题、混凝土与钢筋混凝土结构、工程反分析、网格自动生成、误差估计与自适应技术等章；塑性力学问题原来只是一节，这次扩充为一章。第一版第 8~第 21 章（第二版第 8~第 11、第 13~第 16、第 18、第 19、第 21~第 24 章）在内容上也有较大的更新，增加了大量新的内容，如统一形函数、非协调单元、小片检验、无限单元、挠度与转动分别插值的曲边板单元、子结构法在非线性分析中的应用、多层混凝土结构仿真应力分析的并层算法、里兹向量叠加法、钝裂缝带模型、双屈服面弹塑性土体模型等。不少章节虽保留了原来的名

称，内容已全部更新。由于有限单元法已广泛应用于工程的各个领域，限于篇幅，本书不可能包罗万象，而只能有所侧重。总体说来，有限单元法的基本原理以及在土木、水利工程中实用价值较大的计算方法基本上都已纳入本书。

需要特别指出的是，中国科学院院士、中国工程院院士及主席团成员、国际著名工程专家张光斗先生在百忙之中拨冗为本书作序，并就工程计算方法的发展提出了十分重要的意见。本书的部分内容由陈重华教授（第16～第18章）、张世雄高级工程师（第14章）和饶斌高级工程师（第22章）细心审阅，并提出了许多宝贵意见。中国水利水电出版社阳森为本书的编辑付出了辛勤劳动，特致谢忱！

本书内容主要取材于国内外有关文献和专著，一部分系作者本人的研究成果。因工作较忙，只能利用业余时间写作；加之本书内容非常广泛，限于本人水平，书中难免有许多缺点和错误，热情欢迎读者批评指正。

作者

1997年7月13日夜于北京

第一版前言

这是为我国水电、土建等专业工程技术人员而写的一本书。它系统地介绍了有限单元法的基本原理及其在工程问题中的应用。

本书取材，力求实用。对于有限单元法的基本原理，着重阐述基本概念及推导计算公式所必须的原理和方法。至于收敛性等问题，只说明一些主要结论，不作详细推导。对于在实际工程中有用的计算方法，进行了全面、系统的阐述，并力求讲述清楚、给出具体计算公式，以便读者掌握必要的计算方法，并在实际工作中加以应用。

在写作方法上，尽量做到由浅入深，先易后难，便于自学。例如，先讲杆系结构，后讲连续介质；先用直观方法讲述平面三角形单元，待读者建立初步的力学概念后，再讲述比较严密的能量方法。

本书内容大致是这样安排的：

第1章杆系结构和第2章弹性力学平面问题是全书的导引。用直观方法讲述有限单元法的基本概念，并推导有关公式，以利于读者对有限单元法建立初步的力学概念。当然，这两章所介绍的计算方法在实际工程中也是经常用到的。

第3章单元分析和第4章整体分析，讲述有限单元法的基本原理，说明如何用能量方法进行单元和整体分析。不但对虚位移原理作了详细阐述，而且根据当前发展趋势，对最小势能原理、最小余能原理及混合能量原理也作了适当介绍。

第5~第9章，讲述弹性力学问题，比较全面地介绍了各种平面和空间单元的计算方法，对各种单元的特性和优缺点进行了比较，说明了在实际工作中如何选择单元，列举了应用实例。

第10~第12章，讲述板壳力学问题，除了一般有限单元书籍中所介绍的矩形和三角形单元外，根据近年有限单元发展情况，还介绍了混合薄板单元、曲面薄壳单元、厚板和厚壳曲面单元、弹性半空间上的板等等。根据水工上的需要，还介绍了边界由弹性基础支承的壳体计算方法。

第13、第14章，讲述场问题，说明了流体力学和热传导问题的主要算法，详细阐述了实际工程中经常遇到的各种边界条件的处理，如流场的自由面和温度场的放热边界等等。

第15~第21章主要讲述有限单元法在各种非线性和复杂工程问题中的应用，包括塑性力学、岩石力学、土力学、徐变、结构动力学、弹性稳定及断裂力学等。有限单元法在这些方面的应用是十分成功的。这些问题都十分复杂，过去因缺乏有效的计算方法，只能在过分简化的条件下求出一些简单解答，计算条件与实际工程相差很远。应用有限单元法以后，已经可以针对实际的工程结构和实际的边界条件进行定量的分析计算了。因此可以为工程设计提供丰富的、能反映实际情况的计算成果，有利于设计质量的提高。

作者本人是一个从事水利水电建设的工程师，本书读者对象又是土木水利专业的工程

技术人员，所以本书的重点是工程应用。

本书内容，一部分取材于国内外有关文献和专著，一部分系作者本人的心得体会。书稿主要写于1973—1975年，作者在一个水电工地工作，地处山区，图书资料十分缺乏，写作时间也比较少，而本书涉及范围又非常广泛，加之限于作者水平和精力，书中难免有许多缺点乃至错误，热情欢迎读者批评指正。

作者

1978年11月于黄河三门峡水电站

目 录

序

第四版前言

第三版前言

第二版前言

第一版前言

第 1 章 杆系结构	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 水平杆单元的刚度矩阵	3
§ 1-3 倾斜杆单元的刚度矩阵	4
§ 1-4 坐标转换	6
§ 1-5 结点平衡方程与整体刚度矩阵	8
§ 1-6 边界条件的处理	9
§ 1-7 梁单元的刚度矩阵	15
§ 1-8 梁单元荷载向结点的移置	17
§ 1-9 由位移转换矩阵建立整体刚度矩阵	18
§ 1-10 用编码法建立整体刚度矩阵	20
§ 1-11 考虑轴向力和剪切变形的梁单元刚度矩阵	22
§ 1-12 温度荷载	27
§ 1-13 空间的梁单元刚度矩阵	28
习题	33
参考文献	34
第 2 章 弹性力学平面问题	36
§ 2-1 连续介质的离散化	36
§ 2-2 位移函数	38
§ 2-3 单元应变	39
§ 2-4 初应变	40
§ 2-5 单元应力	41
§ 2-6 等效结点力与单元刚度矩阵	44
§ 2-7 结点荷载	48
§ 2-8 结点平衡方程与整体刚度矩阵	51
§ 2-9 用编码法建立整体刚度矩阵	54
§ 2-10 计算实例	55

习题	58
参考文献	59
第3章 单元分析	60
§ 3-1 虚位移原理	60
§ 3-2 单元位移	62
§ 3-3 单元应变与应力	63
§ 3-4 结点力与单元刚度矩阵	64
§ 3-5 结点荷载	65
§ 3-6 虚位移原理应用实例——梁单元	67
§ 3-7 应变能和余应变能	69
§ 3-8 最小势能原理	70
§ 3-9 最小余能原理	72
§ 3-10 杂交单元	74
§ 3-11 杂交单元实例——平面矩形单元	75
§ 3-12 混合能量原理	78
§ 3-13 复合单元	79
习题	80
参考文献	81
第4章 整体分析	82
§ 4-1 结点平衡方程	82
§ 4-2 最小势能原理的应用	83
§ 4-3 最小势能解答的下限性质	84
§ 4-4 解答的收敛性	85
§ 4-5 子结构分析	87
习题	90
参考文献	91
第5章 平面问题高次单元	92
§ 5-1 矩形单元	92
§ 5-2 面积坐标	95
§ 5-3 高次三角形单元	98
习题	101
参考文献	101
第6章 弹性力学轴对称问题	102
§ 6-1 轴对称荷载	102
§ 6-2 非轴对称荷载	106
习题	110
参考文献	110

第 7 章 弹性力学空间问题	111
§ 7-1 常应变四面体单元	111
§ 7-2 体积坐标	115
§ 7-3 高次四面体单元	117
习题	118
参考文献	119
第 8 章 形函数、坐标变换、等参数单元与无限单元	120
§ 8-1 形函数定义.....	120
§ 8-2 一维形函数.....	121
§ 8-3 二维形函数.....	121
§ 8-4 三维形函数.....	127
§ 8-5 坐标变换	132
§ 8-6 位移函数	136
§ 8-7 单元应变	137
§ 8-8 刚度矩阵	141
§ 8-9 结点荷载	142
§ 8-10 等参数单元的退化.....	144
§ 8-11 数值积分	149
§ 8-12 数值积分阶次的选择	151
§ 8-13 应力精化与应力修匀	155
§ 8-14 单元形态与单元布置	159
§ 8-15 非协调单元	160
§ 8-16 小片检验	163
§ 8-17 三角形、四面体与三棱体曲边单元	166
§ 8-18 等参数单元中的向量计算	169
§ 8-19 等参数单元算例	173
§ 8-20 杆件—块体连接单元	175
§ 8-21 无限单元	180
习题	184
参考文献	186
第 9 章 各种平面与空间单元的比较、应用实例	187
§ 9-1 各种平面单元的比较与选择	187
§ 9-2 各种空间单元的比较与选择	189
§ 9-3 拱坝应力分析	192
§ 9-4 支墩坝应力分析	197
§ 9-5 重力坝空间作用的分析	199
§ 9-6 土坝空间作用的分析	200

§ 9-7 隧洞衬砌应力分析	201
习题	202
参考文献	203
第 10 章 弹性薄板	204
§ 10-1 弹性薄板的弯曲	204
§ 10-2 矩形薄板单元	209
§ 10-3 三角形薄板单元	214
§ 10-4 挠度与转动分别插值的曲边板单元	218
§ 10-5 弹性基础上的板	223
习题	226
参考文献	227
第 11 章 弹性薄壳	228
§ 11-1 局部坐标系中的单元刚度矩阵	228
§ 11-2 坐标转换、整体刚度矩阵	230
§ 11-3 局部坐标的方向余弦	233
§ 11-4 曲面薄壳单元	235
§ 11-5 曲梁支承或加强的薄壳	238
§ 11-6 算例	240
习题	241
参考文献	241
第 12 章 轴对称壳	243
§ 12-1 线性单元	243
§ 12-2 曲边单元	245
习题	248
参考文献	248
第 13 章 弹性厚板和厚壳	250
§ 13-1 厚板曲边单元	250
§ 13-2 厚壳曲面单元	253
§ 13-3 算例	260
习题	263
参考文献	263
第 14 章 流体力学问题	264
§ 14-1 牛顿流体的应力与应变关系	264
§ 14-2 运动方程	265
§ 14-3 连续方程	267
§ 14-4 能量方程	267

§ 14-5	状态方程与黏滞方程	268
§ 14-6	稳定渗流基本方程及其离散化	268
§ 14-7	渗流自由面计算	272
§ 14-8	渗流场分析的夹层代孔列法	277
§ 14-9	非稳定渗流	280
§ 14-10	地震时动水压力	282
§ 14-11	用势函数 ϕ 表示的势流	283
§ 14-12	用流函数 ψ 表示的势流	286
§ 14-13	自由面流动	289
§ 14-14	黏性非牛顿流体流动	292
	习题	294
	参考文献	294
第 15 章	热传导	296
§ 15-1	热传导问题	296
§ 15-2	在空间域的离散化	298
§ 15-3	在时间域的离散化	300
§ 15-4	大体积混凝土的人工冷却	310
§ 15-5	不稳定温度场的分区异步长解法	317
	习题	320
	参考文献	321
第 16 章	非线性有限元分析方法	322
§ 16-1	增量法	322
§ 16-2	迭代法	326
§ 16-3	混合法	331
§ 16-4	子结构法在非线性分析中的应用	331
	习题	333
	参考文献	333
第 17 章	塑性力学问题	334
§ 17-1	单向受力的应力-应变关系	334
§ 17-2	应力张量的分解与应力不变量	335
§ 17-3	Haigh - Westergaard 应力空间	337
§ 17-4	应变张量的分解	340
§ 17-5	屈服准则	341
§ 17-6	强化条件	354
§ 17-7	加载与卸载准则	355
§ 17-8	弹塑性增量理论有限元解法	357
§ 17-9	弹塑性全量理论有限元解法	368